

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**«Ижевский государственный технический университет  
имени М. Т. Калашникова»**



Кафедра «Мехатронные системы»

Курс «Механика роботов и мехатронных модулей»  
**Тема «Кинематический анализ и синтез  
МЕХАНИЗМОВ»**

Автор Зубкова Ю.В., к.т.н., доцент кафедры «Мехатронные системы»

# Основные понятия и определения

**Кинематический анализ механизма** - исследование его основных параметров с целью изучения законов изменения и на основе этого выбор из ряда известных наилучшего механизма.

**Целью кинематического анализа** является определение кинематических характеристик (траекторий, скоростей и ускорений характерных точек его звеньев) без учёта сил, вызывающих это движение.

При этом решают в основном **три задачи**:

- 1) определение перемещений звеньев и траекторий заданных точек;
- 2) определение скоростей точек звеньев и угловых скоростей звеньев;
- 3) определение ускорений точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

# Основные понятия и определения (продолжение)

Зависимость линейных координат в какой-либо точке механизма от обобщенной координаты – **линейная функция положения данной точки в проекциях на соответствующие оси координат.**

$$X_c = f(\phi_1)$$

Зависимость угловой координаты какого-либо звена механизма от обобщенной координаты – **угловая функция положения данного звена.**

$$\phi_2 = f(\phi_1)$$

•

$$\frac{dx_c}{d\phi_1} = V_{qcx} \quad \frac{dy_c}{d\phi_1} = V_{qcy} \quad \frac{dx_c}{dt} \cdot \frac{dt}{\phi_1} = V_{qcx} \quad \frac{dx_c}{dt} = V_c \quad \frac{V_{cx}}{\omega_1} = V_{qcx} \quad \frac{dt}{\phi_1} = \omega_1$$

Полная скорость т. С будет  $V_{cx} = \omega_1 \cdot V_{qcx}$   $V_{cy} = \omega_1 \cdot V_{qcy}$

$$V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2}$$

# Основные понятия и определения (продолжение)

Первая производная угловой функции положения звена по обобщенной координате – **передаточное отношение**

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \mathbf{u}_{2-1} \quad | \cdot \frac{dt}{dt} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \mathbf{u}_{2-1}$$

Вторая производная линейной функции положения по обобщенной координате – **аналог линейного ускорения точки в проекциях на соответствующие оси**

$$\frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2} = \mathbf{a}_{\text{qcx}} \quad \frac{d^2 y_c}{d\varphi_1^2} = \mathbf{a}_{\text{qcy}}$$

**Задание:** Запишите самостоятельно выражение аналога углового ускорения.

# Основные кинематические характеристики механизмов

## 1. Вид движения

## 2. Перемещение и траектория

- угловые,  $\varphi$ , рад
- линейные,  $S$ , м

## 3. Скорость (быстрота изменения перемещения во времени)

- угловая,  $\omega = d\varphi/dt$ , рад/с = 1/с
- линейная,  $v = dS/dt$ , м/с

## 4. Ускорение (быстрота изменения скорости во времени)

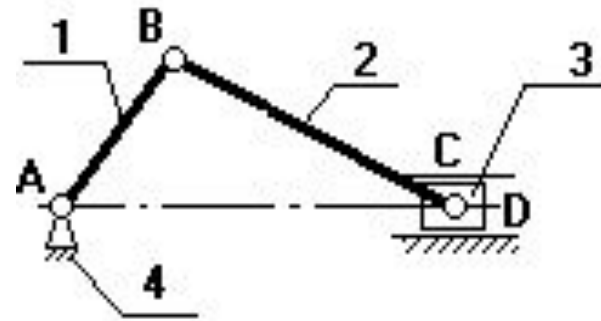
- угловое,  $\varepsilon = d\omega/dt$ , рад/с<sup>2</sup> = 1/с<sup>2</sup>
- линейное,  $a = dV/dt$ , м/с<sup>2</sup>

Движение любого звена может быть **периодическим и аperiodическим**

**Время цикла**  $T = 60/n = 2\pi/\omega$ , с,

где  $n$  – частота вращения кривошипа

$\omega$  – угловая скорость, 1/с



**Первая и основная задача кинематики** - определение функции положения.

Для пространственных механизмов наиболее эффективные методы решения:

- **векторный метод** (рычажные механизмы)
- **метод преобразования координат** (манипуляторы)

**Кинематический анализ механизма** проводят без учета сил, вызывающих его движение, **аналитическим** или **графическим** методом.

**Аналитический метод** позволяет установить в виде математического уравнения зависимость кинематических параметров механизма от размеров звеньев.

**Графический метод**, более простой, основан на непосредственном геометрическом построении планов положений механизма (наглядность).

# Аналитический способ определения кинематических параметров рычажных механизмов

Пример: кривошипно-ползунный механизм

Дано:  $\omega_1$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{AC}$

Определить:  $v_i$ ,  $a_i$ ,  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_2$ .

Условие замкнутости данного контура:

$$\bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} = \bar{l}_{AC} \quad (1)$$

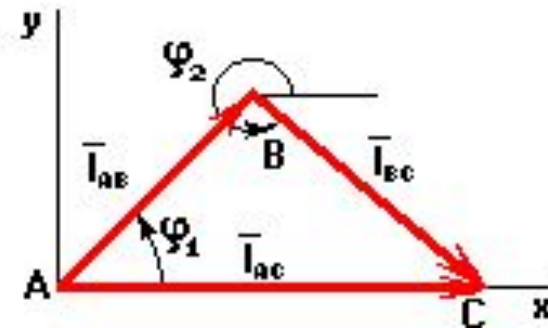
$$l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \varphi_2 = X_C \quad (2)$$

$$l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - l_{BC} \cdot \sin \varphi_2 = \underset{=0}{\overset{\times}{Y}_C} \quad (3)$$

Из (3) следует, что 
$$\varphi_2 = \arcsin \left( \frac{l_{AB} \cdot \sin \varphi_1}{l_{BC}} \right) \quad (4)$$

Продифференцируем (3) по обобщенной координате:

$$l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \varphi_2 \cdot \frac{d\varphi_2}{\underset{=0}{\overset{\times}{d\varphi_1}}} = \underset{=0}{\overset{\times}{v}_{\text{деу}}} \quad \frac{l_{AB} \cdot \cos \varphi_1}{l_{BC} \cdot \cos \varphi_2} = u_{2-1} \quad (5)$$



# Аналитический способ определения кинематических параметров рычажных механизмов (продолжение)

Продифференцируем (2) по обобщенной координате:

$$-l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - l_{BC} \cdot \sin \varphi_{21} \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = V_{qcx}$$

$$V_{cx} = \omega_1 \cdot V_{qcx}$$

$$V_{cy} = \omega_1 \cdot V_{qcy} = 0$$

$$V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2}$$

Условие замкнутости данного векторного контура имеет вид:

$$\bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BS_2} = \bar{l}_{AS_2} \quad (6)$$

$$l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BS_2} \cdot \cos \varphi_2 = x_{S_2} \quad (7)$$

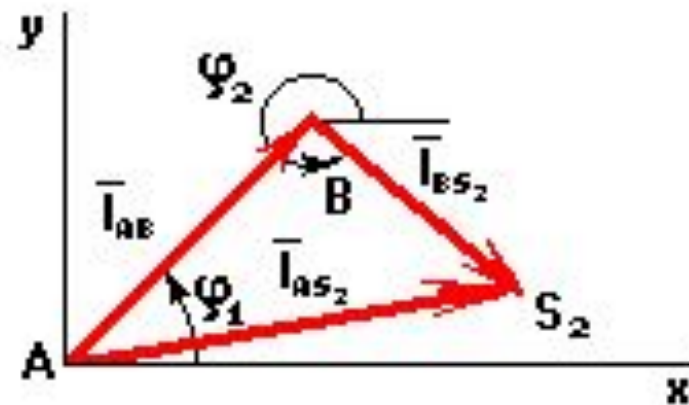
$$l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - l_{BS_2} \cdot \sin \varphi_2 = y_{S_2}$$

