Математические модели и математическое моделирование

- **Моделирование** - это исследование какого-либо объекта или явления путем построения и изучения их моделей, осуществляемое с целью прогнозировать новые результаты или новые свойства явления и состоящее в замене эксперимента с оригиналом экспериментом на модели (Вместо реактора – пробирка)
- **Математическая модель** – это система математических уравнений, в рамках которой можно изучать класс тех или иных явлений, получая ответ о параметрах протекающих процессов, без того чтобы ставить натурные и, тем более, промышленные эксперименты.

Математическая модель представляет собой упрощение реальной ситуации, когда несущественные особенности отбрасываются и исходная сложная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу.

Примеры моделей

Наименование модели	Допущения	Область применения	Пример
Материальная точка	размеры полагаются равными нулю, а вся масса считается сосредоточенной в точке (т.е. абстрагируемся от факторов, относящихся к размерам, форме тела, материалу из которого изготовлено и пр.)	изучение траектории движения тел	движение планет вокруг Солнца, искусствен-ных спутников вокруг Земли
Математический маятник	не учитывается затухающий характер колебания, полагается, что колебания происходят в плоскости		
Идеальный газ	не учитывается взаимодействие молекул		

Различают два основных **направления моделирования**:

- **физическое** – изучение технических объектов или процессов с помощью моделей с анализом влияния отдельных физических параметров и линейных размеров (лабораторная установка).

- **математическое** – исследование ММ объекта, процесса или явления с помощью ЭВМ.

Классификация математических моделей

- **I – по характеру отображаемых свойств объекта или явления**

- *структурные М* – отображают устройство объекта и связи между составляющими его элементами (топологические; геометрические (метод конечных элементов)
- *функциональные М* – отражают происходящие в объекте физические, механические, химические или информационные процессы
- *структурно-функциональные* модели

Классификация математических моделей

- **II – по форме представления**

- *<u>алгоритмические М</u>* – связи между внешними и выходными параметрами объекта описываются лишь в форме алгоритма (реализация в виде ЭВМ-программы)
- *<u>аналитические М</u>* – связи между параметрами объекта выражаются в аналитической форме
- *<u>смешанные</u>*

Классификация математических моделей

- **III - по способу получения**

- *теоретические* – результат изучения свойств объекта и протекающих в нем процессов
- *эмпирические* – построение ММ заключается в проведении экспериментальных исследований, связанных с изменением фазовых переменных объекта, и в последующем обобщении результатов этих измерений в виде аналитических зависимостей.
- *полуэмпирические* – сочетают теоретические соображения качественного характера с обработкой результатов наблюдения внешних проявлений свойств изучаемого ТО (используют положения теории размерностей, П-теорему).

Классификация математических моделей

- **IV – по возможности описывать изменения параметров ТО во времени**

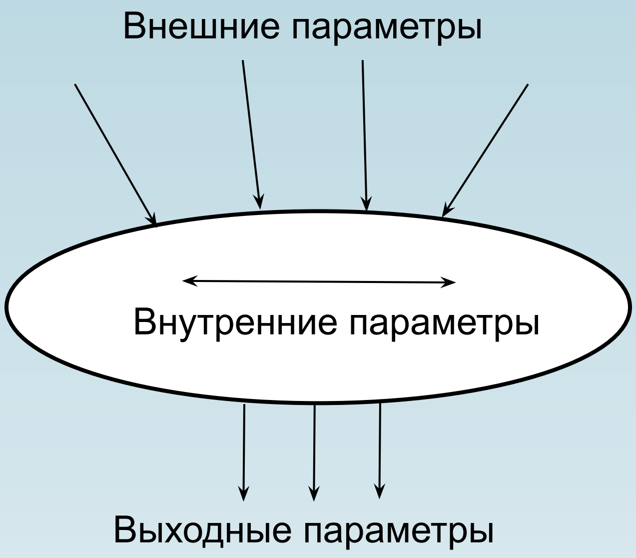
- *нестационарные* (эволюционные);
- *динамические* – описывают связи между основными переменными моделируемого объекта при переходе от одного режима к другому;
- *статические* – описывают стационарные (установившиеся) процессы (такая модель включает описание связей между основными переменными моделируемого объекта или явления в установившемся режиме без учета изменения параметров во времени);
- *квазистатические* (полустатические).

Основные свойства математических моделей

- **Полнота (Универсальность)** – позволяет отразить в достаточной мере те характеристики и особенности объекта или явления, которые интересуют исследователя с точки зрения поставленной цели проведения вычислительного эксперимента. (Характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта).
- **Точность** – дает возможность обеспечить приемлемое совпадение значений характеристик реального объекта и значений этих характеристик полученных с помощью модели.
- **Адекватность** - способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше некоторого заданного значения.
- **Экономичность** – оценивает затраты на вычислительные ресурсы (машинное время и память), необходимые для реализации математической модели на ЭВМ.

