

Аналитическая геометрия в пространстве

Плоскость и прямая в
пространстве

Плоскость

Основные уравнения плоскости

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

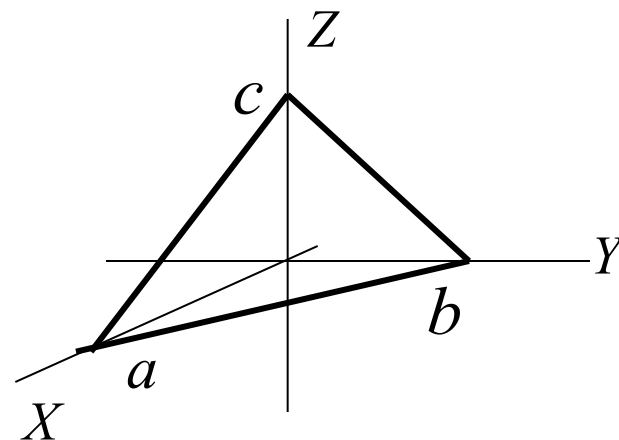
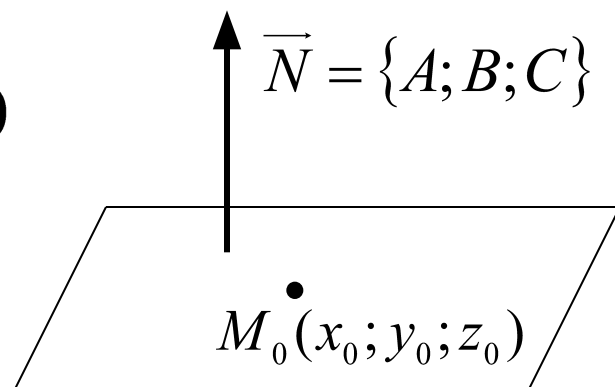
2. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ - вектор нормали

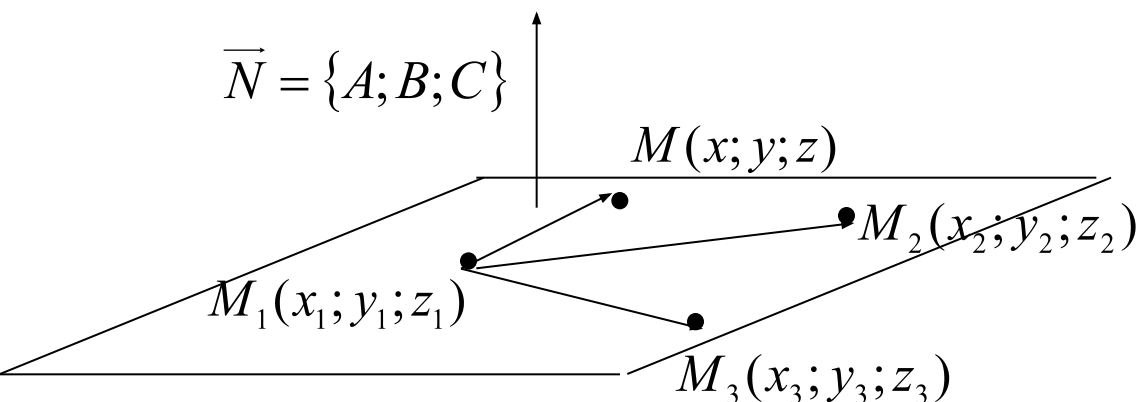
3. Уравнение плоскости « в отрезках »

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Уравнения плоскости

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$



$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Условие компланарности векторов

$$(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Составление уравнений плоскости

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;3;-5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{3;-2;4\}$

Исходное уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Подставляем координаты точки и вектора

$$3(x + 1) - 2(y - 3) + 4(z + 5) = 0$$

Раскрываем скобки

$$3x + 3 - 2y + 6 + 4z + 20 = 0$$

Приводим подобные

$$3x - 2y + 4z + 29 = 0$$

Получили общее уравнение плоскости.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(-1;3;-5), \quad M_2(2;-1;0), \quad M_3(0;-4;7)$$

В данном случае можно воспользоваться формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляем в это уравнение координаты точек и раскладываем определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 2+1 & -1-3 & 0+5 \\ 0+1 & -4-3 & 7+5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$-13(x+1) - 31(y-3) - 17(z+5) = 0$$