Продифференцировав (7) по обобщенной координате.

$$V_{s_2x} = \omega_1 \cdot V_{qs_2x} \quad (8)$$

$$V_{s_2y} = \omega_1 \cdot V_{qs_2y}$$

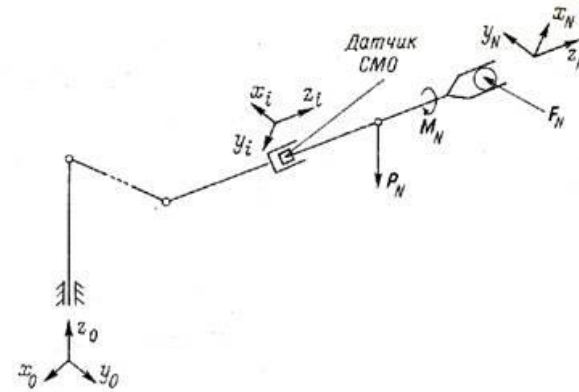
$$V_{s_2} = \sqrt{V_{s_2x}^2 + V_{s_2y}^2}$$





# Кинематический анализ манипулятора

**Целью кинематического анализа манипулятора** является определение положения, скорости и ускорения произвольной точки звена исполнительного механизма - схвата - в различных системах координат.



## Прямая задача

Найти закон изменения абсолютных координат выходного звена по заданным законам изменения относительных или абсолютных координат звеньев.

## Обратная задача

По заданному закону движения схвата найти законы изменения координат звеньев, обычно, линейных или угловых перемещений в приводах.

# Задачи кинематики

**Первая и основная задача кинематики** - определение функции положения.

Методы решения для пространственных механизмов:

- векторный метод
- метод преобразования координат (метод Денавита и Хартенберга)

Два вида **матриц**:

- матрицы ***M***, определяющие отношение между системами координат соседних звеньев;
- матрицы ***T***, определяющие положение и ориентацию каждого звена механизма в неподвижной или базовой системе координат.

Матрица перехода из *i*-ой системы координат в (*i*-1)-ю:

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos \varphi_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \varphi_i & \sin \varphi_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \theta_i \cdot \cos \varphi_i & -\cos \varphi_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \sin \varphi_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# Метод Денавита и Хартенберга

**Оси координат располагаются по следующим правилам:**

- Для звена  $i$  ось  $z_i$  направляется по оси кинематической пары, образуемой им со звеном  $(i+1)$ . Начало координат размещают в геометрическом центре этой пары.
- Ось  $x_i$  направляется по общему перпендикуляру к осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$  с направлением от  $z_{i-1}$  к  $z_i$ . Если оси  $z_{i-1}$  и  $z_i$  совпадают, то  $x_i$  перпендикулярна к ним и направлена произвольно. Если они пересекаются в центре кинематической пары, то начало координат располагается в точке пересечения, а ось  $x_i$  направляется по правилу векторного произведения (кратчайший поворот оси  $z_i$  до совмещения с  $z_{i-1}$  при наблюдении с конца  $x_i$  должен происходить против часовой стрелки).
- Ось  $y_i$  направляется так, чтобы система координат была правой.

Прямая задача кинематики о положениях решается с помощью следующей формулы:

$$R_0 = T_n \cdot R_n$$

где  $T_n$  - матрица, равная произведению матриц  $M_i$ :

$$T_n = M_1 M_2 \dots M_n$$

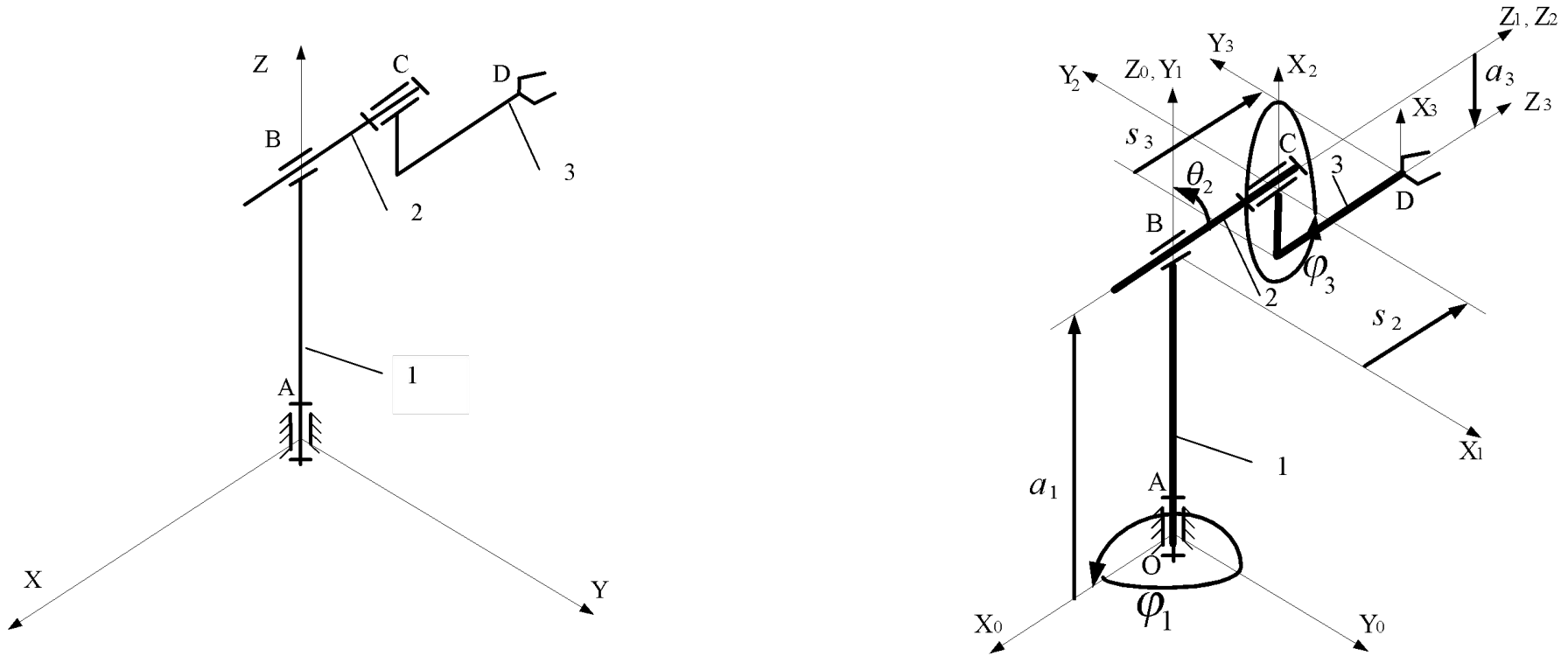
# Метод Денавита и Хартенберга (продолжение)

Согласно принятому методу, каждый переход включает в себя **последовательность четырех движений**: двух поворотов и двух параллельных переносов, осуществляемых в указанной последовательности:

- поворот вокруг оси  $z_{i-1}$  на угол  $\alpha_i$ , до тех пор, пока ось  $x_i$  не станет параллельной оси  $x_{i-1}$  (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора  $z_{i-1}$  против часовой стрелки);
- перенос вдоль оси  $x_i$  на величину  $-a_i$  до совмещения начала системы координат  $O_i$  с точкой пересечения осей  $x_i$  и  $z_{i-1}$  (отсчет по оси  $x_i$  от точки пересечения оси  $x_i$  и оси  $z_{i-1}$ );
- перенос вдоль оси  $z_{i-1}$  на величину  $-s_i$ , после которого начало системы координат  $O_i$  оказывается в начале координат  $O_{i-1}$  системы  $(i-1)$  (отсчитывается по оси  $z_{i-1}$  от ее начала координат  $O_{i-1}$  до точки ее пересечения с осью  $x_i$ );
- поворот  $i$ -ой системы вокруг оси  $x_i$  на угол  $\beta_i$  до параллельности осей  $z_i$  и  $z_{i-1}$  (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора  $x_i$  против часовой стрелки).