Структура математической модели

- Технический объект или явление можно охарактеризовать сочетанием внешних, внутренних и выходных параметров.



Задачи математического моделирования

Существует два основных класса задач, связанные с математическими моделями: **прямые и обратные**.

Прямая	Все параметры модели считаются известными, необходимо исследовать ее поведение. Для ТО по заданным значениям внешних и внутренних параметров определить выходные	Проверочный расчет	Проверка трубопровода на прочность и деформацию
Обратная	Некоторые параметры модели неизвестны (например не могут быть измерены явно), и требуется их найти, сопоставляя поведение реального объекта с моделью. При создании ТО: по установленным тех. заданием значениям внешн. и выходных параметров определить внутренние. (Цель: оптимизация внутр. параметров)	Проектиро-вочный расчет	Определение толщины стенки трубопровода. Подбор оборудования для перекачки

Основные этапы математического моделирования

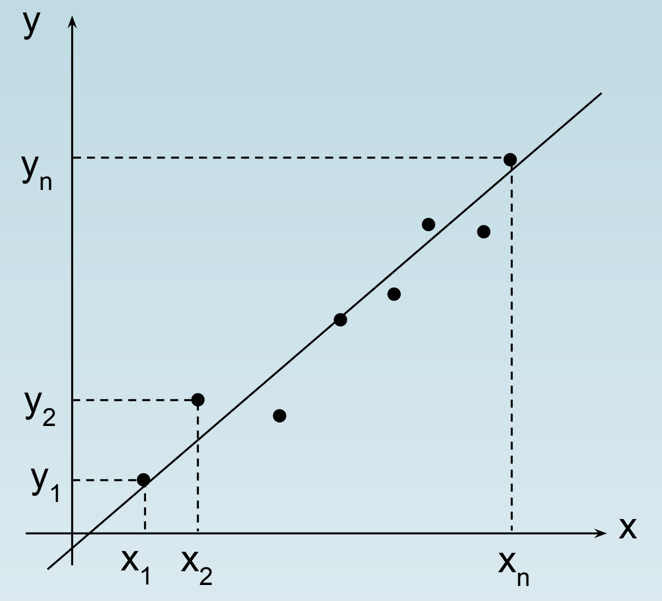
Подбор эмпирических формул

Пусть в результате некоторого эксперимента получены данные, которые сведены в таблицу.

x	x_1	x_2	……	x_n
y	y_1	y_2	……	y_n

На основании этих данных требуется установить функциональную зависимость величины **y** от величины **x**: $y = f(x)$. Такая функция $y = f(x)$ называется эмпирической формулой.

Вид функции $f(x)$ устанавливается обычно или из теоретических соображений, или визуально, исследуя расположение **n** точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) на плоскости XOY.



Подбор эмпирических формул

В качестве подбираемой функции используют:

1) многочлен (полином) k-ой степени $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k = P_k(x)$

частный случай - линейную функцию; $f(x) = a_0 + a_1x$

2) дробно-линейная функцию $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x}$

3) дробно-рациональную функцию $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - соответственно многочлены m-ой и n-ой степеней

4) экспоненциальную функцию $f(x) = a \cdot e^{bx}$

5) степенную функцию $f(x) = a \cdot x^b$

и другие (логарифмическую, обратную и т.д.)
где a_i и b_i – заранее не известные числа.

Пример подбора эмпирической формулы

Теория размерности

<u>Размерные и безразмерные величины</u>

- Величины, численное значение которых зависит от выбора единиц измерения, называются ***размерными***.

<u>*Например:*</u> диаметр трубы: D = 530 мм = 53 см = 0,53 м;

время: t = 1 час = 60 мин = 3600 сек;

коэффициент кинематической вязкости:

$$\nu = 1сСт = 10^{-6}\ м^2/с; \quad и\ т.д.$$

- Величины, численное значение которых не зависит от выбора единиц измерения, называются ***безразмерными.***

<u>*Например:*</u> отношение длины трубопровода к его диаметру; отношение давления на выходе из ГПА к давлению на входе; число Рейнольдса   и т.д.

Основные и производные единицы измерения

- Единицы измерения, вводимые опытным путем с помощью произвольных условий или соглашений, называются ***основными***.

В качестве **основных** в Международной системе единиц **СИ** приняты следующие: длины – метр (м); массы – килограмм (кг); времени – секунда (с); электрич. заряд – Кулон (Кл); температуры – Кельвин (К) и т.д.

- ***Производными (вторичными)*** – называются величины, которые вводятся посредством определений через первичные, и единицы измерения которых устанавливаются через основные.

Примеры: Скорость – отношение пути ко времени: ед. измер. м/с, км/ч, и т.д. Плотность – масса единицы объема вещества: кг/м^3, г/см^3, т/м^3, и.т.д. Давление – сила, отнесенная к единице площади: Па = Н/м^2 = кг/(м·с^2) и т.д.