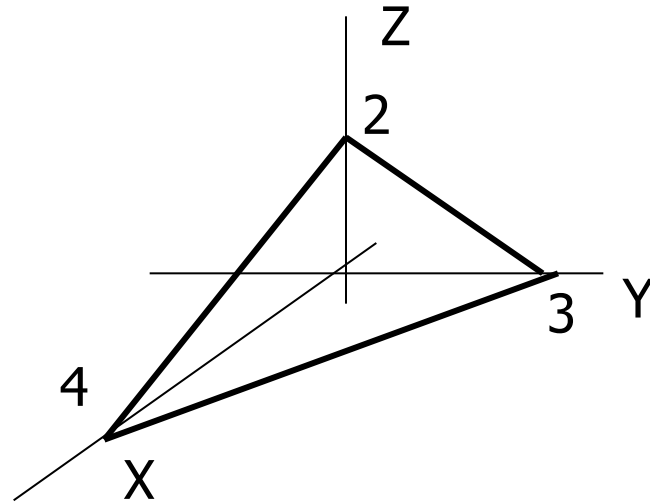
$$13x + 31y + 17z + 5 = 0$$

Построение плоскостей

Построить плоскость: $3x + 4y + 6z - 12 = 0$

1. Координаты точек пересечения плоскости с осями координат:

x	0	0	4
y	0	3	0
z	2	0	0



2. Привести уравнение плоскости к уравнению «в отрезках»:

$$3x + 4y + 6z = 12$$

$$\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} + \frac{6z}{12} = 1$$

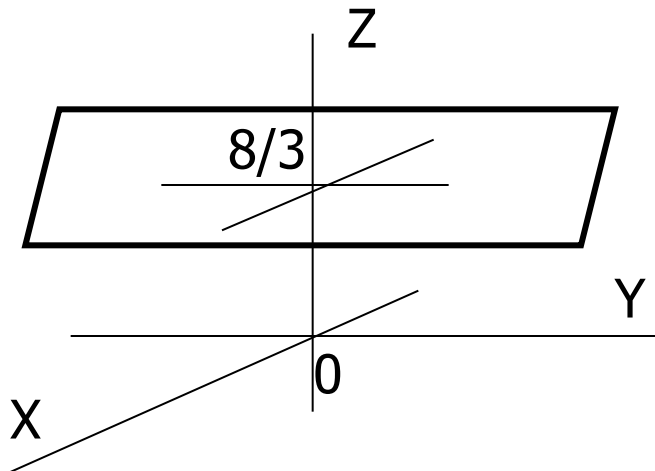
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

Построение плоскостей

2. Построить плоскость

$$3z - 8 = 0$$

В уравнении отсутствуют две переменные x и y . Такая плоскость проходит параллельно и оси OX , и оси OY , т.е. она проходит параллельно координатной плоскости XOY через точку $z=8/3$ на оси OZ .



Аналогично строятся плоскости, в уравнениях которых отсутствуют две переменные

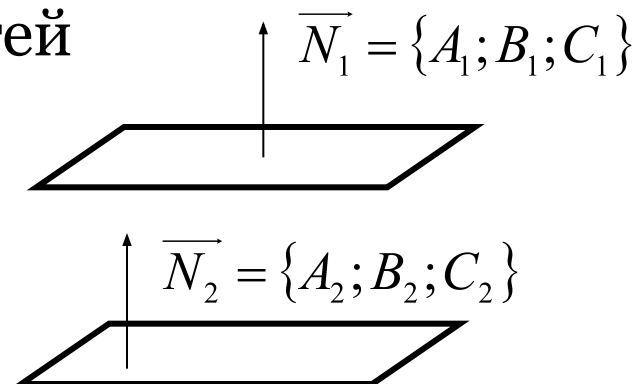
- Если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси координат, переменной которой нет в уравнении.
- Если в уравнении плоскости отсутствует свободный коэффициент, то плоскость проходит через начало координат.
- Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно координатной плоскости, переменных которой нет в уравнении.
- Уравнения координатных плоскостей
 - $x = 0$ - уравнение плоскости YOZ
 - $y = 0$ - уравнение плоскости XOZ
 - $z = 0$ - уравнение плоскости XOY