# Пример решения прямой задачи кинематики

Дана кинематическая схема трехзвенного манипулятора



Новая кинематическая схема,  
учитывающая изменение ориентации  
систем координат звеньев.

# Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Угол  $\theta_1 = 90^\circ$

$$a_3 = L_3'$$

$a_1 = L_1$

$$s_3 = L_3$$

$S_2 = L_2 + r_{23}$

## Тип и параметры кинематических пар

Кинематическая пара	Тип пары	Номер звена	Параметры			
			$\varphi_i$ , град	$s_i$ , м	$s_i$ , м	$a_i$ , град
0,1	В	1	$\varphi_{01}$	-		$90^\circ$
1,2	П	2	-		$L_2 + r_{23}$	-
2,3	В	3	$\varphi_{23}$		$L_3$	$L_3'$

# Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Матрицы перехода из системы  $O_i$  в систему  $O_{i-1}$  (в общем виде):

$$M_i = M_i^\theta \cdot M_i^a \cdot M_i^s \cdot M_i^\varphi$$

$$M_i^\theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ - матрица поворота вокруг оси } \mathbf{x}_i \text{ на угол } -\theta_i,$$

$$M_i^a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ - матрица переноса вдоль оси } \mathbf{x}_i \text{ на } -a_i,$$

$$M_i^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ - матрица переноса вдоль оси } \mathbf{z}_{i-1} \text{ на } -s_i,$$

$$M_i^\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & 0 \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ - матрица поворота вокруг оси } \mathbf{z}_{i-1} \text{ на угол } -\varphi_i.$$

# Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Расширенные матрицы перехода для каждого из сочленений, с учетом значений приведенных в таблице (слайд 14):

$$M_1 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{01} & 0 & \sin \varphi_{01} & L_1 \cdot \cos \varphi_{01} \\ \sin \varphi_{01} & 0 & -\cos \varphi_{01} & L_1 \cdot \sin \varphi_{01} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 + r_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{23} & \sin \varphi_{23} & 0 & L_3' \cdot \cos \varphi_{23} \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 & L_3' \cdot \sin \varphi_{23} \\ 0 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вектор-столбец значений  $R_3$ :

$$R_3 = \begin{vmatrix} L_1 + L_3' \cdot \cos \varphi_{23} \\ L_3' \cdot \sin \varphi_{01} \cdot \sin \varphi_{23} \\ \cos \varphi_{01} \cdot (L_2 + L_3 + r_{23}) \\ 1 \end{vmatrix}$$

Координаты положения схвата манипулятора для общего положения с учетом системы координат, м:

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4,25 \\ 1 \end{vmatrix}$$



# Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Положение некоторой произвольной точки  $M$  в системе координат звена  $i$  определяется вектором  $r_{Mi}$ , а в системе координат звена  $(i-1)$  - вектором  $r_{Mi-1}$ .

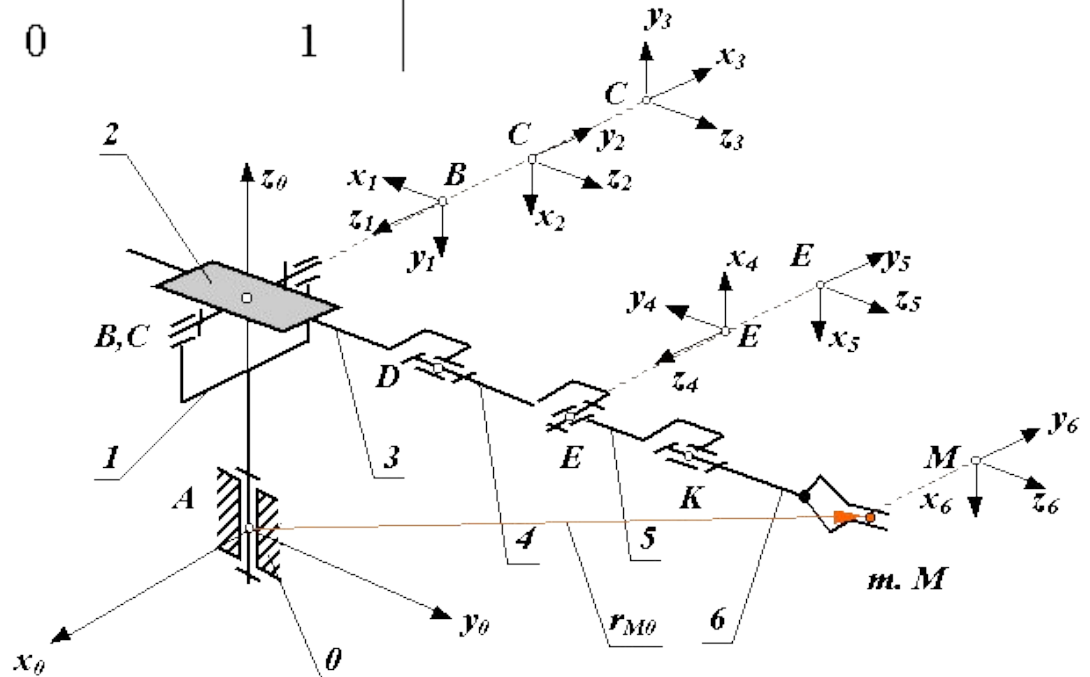
где  $\bar{r}_{Mi-1} = M_i \cdot \bar{r}_{Mi}$

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\varphi_i & \sin\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\theta_i \cdot \cos\varphi_i & -\cos\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \sin\varphi_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица перехода из  $i$ -ой системы координат в  $(i-1)$ -ю

Шестизвенный манипулятор  
в начальном положении

$$\bar{r}_{M0} = T_i \cdot \bar{r}_{Mi}$$



# Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Положение выходного звена манипулятора определяется матрицей  $T_n$ :

$$\bar{r}_{M0} = T_n = T_6$$

Углом подхода схвата  $\alpha$  называется угол между вектором подхода и базовым вектором  $\bar{A}$

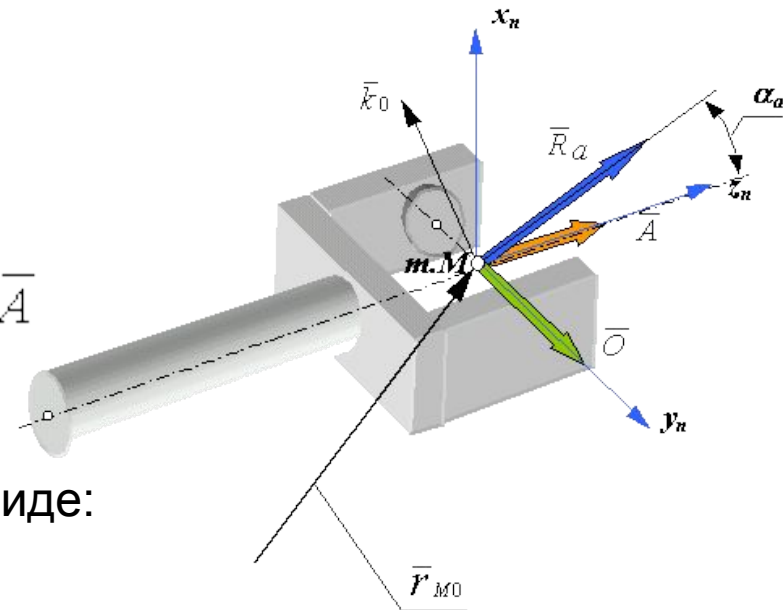
$$R_\alpha = (\bar{O} \times \bar{k}_0)$$