Формула размерности

- **Формула размерности** – выражение единиц измерения какой-либо величины через основные единицы измерения (L, M, T, °T и т.д.).

  скорость $[\upsilon] = L^1 \cdot T^{-1} = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1}$;

  ускорение $[a] = L^1 \cdot T^{-2} = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$;

  сила $[F] = [m] \cdot [a] = M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$;

  объемный расход $[Q] = M^0 \cdot L^3 \cdot T^{-1}$;

  безразмерный параметр $[Б] = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$.

Формула размерности позволяет определить, во сколько раз изменится численное значение параметра **А**, если перейти от одной системы основных единиц измерения к другой, отличающейся масштабом основных единиц.

Новое числовое значение параметра А' будет определяться по формуле:

$$A' = k_1^{m_1} \cdot k_2^{m_2} \cdot k_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot k_n^{m_n} \cdot A$$

где $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ – масштабные коэффициенты новой системы измерения;

$m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ – показатели степени в формуле размерности.

Пример перевода величины из одних единиц измерения в другие

Задание:

$Q = 1000$ м^3/ч перевести в см^3/с.

Решение: $[Q] = \;= M^0 \cdot L^3 \cdot T^{-1}$;

$Q' = 1000 \cdot 1^0 \cdot 100^3 \cdot 3600^{-1} = 277777{,}78$ см^3/с.

Размерно-зависимые и размерно-независимые величины

Величина «а» размерно-зависима от величин a_1, a_2, …, a_n, если ее размерность [а] выражается через размерности $[a_1]$, $[a_2]$,…, $[a_n]$ формулой

$$[a] = [a_1]^{m1} \cdot [a_2]^{m2} \cdot \ldots \cdot [a_n]^{mn}, \qquad (*)$$

т.е. существуют такие числа m_1, m_2, …, m_n, что выполняется равенство (*).

Если таких чисел m_1, m_2, …, m_n не существует, говорят, что величина «а» размерно-независима от величин a_1, a_2, …, a_n.

<u>Примеры:</u>

- Параметры с размерностями времени, длины и массы размерно-независимы друг от друга.
- Скорость и плотность размерно-независимы друг от друга.

Основы теории подобия

- Два явления называются ***подобными***, если по заданным параметрам одного из них, аналогичные параметры другого определяются простым пересчетом.
- Необходимым и достаточным условием подобия двух явлений будет условие равенства безразмерных комплексов, определяющих эти явления П' = П, поэтому П1, П2,… Пn-k являются **критериями подобия**.
- Наиболее важные для подобия двух явлений переменные величины могут быть объединены в следующие группы:

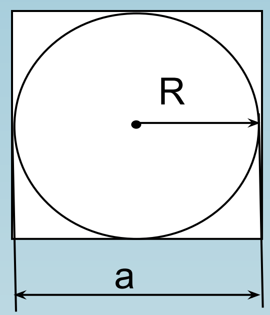
  геометрические;

  гидравлические или гидродинамические;

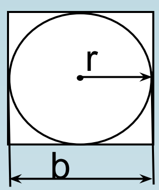
  тепловые;

  диффузионные и т.д.

Масштабный коэффициент



$$\frac{a}{b} = K$$



$$\frac{R}{r} = K$$

Геометрическое подобие 2-х систем характеризуется с помощью коэффициентов подобия, показывающих, во сколько раз нужно изменить все размеры одной из подобных систем, чтобы явления совпадали.

Константы подобия – величины, характеризующие отношения сходных размеров модели и промышленного образца (натуры).

Примеры подобных явлений

Течение жидкости в магистральном трубопроводе и в модельной установке, размеры которой уменьшены по сравнению с натурой, а также изменены параметры жидкости.

Воздействие взрывной волны на колонный аппарат и воздействие взрывной волны меньшей мощности на модель колонного аппарата, изготовленного из менее прочного материала, чем реальная колонна.

Теоремы подобия. Пи-теорема

Всякую физическую зависимость вида

$$A = f\,(a_1, a_2,\ldots,a_n)$$

между размерными величинами можно переписать в инвариантном виде (т.е. не зависящем от выбора единиц измерения), а именно, как зависимость

$$\Pi = f\,(\Pi_1, \Pi_2,\ldots, \Pi_{n-k})$$

между безразмерными комплексами, составленными из аргументов рассматриваемой зависимости. При этом число таких комплексов будет меньше числа аргументов исходной зависимости на число k, равное максимальному количеству размерно-независимых величин среди этих аргументов.

Алгоритм решения задач по П-теореме

1. Записать формулы размерности всех аргументов.
2. Выделить среди аргументов размерно-независимые величины (k).
3. Выяснить сколько безразмерных комплексов будут определять искомую зависимость.
4. Записать безразмерные комплексы.
5. По П-теореме составить безразмерную зависимость, которая будет характеризовать исследуемое явление.