Взаимное расположение плоскостей

1. Условие параллельности плоскостей

$$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

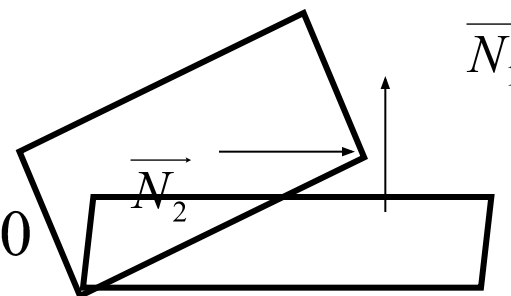


2. Условие перпендикулярности плоскостей

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$$

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 0$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$



3. Косинус угла между плоскостями

Угол между плоскостями – это угол между векторами нормалей этих плоскостей

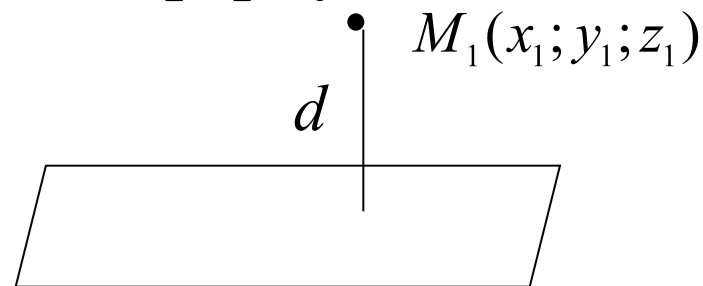
$$\cos \varphi = \cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость

Найти расстояние от точки $M(5;3;-2)$ до плоскости

$$3x - 4y - z - 9 = 0$$

Используем формулу расстояния от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) - 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

Прямая в пространстве. Основные уравнения

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{m; n; p\}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \text{ канонические уравнения}$$

$\vec{s} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор

$$\vec{s} = \{m; n; p\}$$



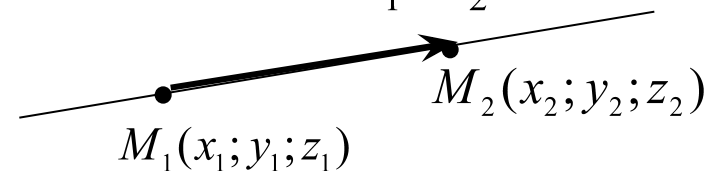
2. Параметрические уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t, \quad \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} \quad M_0(x_0; y_0; z_0)$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

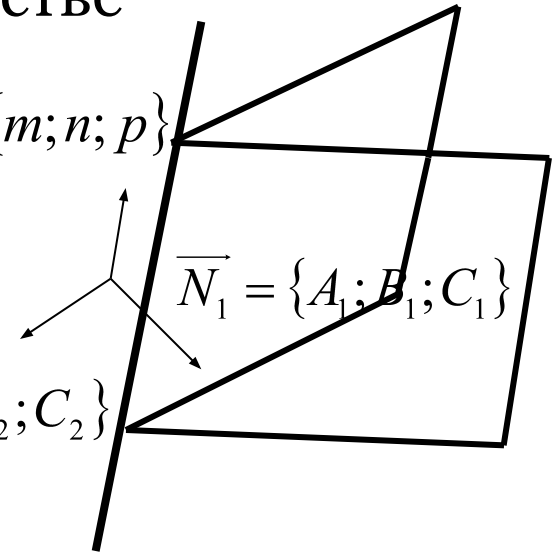


Прямая в пространстве. Основные уравнения

4. Общее уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s} = \{m; n; p\}$$



Направляющий вектор

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

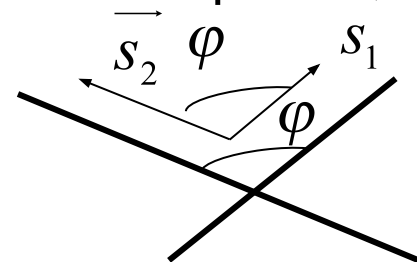
$$\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Нахождение угла между прямыми.

Прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями, поэтому угол между прямыми – это угол между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

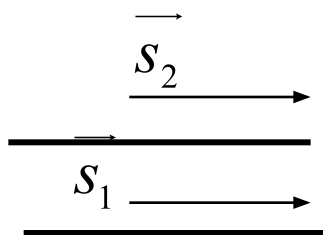


2. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Условие параллельности прямых

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

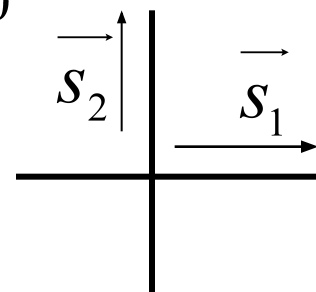


Условие перпендикулярности прямых

$$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0$$

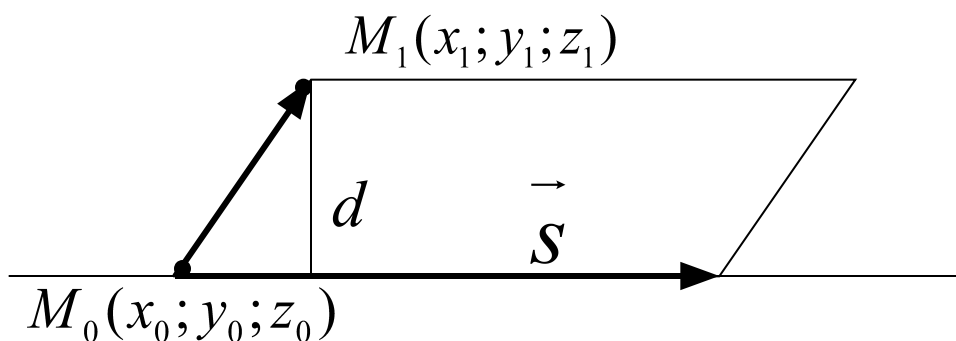
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$



Расстояние от точки до прямой в пространстве

Задача о нахождении расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$

до прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$



На векторах

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$$

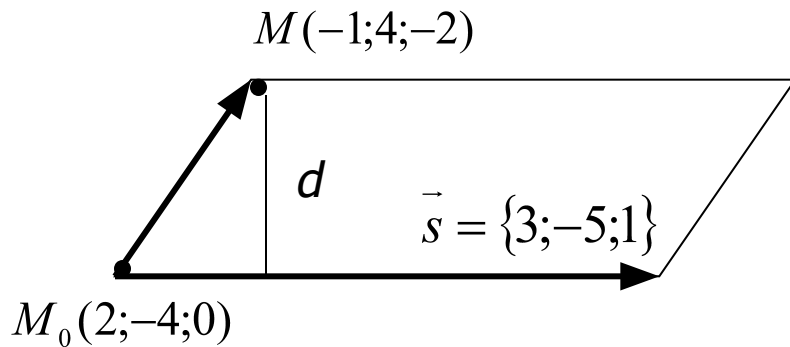
И $\vec{s} = \{m; n; p\}$ строим параллелограмм. Высота этого параллелограмма – искомое расстояние.

Высоту находим как отношение площади параллелограмма к длине основания. Площадь параллелограмма – это модуль векторного произведения векторов, а длина основания – это длина вектора $\vec{s}$

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Найти расстояние от точки $M(-1;4;-2)$

до прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z}{1}$



Искомое расстояние – это высота параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{s} = \{3; -5; 1\} \text{ и } \overrightarrow{M_0M} = \{-3; 8; -2\}$$

Площадь параллелограмма находим, используя векторное произведение

$$S = \left| [\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M}] \right| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ -3 & 8 & -2 \end{vmatrix} \right\| = |2\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{94}$$

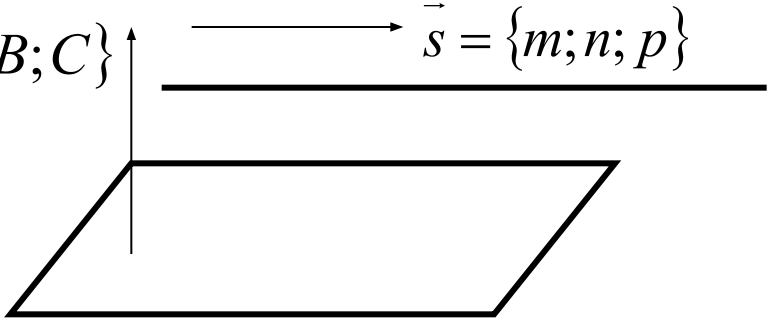
Длина основания – это длина вектора $\vec{s} = \{3; -5; 1\}$