Тогда матрица  $T_n$  может быть представлена в виде:

$$T_n = \begin{vmatrix} (\bar{O} \times \bar{A})_x & O_x & A_x & r_{nMx} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_y & O_y & A_y & r_{nMy} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_z & O_z & A_z & r_{nMz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В механизме с  $n$  - подвижностями в общем виде функцию положения схвата можно записать так:

$$\bar{r}_{OM} = T_n \cdot \bar{A} = \bar{\Pi}(q_1, q_2, \dots, q_n),$$



# Кинематический анализ. Прямая задача

Необходимо определить линейные и угловые скорости и ускорения схвата при заданных угловых и линейных обобщенных скоростях и ускорениях.

Решение прямой задачи кинематики для точки  $M$  схвата можно получить продифференцировав четвертый столбец матрицы  $T_n$  по времени:

$$r_{nM} = \begin{vmatrix} r_{nMx} \\ r_{nMy} \\ r_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad V_{nM} = \frac{dr_{nM}}{dt} = \begin{vmatrix} V_{nMx} \\ V_{nMy} \\ V_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad a_{nM} = \frac{d^2 r_{nM}}{dt^2} = \begin{vmatrix} a_{nMx} \\ a_{nMy} \\ a_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix};$$

**Угловая скорость схвата:**

$$\bar{\omega}_n = \sum_{i=1}^m \bar{k}_{i-1} \cdot \omega_{i,i-1},$$

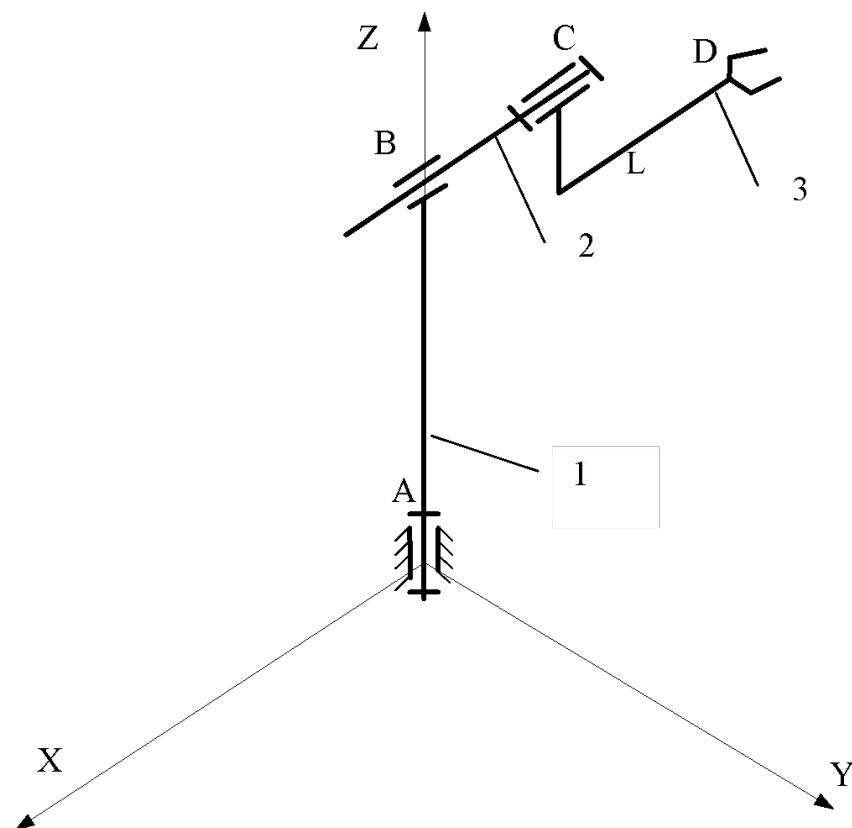
Дифференцируя это выражение по времени, получим формулу для определения **углового ускорения** схвата:

$$\bar{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^m \bar{k}_{i-1} \cdot \varepsilon_{i,i-1} + \sum_{j=2}^m \left[ \left( \sum_{k=i-1}^{m-1} \bar{k}_{k-1} \cdot \omega_k \right) \times \left( \bar{k}_{j-1} \cdot \omega_j \right) \right].$$

# Зона обслуживания манипулятора

**Зона обслуживания манипулятора** - часть пространства, соответствующая множеству возможных положений центра схвата манипулятора.

Звено	Длина, м		Угол поворота, град		Перемещение, мм	
	L	L'	Общ	Расч	Общ	Расч
1	2		360	-		
2	1,75				1,3	-
3	1,2	0,5	360	-		



# Зона обслуживания манипулятора (продолжение)

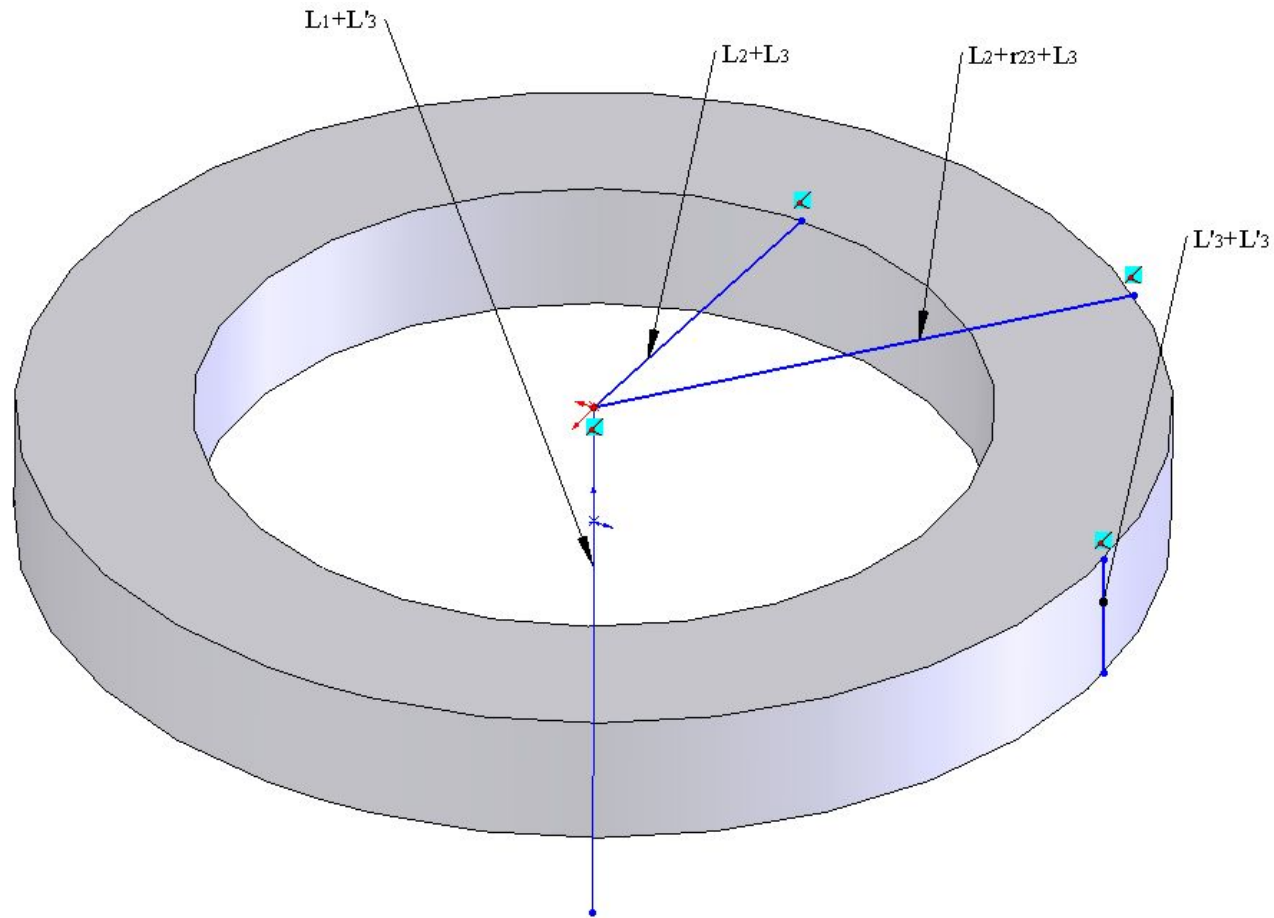
Координаты крайних положений схвата манипулятора с экстремальными значениями обобщенных координат