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

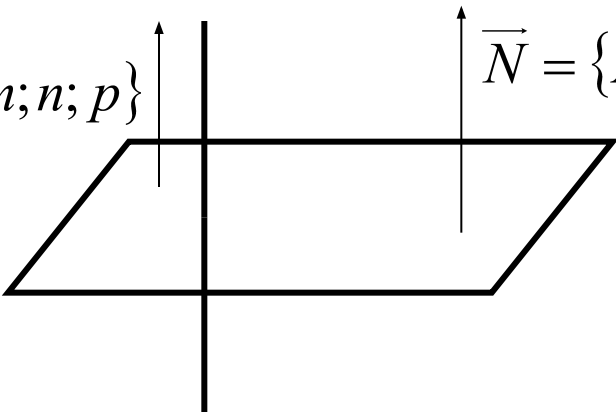
Расстояние от точки до прямой $d = \frac{S}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{94}}{\sqrt{35}}$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

1. Условие параллельности прямой и плоскости

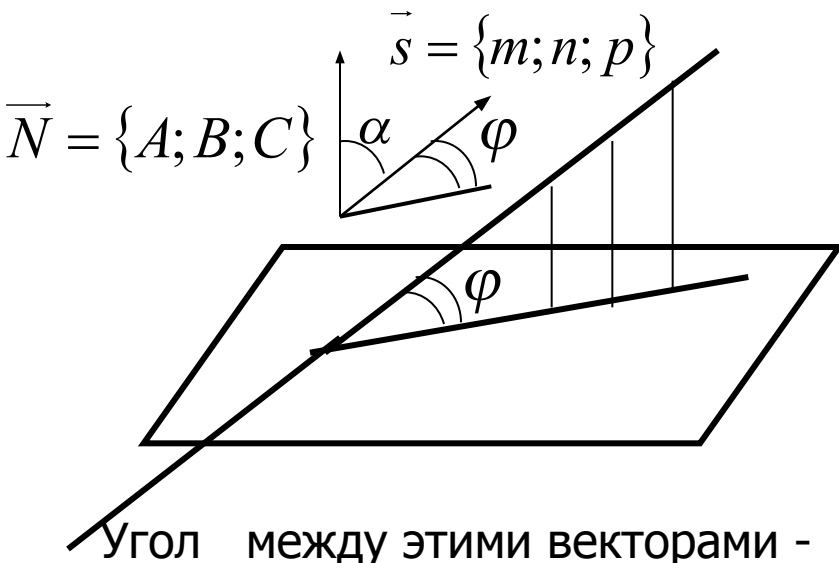

$$\vec{N} = \{A; B; C\} \quad \vec{s} = \{m; n; p\}$$
$$\vec{s} \perp \vec{N} \quad (\vec{N} \cdot \vec{s}) = 0$$
$$Am + Bn + Cp = 0$$

2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости


$$\vec{s} = \{m; n; p\} \quad \vec{N} = \{A; B; C\}$$
$$\vec{N} \parallel \vec{s} \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

3. Нахождение угла между прямой и плоскостью



Углом между прямой и плоскостью-
угол между этой прямой
и ее ортогональной проекцией на
эту плоскость

Из уравнений прямой и плоскости
известны направляющий вектор
прямой и вектор нормали плоскости.

Угол между этими векторами - α

Так как в сумме углы дают 90 градусов, а значит

$$\cos \alpha = \sin \varphi$$

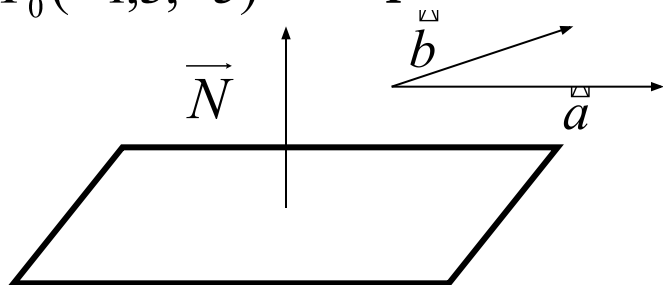
Поэтому при нахождении угла между прямой и плоскостью находят
не косинус, а синус угла. Так как синус угла между прямой и плоскостью
может быть только положительным, то:

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{N} \cdot \vec{s})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Решение типовых задач

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$M_0(-1;3;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \{2;-7;5\}$ и $\vec{b} = \{-3;0;-4\}$



Используем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Координаты точки нам известны. Необходимо найти координаты вектора нормали. Из рисунка видно, что в качестве вектора нормали можно взять вектор, являющийся векторным произведением данных в условии задачи векторов, так как такой вектор перпендикулярен каждому из данных векторов, а значит перпендикулярен и плоскости.

$$\vec{N} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 28\vec{i} - 7\vec{j} - 21\vec{k} \quad \text{Итак, } N = \{28;-7;-21\}$$

Подставляем все данные в уравнение плоскости

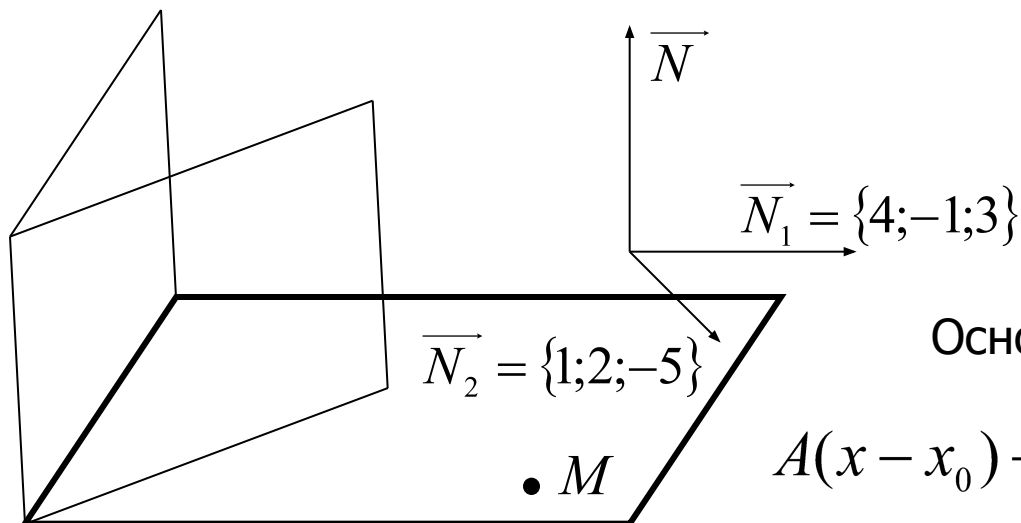
$$28(x+1) - 7(y-3) - 21(z+5) = 0 \qquad 4(x+1) - (y-3) - 3(z+5) = 0$$

$$4x - y - 3z - 8 = 0$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;5)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$4x - y + 3z + 2 = 0$$

$$x + 2y - 5z - 3 = 0$$



Основное уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Для составления уравнения плоскости есть точка $M(2;-1;5)$. Вектором нормали может являться вектор, равный векторному произведению векторов нормалей данных плоскостей.

$$\vec{N} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 23\vec{j} + 9\vec{k}$$

Остается только подставить все данные в уравнение.

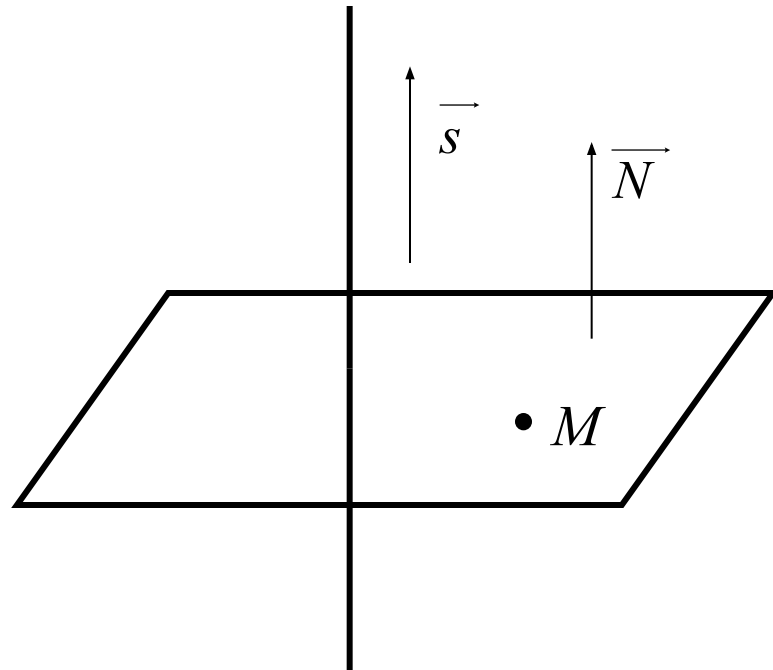
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку
перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-4}$ $M(2;-1;3)$