№ точки	Параметры			Координаты звена		
	$\varphi_{01}$ , град	$r_{12}$ , м	$\varphi_{23}$ , град	X, м	Y, м	Z, м
1	0	0	0	-2,95	0	1,5
2	0	0	180	2,95	0	2,5
3	0	1,3	0	-4,25	0	1,5
4	0	1,3	180	4,25	0	2,5
5	180	0	0	-2,95	0	1,5
6	180	0	180	2,95	0	2,5
7	180	1,3	0	-4,25	0	1,5
8	180	1,3	180	4,25	0	2,5

Обобщенный параметр второго звена  $m_3 = 1,2$

Длина плеча третьего звена  $M_3 = 0,5$

# Зона обслуживания манипулятора (продолжение)



Зона обслуживания трехзвенного манипулятора

# Графический метод решения задач кинематики

Графический метод основан на непосредственном **геометрическом построении планов** положений (скоростей, ускорений) механизма.

## Сущность метода:

- Параметры движения и схемы механизмов изображаются на чертежах условно при помощи масштабов.
- Графически может быть отображена любая величина (длина, скорость, ускорение, сила и т.д.).
- Применяется так называемый **вычислительный масштаб**

Например, **масштабный коэффициент длины АВ** равен

$$\mu = \frac{L_{AB} \text{ (м)}}{ab \text{ (мм)}}$$

# Метод построения планов скоростей и ускорений

Метод построения планов скоростей и ускорений базируется на теоремах **Архимеда**: скорость (ускорение) абсолютного движения точки представляют собой геометрическую сумму переносного (поступательного) и относительного (вращательного) движения:

$$\bar{V}_{ABC} = \bar{V}_{ПЕР} + \bar{V}_{ОТН}$$

$$\bar{a}_{ABC} = \bar{a}_{ПЕР} + \bar{a}_{ОТН} = \bar{a}_{ПЕР} + \bar{a}_{ОТН}^n + \bar{a}_{ОТН}^\tau$$

## Исходные данные для решения задачи:

- кинематическая схема манипулятора;
- размеры звеньев механизма;
- величина и направление скорости ведущего звена.

## Допущения:

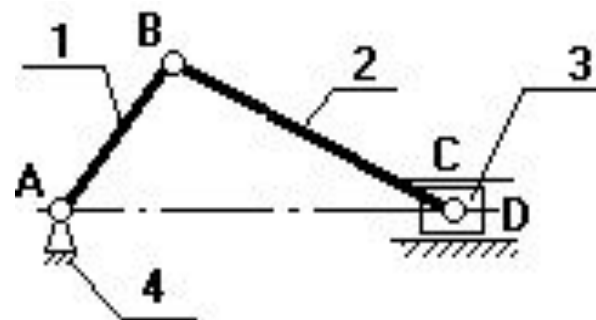
- звенья механизма считаем абсолютно жесткими;
- зазоры в кинематических парах отсутствуют.



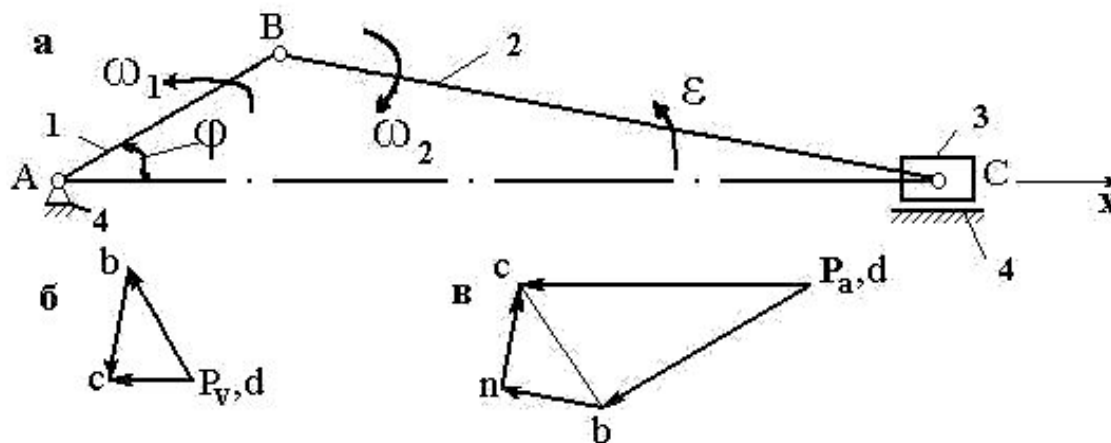
# Графический метод решения задач кинематики

Дано:

- Схема КПМ
- Размеры его звеньев  $L_{AB}$  и  $L_{BC}$ ,
- Угловая скорость кривошипа  $\omega_1 = \text{const}$



Кинематический расчет механизма (построение планов скоростей и ускорений)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad V_{BA} = \omega_1 \cdot l_{BA} \quad \vec{V}_{CB} \perp CB, \quad \vec{V}_D = 0, \quad \vec{V}_{CD} \parallel Cx. \quad V_C = P_{vC} \cdot \mu_v$$

# Графический метод решения задач кинематики (продолжение)

Векторное выражение ускорения точки В:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^i,$$

где  $\bar{a}_{BA}^n \parallel BA$ ,  $\bar{a}_{BA}^i \perp BA$ ,  $a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot l_{BA}$ ,  $a_{BA}^i = \varepsilon_1 \cdot l_{BA} = 0$ , так как  $\omega_1 = \text{const}$ .

Ускорение точки С получим в результате графического решения следующих векторных уравнений:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^i,$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^i,$$

где  $a_{CB}^n = V_{CB}^2 / l_{CB}$ ,  $a_{CB}^n \parallel CB$ ,  $a_{CB}^i \perp CB$ ,  $a_D = 0$ ,  $a_{CD}^i = 0$ ,  $a_{CD}^n \parallel Cx$ .

$$P_a b = a_{BA}^n / \mu_a \quad bn = a_{CB}^n / \mu_a, \quad a_c = P_a c \cdot \mu_a, \quad a_{CB}^i = nc \cdot \mu_a.$$

$$\varepsilon_2 = a_{CB}^i / l_{CB}$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях

Определение абсолютных величин линейных скоростей и ускорений точек звеньев манипулятора и абсолютных угловых скоростей и ускорений звеньев, при заданных относительных величинах.

$X_0Y_0Z_0$  - базовая система координат

## Тензорно-матричный метод

Таблица расчётных данных

Звено	Длина, м		Угол поворота, град		Перемещение, мм		$\varepsilon, c^{-2}$	$\omega, c^{-1}$	$a_m/c^2$	$v_m/c$
	L	L'	Общ	Расч	Общ	Расч				
1	0,5		-	30			0,2	0,5		
2	0,4				-	0,1			0,1	0,5
3	0,1	0,1	-	60			0,2	0,5		

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

## Определение угловых скоростей и ускорений

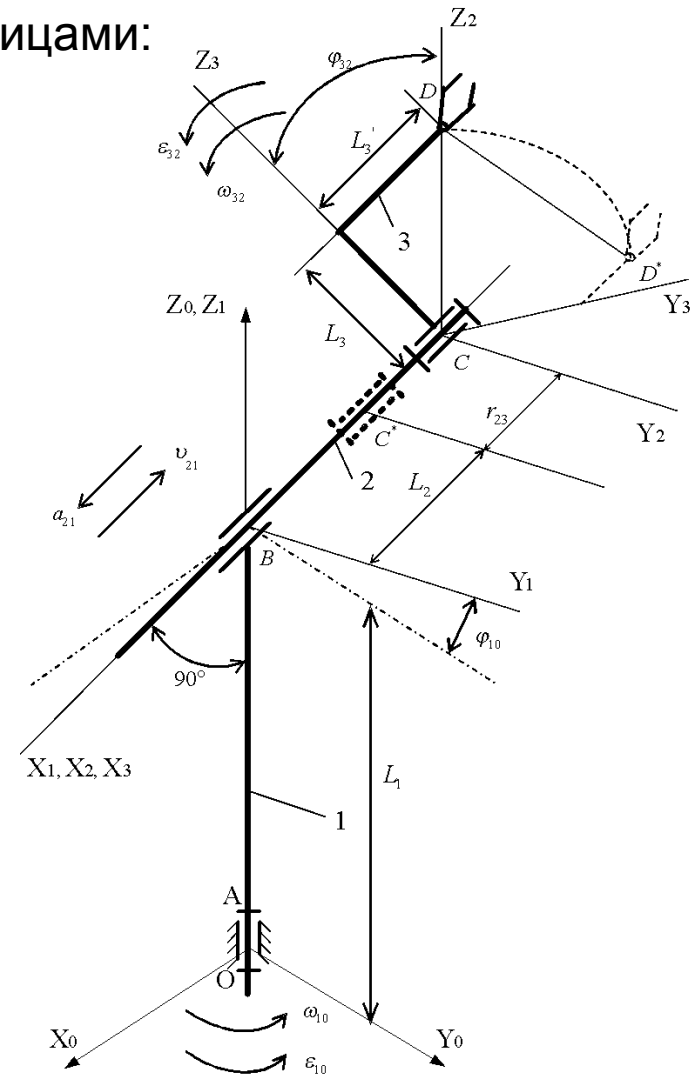
Проекции единичных векторов описываются матрицами:

$$e_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; e_C = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8660 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \end{pmatrix}$$

Для звена 1 векторы угловой скорости и углового ускорения:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,2000 \end{pmatrix}$$



## Относительные кинематические параметры трехзвенного манипулятора

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Для звена 2 угловая скорость и ускорение:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}; \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21}, \end{aligned} \right\}$$

а так как  $\bar{\omega}_{21} = 0$  и  $\bar{\varepsilon}_{21} = 0$ , то получим  $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1$ .

Векторы относительной угловой скорости и относительного углового ускорения (закон вращения звена 3 относительно звена 2):

$$\bar{\omega}_{32} = \bar{e}_C |\omega_{32}|; \quad \bar{\varepsilon}_{32} = \bar{e}_C |\varepsilon_{32}|,$$

а соответствующие им матрицы записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{32} &= \begin{vmatrix} \omega_{32} \cos \varphi_{10} \\ \omega_{32} \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4330 \\ 0,2500 \\ 0,0000 \end{vmatrix} \\ \varepsilon_{32} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{32} \cos \varphi_{10} \\ \varepsilon_{32} \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1730 \\ 0,1000 \\ 0,0000 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Векторные уравнения угловой скорости и углового ускорения третьего звена:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{32} \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_{32} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_{32} \end{aligned} \right\}$$

В эти уравнения входит векторное произведение  $\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_{32}$ , которое, как и произведение любых двух векторов, описываемых матрицами

$$a_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix},$$

в общем виде превращается в вектор с матрицей:

$$a_n \times a_m = \begin{pmatrix} y_n z_m - z_n y_m \\ z_n x_m - x_n z_m \\ x_n y_m - y_n x_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица-столбец вектора:

$$\omega_2 \times \omega_{32} = \begin{pmatrix} -\omega_{10} \omega_{32} \sin \varphi_{10} \\ \omega_{10} \omega_{32} \cos \varphi_{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1250 \\ 0,2165 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы угловой скорости и углового ускорения третьего звена:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \begin{vmatrix} \omega_{32} \cos \varphi_{10} \\ \omega_{32} \sin \varphi_{10} \\ \omega_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4330 \\ 0,2550 \\ 0,5000 \end{vmatrix}; \\ \varepsilon_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{32} \cos \varphi_{10} - \omega_{10} \omega_{32} \sin \varphi_{10} \\ \varepsilon_{32} \sin \varphi_{10} + \omega_{10} \omega_{32} \cos \varphi_{10} \\ \varepsilon_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0482 \\ 0,3165 \\ 0,2000 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Модули векторов угловой скорости и углового ускорения:

$$|\omega_3| = 0,7070 \text{ c}^{-2}, \quad |\varepsilon_3| = 0,3775 \text{ c}^{-2}$$

## Определение линейных скоростей и ускорений

Запишем матричные уравнения:

$$OB = L_{01}; \quad BC = A_{01} L_{12}; \quad CD = A_{01} (A_{23} r_{D_3}),$$

Столбец координат в системе  $\mathcal{M}_3 Y_3 Z_3$ , ;

$$r_{D_3} = \begin{vmatrix} x_{D_3} \\ y_{D_3} \\ z_{D_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L_3' \\ 0 \\ L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,200 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix},$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы переноса соответственно от систем координат 1 к 0 и 2 к 1:

$$L_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix}, \quad L_{12} = \begin{vmatrix} -(L_2 + r_{23}) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрицы поворота при переходе, соответственно, от систем координат 1 к 0 и 3 к 2:

$$A_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8660 & -0,5000 & 0,0000 \\ 0,5000 & 0,8660 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{vmatrix}$$
$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} \\ 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & -0,8660 \\ 0,0000 & 0,8660 & 0,5000 \end{vmatrix}$$



# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Таким образом, получаем матрицы:

$$\left. \begin{aligned} OB &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix}; \\ BC &= \begin{vmatrix} -L_2 \cos \varphi_{10} \\ -L_2 \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,4330 \\ -0,2500 \\ 0,0000 \end{vmatrix}; \\ CD &= \begin{vmatrix} -L_3' \cos \varphi_{10} + L_3 \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{32} \\ -L_3' \sin \varphi_{10} - L_3 \cos \varphi_{10} \sin \varphi_{32} \\ L_3 \cos \varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0433 \\ -0,1250 \\ 0,0500 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Модули соответствующих векторов:

$$|OB|=0,5000 \text{ м}; |BC|=0,5000 \text{ м}; |CD|=0,1414 \text{ м}.$$

Скорость точки В:

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{\omega}_1 \times \overline{OB}. \\ \bar{v}_B &= 0 \end{aligned}$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Векторное уравнение для определения скорости точки С:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC}$$

Относительная скорость:  $\bar{v}_{21} = -\bar{e}_C |v_{21}|$

тогда в матричной форме: 
$$\bar{v}_{21} = \begin{vmatrix} -v_{21} \cos \varphi_{10} \\ -v_{21} \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,95 \\ -0,2500 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы-вектора  $\bar{\omega}_2 \times \overline{BC}$  : 
$$\bar{\omega}_2 \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \omega_{10} L_2 \sin \varphi_{10} \\ -\omega_{10} L_2 \cos \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1250 \\ -0,2165 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Линейная скорость точки С: 
$$\bar{v}_C = \begin{vmatrix} -v_{21} \cos \varphi_{10} + \omega_{10} L_2 \sin \varphi_{10} \\ -v_{21} \sin \varphi_{10} - \omega_{10} L_2 \cos \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,3080 \\ -0,4665 \\ 0,0000 \end{vmatrix},$$

Модуль скорости:  $|v_C|=0,5990$  м/с.