Основное уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Из рисунка видно, что в качестве вектора нормали плоскости можно взять направляющий вектор прямой

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{s} = \{5; 3; -4\}$$



Таким образом, для составления уравнения плоскости есть все данные:
координаты точки и вектора нормали

$$5(x - 2) + 3(y + 1) - 4(z - 3) = 0$$

$$5x + 3y - 4z + 5 = 0$$

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -2; -1)$ и отсекающую на осях координат одинаковые отрезки
Для решение задачи используем уравнение плоскости «в отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Отрезки на осях одинаковые, поэтому

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \quad \text{или} \quad x + y + z = a$$

Для нахождения a подставляем в это уравнение координаты точки M

$$4 - 2 - 1 = a \quad a = 1$$

Итак, уравнение плоскости: $x + y + z = 1$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;-1;5)$ параллельно оси ОУ.

В качестве направляющего вектора можно использовать любой вектор, параллельный оси ОУ. Самый простой вектор – это единичный вектор оси ОУ

$$\vec{s} = \vec{j} = \{0;1;0\}$$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x+3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{0}$$

6. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(3;-2;0)$ и $M_2(0;6;-4)$

В качестве направляющего вектора можно использовать вектор, соединяющий эти точки.

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{-3;8;-4\}$$

Уравнения прямой:
$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{-4}$$

! Использовать можно координаты любой точки

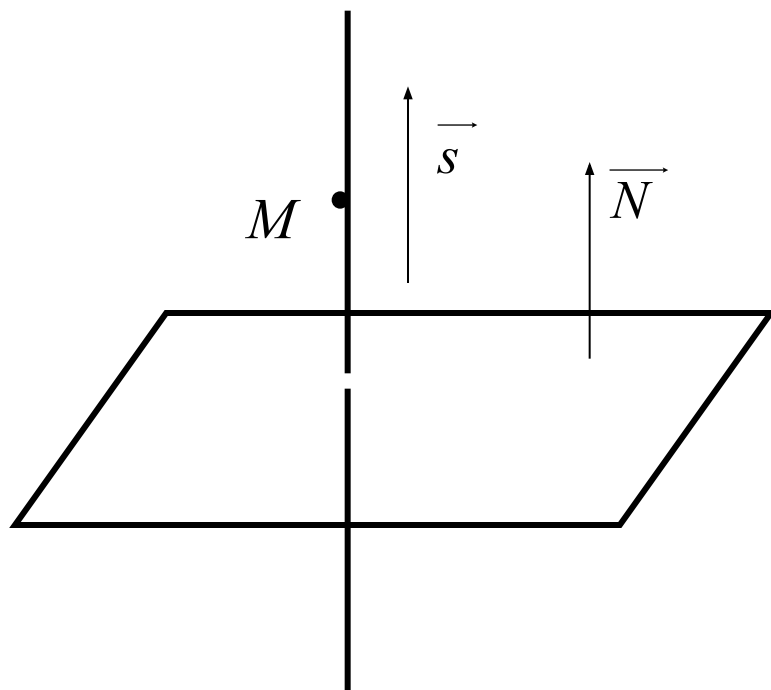
7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;5;-2)$ перпендикулярно плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Из рисунка видно, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор нормали плоскости

$$\vec{s} = \vec{N} = \{4; -1; 3\}$$



Таким образом, для составления уравнения прямой есть все данные: координаты точки и направляющего вектора

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z + 2}{3}$$