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Скорость точки D:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_3 \times \overline{CD}$$

Матрица-столбец вектора  $\bar{\omega}_3 \times \overline{CD}$ :

$$\bar{\omega}_3 \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} L_3 (\omega_{32} \sin \varphi_{10} \cos \varphi_{32} + \omega_{10} \cos \varphi_{10} \sin \varphi_{32}) + L'_3 \omega_{10} \sin \varphi_{10} \\ L_3 (\omega_{10} \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{32} - \omega_{32} \cos \varphi_{10} \cos \varphi_{32}) - L'_3 \omega_{10} \cos \varphi_{10} \\ -L_3 \omega_{32} \sin \varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0750 \\ -0,0433 \\ -0,0433 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора  $\bar{v}_D$  :  $\bar{v}_D = \begin{vmatrix} -0,2330 \\ -0,5098 \\ -0,0433 \end{vmatrix}$

$$|v_D| = 0,5622 \text{ м/с.}$$

Таким образом, определены значения линейных скоростей всех звеньев манипулятора.

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Ускорение точки В:

$$\bar{a}_B = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{OB}) + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{OB}$$

$$\bar{a}_B = 0$$

Ускорение точки С:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB} = \bar{a}_{21} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BC}) + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} + 2(\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{21}).$$

где  $\bar{a}_{21} = \bar{e}_C |a_{21}|$ ,

$$\bar{a}_{21} = \begin{vmatrix} a_{21} \cos \varphi_{10} \\ a_{21} \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0866 \\ 0,0500 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица векторного произведения  $\bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BC})$ :

$$\bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BC}) = \begin{vmatrix} \omega_{10}^2 L_2 \cos \varphi_{10} \\ \omega_{10}^2 L_2 \sin \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1082 \\ 0,0625 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы векторного произведения  $\bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC}$  :

$$\bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{10} L_2 \sin \varphi_{10} \\ -\varepsilon_{10} L_2 \cos \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0500 \\ -0,0866 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора ускорения Кориолиса:

$$2(\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{21}) = \begin{vmatrix} 2\omega_{10} v_{21} \sin \varphi_{10} \\ -2\omega_{10} v_{21} \cos \varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2500 \\ -0,0433 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора линейного ускорения точки С:

$$\bar{a}_C = \begin{vmatrix} 0,4948 \\ -0,4071 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Модуль вектора ускорения:  $|a_C| = 0,6407 \text{ м/с}^2$ .

# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Ускорение точки D:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC} = \bar{a}_C + \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{CD}) + \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{CD},$$

Векторные произведения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{CD}) &= \begin{vmatrix} 0,0108 \\ 0,0562 \\ -0,0375 \end{vmatrix} \\ \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{CD} &= \begin{vmatrix} 0,0408 \\ -0,0111 \\ 0,0077 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Матрица-столбец вектора линейного ускорения точки D:

$$\bar{a}_D = \begin{vmatrix} 0,5464 \\ -0,3620 \\ -0,0298 \end{vmatrix}$$

Модуль ускорения точки D:

$$|a_D| = 0,6561 \text{ м/с}^2$$

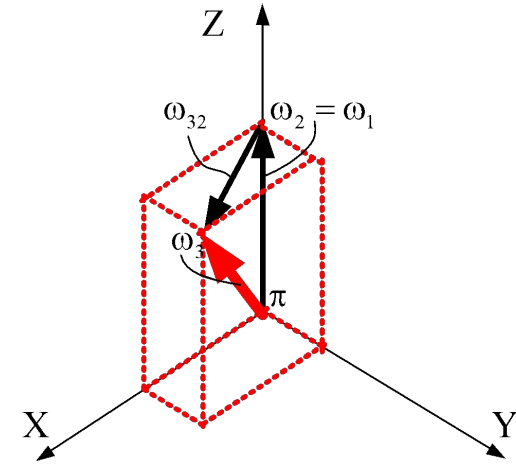
# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

## Метод планов

### 1. План угловых скоростей

Масштаб угловой скорости =  $\mu_\omega = 0,01 \frac{c^{-1}}{мм}$

$$\omega_{32} = 0,5c^{-1}$$



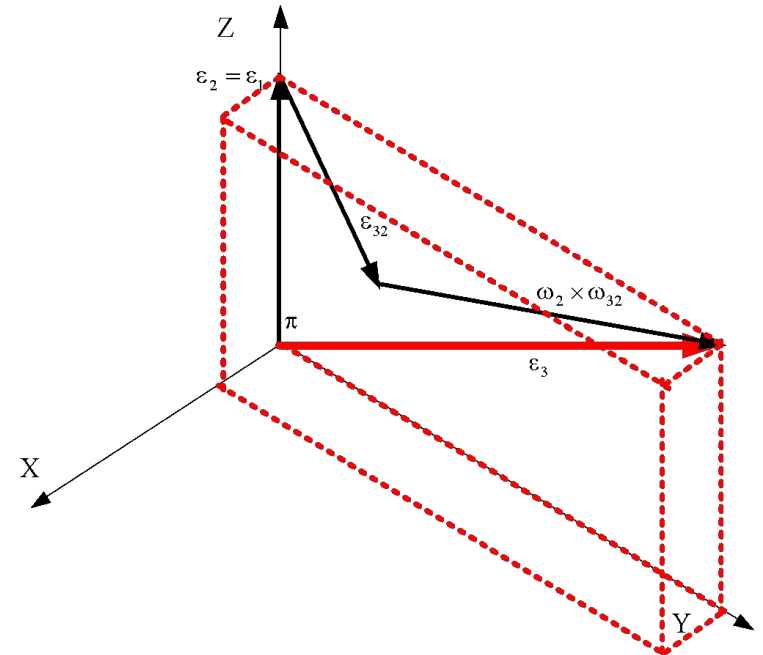
### 2. План угловых ускорений

Масштаб углового ускорения =  $\mu_\varepsilon = 0,005 \frac{c^{-2}}{мм}$

$$\varepsilon_1 = 0,2(c^{-2})$$

Угловое ускорение третьего звена:

$$\bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_{32} + \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_{32}$$

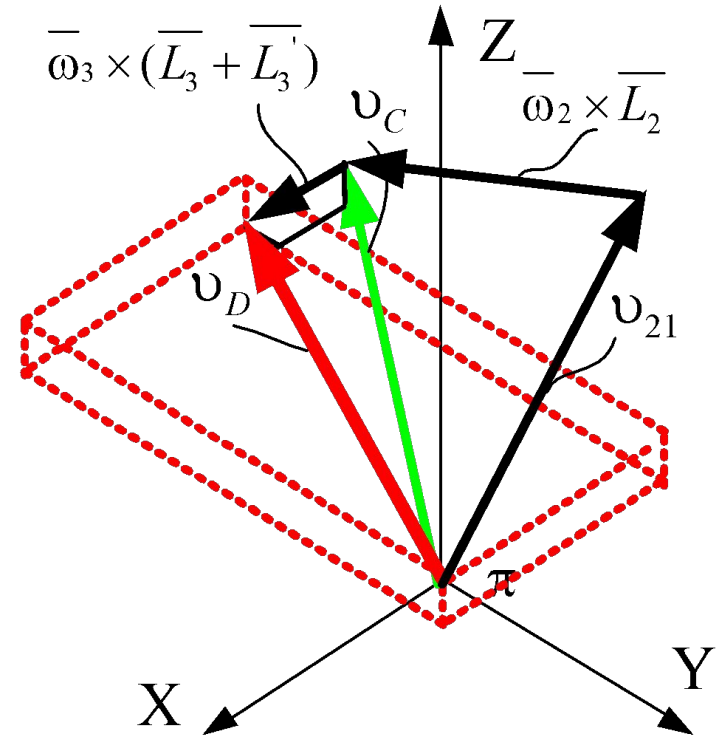


# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

## 3. План линейных скоростей

Масштаб плана скоростей:  $\mu_v = 0,01 \frac{м/с}{мм}$

$$\omega_C^{\omega} = \omega_2 \cdot L_2 = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 ( / )$$



## 4. План линейных ускорений

Масштаб плана ускорений:  $\mu_a = 0,01 \frac{м/с^2}{мм}$

$$a_C = \cancel{a_D} + a_C^n + a_C^\tau + a_C^r + a_C^k$$

$$\omega_{21} \in 0,1 / ^2$$

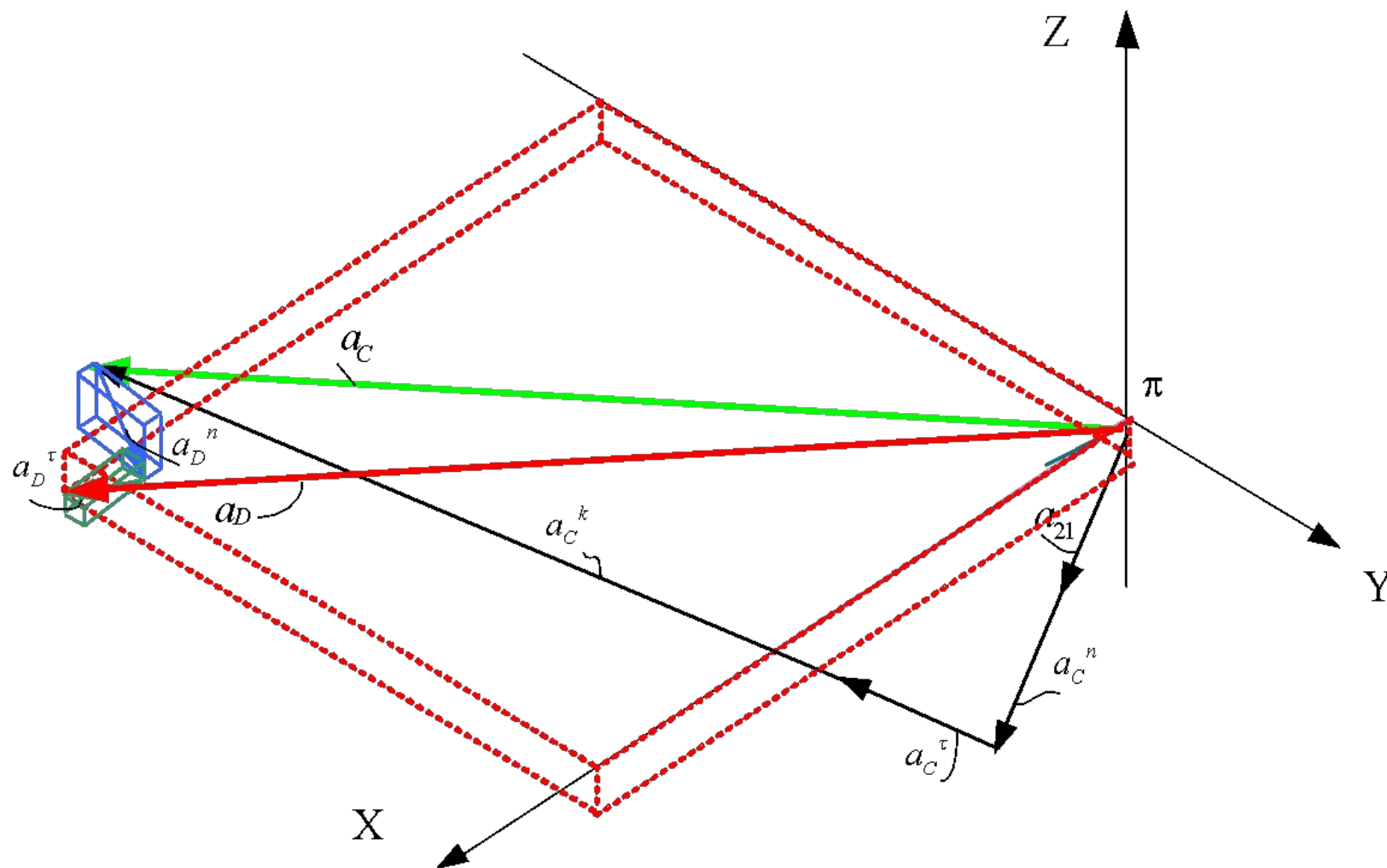
$$\omega_C^n = \omega_2^2 \cdot L_2 = 0,5^2 \cdot 0,4 = 0,1 ( / ^2 )$$

$$\omega_C^\tau = \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 ( / ^2 )$$

$$\omega_C^k = 2(\omega_2 \times v_{21}) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5 ( / ^2 )$$



# Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)



**Кинематический синтез механизма** – проектирование нового механизма.

**Этапы кинематического синтеза:**

1. Выбор схемы механизма в соответствии с заданными условиями и чаще всего по аналогии с существующими механизмами.
2. Установление основных размеров механизма, наиболее полно удовлетворяющие поставленным условиям.
3. Конструктивное оформление механизма, его кинематическое и силовое исследование.
4. Расчет звеньев на прочность.

**Синтез** осуществляется при заданных скоростях, ускорениях, действующих силах, напряжениях или деформациях.

При этом требуется определить необходимые размеры звеньев, их форму и массу.

При синтезе часто решается задача оптимального проектирования конструкции, когда находятся необходимые показатели работы машины при наименьших затратах труда.

## **Основные этапы создания новой конструкции:**

- 1) Разработка принципиальной схемы;
- 2) Проектирование и расчет машины и отдельных ее узлов;
- 3) Экспериментальные исследования и доводка опытного образца.

## **Основные этапы проектирования новой техники:**

- а) разработка технического задания, включающего основные исходные данные;
- б) разработка эскизного проекта, включающего выбор схемы и компоновку основных узлов конструкции;
- в) разработка технического проекта, где осуществлены основные расчеты и представлены сборочный чертеж и др. документация.

# Заключение

**Кинематический анализ механизма** - исследование его основных параметров с целью изучения законов изменения перемещения, скорости и ускорения.

**Целью кинематического анализа** является определение кинематических характеристик механизма без учёта сил, вызывающих это движение.

При этом решаются **прямая и обратная задачи кинематики (о положениях, скоростях, ускорениях)**.

Два основных метода:

- аналитический;
- метод планов.

**Зона обслуживания манипулятора** - часть пространства, соответствующая множеству возможных положений центра схвата манипулятора.

**Кинематический синтез** представляет собой метрический синтез. Здесь определяются размеры звеньев механизма, при которых удовлетворяются поставленные требования.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**

© ФГБОУ ВО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2017

© Зубкова Юлия Валерьевна, 2017