# Механика
# Техническая механика

- Техническая механика – комплексная дисциплина, включающая в себя три раздела:
- «Теоретическая механика»
- «Сопротивление материалов»
- «Детали машин»

## Введение

- В разделе **«Теоретическая механика»** изучаются основные законы движения твердых тел и их взаимодействие.
- В разделе **«Сопротивление материалов»** изучают основы прочности материалов и методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при действии внешних сил.
- В разделе **«Детали машин»** рассматриваются основы конструирования и расчета деталей и

- **Рекомендуемая литература**
- 1. **Тарг С.М.** Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 2001 (2008).
- **Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.** Сопротивление материалов. Учебное пособие для вузов. Издание 3.- М.: Высш. шк., 2003.
- 2. **Олофинская В.П.** Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: учеб. пособие / В.П. Олофинская. – 3-е изд., испр. – М.:ФОРУМ, 2012.
- **Ерохин М.Н.** Детали машин и основы конструирования.- М.: «КолосС».- 2004.
- **Батурин А.Т.** Детали машин. Учебник для машиностроительных техникумов. Издание 6-е стереотипное.- М.: «Машиностроение».- 1971.
- **Березовский Ю.Н.** Детали машин для техникумов.- М.: «Маш-ение».-1983.
- 3. **Олофинская В.П.** Детали машин. Краткий курс и тестовые задания: учеб. пособие / В.П. Олофинская. - 2-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ, 2010.

# Теоретическая механика.

**Теоретическая механика** изучает основные законы движения твердых тел и их взаимодействие.

- ***Механическим движением*** называется происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.
- Под ***механическим взаимодействием*** понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). За основную меру этих действий принимают величину, называемую ***силой*.**
- **Основной задачей** теоретической механики является изучение движения материальных тел под действием сил.

- По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику разделяют на статику, кинематику и динамику.
- **В *статике*** излагается учение о силах и условиях равновесия материальных тел под действием сил.
- **В *кинематике*** – общие геометрические свойства движения тел.
- **В *динамике*** изучается движение материальных тел под действием сил.
- В классической механике **все вводимые исходные положения и понятия являются научными моделями.**

- ТМ, в отличие от физики, изучает з-ны движения абстрактных абсолютно твердых тел, здесь материалы, форма тел существенного значения не имеют. При движении абсолютно твердое тело не деформируется и не разрушается. В случае, когда размерами тела можно пренебречь, тела заменяют материальной точкой.

- ***Основные абстрактные модели*** реальных тел:
- ***материальная точка*** – имеет массу, но не имеет размеров;
- ***абсолютно твёрдое тело*** – объём конечных размеров, заполненный веществом, причём расстояния между любыми двумя точками не изменяются во время движения;
- Из них – ***системы***:
- - система свободных материальных точек; если при движении системы материальных точек расстояние между точками остаются постоянными, то такая система материальных точек называется **неизменяемой системой**;
- - системы со связями;
- ***«Вырожденные» модели***:
- - бесконечно тонкие стержни;
- - бесконечно тонкие пластины;
- - невесомые стержни и нити, связывающие между собой материальные точки, и т.д.

6. Введение.

Положение объекта относительно другого физического тела (например, Земли) определяется при помощи выбранной системы координат

# ***Система отсчета*. Система декартовых прямоугольных координат.**

***Инерциальная система отсчёта*** – такая, собственное движение которой не может быть обнаружено никаким механическим опытом.

- Все системы отсчёта, движущиеся относительно исходной прямолинейно и равномерно, будут инерциальными. Это позволяет ввести единую декартовую систему координат.
- Условное соглашение – берут правую систему координат (рис. 1).

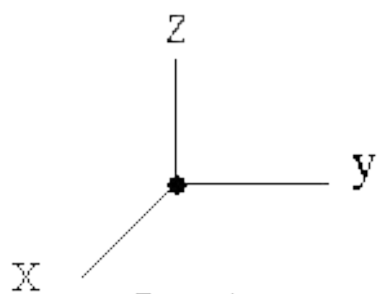


Рис. 1.

- ***Время –абсолютно***, единое для всех систем отсчёта, то есть начальный момент – произволен.
- *Состояние движения тел в момент времени t определяется координатами и скоростями точек в этот момент.*

- ***Статикой*** называется часть механики, где изучаются условия, которым должны удовлетворять силы, действующие на систему материальных точек, для того чтобы система находилась в равновесии.

- **Сила** – это мера механического взаимодействия материальных тел между собой, способного вызвать движение тел из состояния покоя или изменить существующее движение тел.

- Совокупность сил, приложенных к данному твердому телу, называется ***системой сил.***

- Система материальных точек находится **в *равновесии***, если, будучи в покое, она не получает никакого движения от сил, на неё действующих. В этом случае система сил, приложенных к ней, называется ***уравновешивающей***, а силы в системе ***взаимно уравновешенными***.
- Две системы сил, приложенных к телу, называются ***эквивалентными***, если они взаимозаменяемы без нарушения покоя тела или изменения его движения**.**
- Из повседневного опыта: силы имеют ***векторный характер***, то есть величину (*модуль*), направление, линию действия, точку приложения.
- Условие равновесия сил, действующих на твёрдое тело, сводится к свойствам систем векторов.
- Если в характеристике величины направление не имеет значение, то эта величина называется *скалярной (объем тела, температура).*

9. Статика. Аксиомы.

*Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, называемых аксиомами. Аксиомы, устанавливающие общие закономерности механического движения, созданы в результате обобщения человеческого опыта.*

***Аксиома 1.*** *Под действием уравновешивающей системы сил абсолютно твердое тело или материальная точка находятся в равновесии или движутся равномерно и прямолинейно.*

***Аксиома 2***. Две силы, приложенные к твёрдому телу, *взаимно уравновешиваются* тогда и только тогда, когда они равны по величине, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой.

- ***Аксиома 3***. Действие на твёрдое тело системы сил не изменится, если *добавить к этой системе или отбросить от неё* две силы, равные по величине, направленные в противоположные стороны и

- ***Следствие .*** Силу, действующую на точку твёрдого тела, можно переносить вдоль линии действия силы без изменения равновесия (то есть, сила является **скользящим вектором**, рис.2).

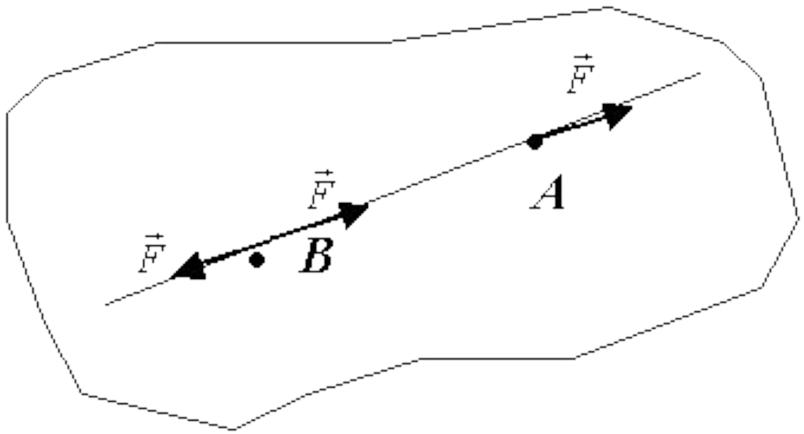
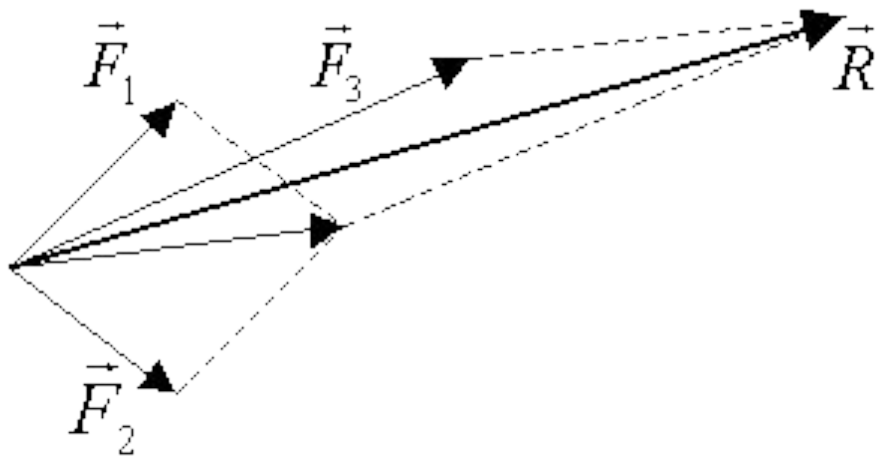



Рис.2.

- ***Аксиома 4***. Действие на точку твёрдого тела нескольких сил равносильно действию одной ***равнодействующей силы,*** строящейся по правилу сложения векторов (рис.4).
-
-
-
- Рис. 4.




- ***Следствие***. Силы, приложенные к точке твердого тела, складываются по *правилу параллелограмма*.
-

- ***Аксиома 5.*** Если деформируемое (не абсолютно твердое) тело, находящееся под действием сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым (отвердеет), то его равновесие не нарушится (**принцип отвердевания**).

- Из этого закона следует, что условия, которым должны удовлетворять при равновесии силы, приложенные к абсолютно твердому телу, необходимо соблюдать и при равновесии тела деформируемого. Поэтому этот закон устанавливает связь между статикой абсолютно твердого тела и статикой деформируемых тел.

- Действие одного тела на другое никогда не может быть односторонним: мы всегда наблюдаем ***взаимодействие*** материальных тел.

- ***Две категории сил***:
- 1) Активные - создают или способны создать движение твёрдого тела. Например, сила тяжести.
- 2) Пассивные – не создающие движения, но ограничивающие перемещения твёрдого тела, препятствующие перемещениям. Например, сила натяжения нерастяжимой нити (рис.7).

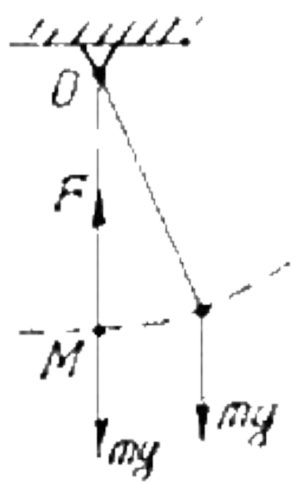



Рис.7.

***Аксиома 6.*** Действие одного тела на второе равно и противоположно действию этого второго тела на первое (***действие равно противодействию*)**. Например, Земля и Луна.

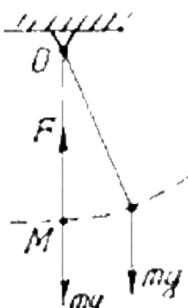
- **Важно** - действие и противодействие представляют собой две силы, приложенные к двум разным телам. Поэтому нельзя сказать, что эти две силы уравновешиваются.

- Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют другие  тела, скрепленные или соприкасающиеся с ним, называются ***несвободными , или связанными***. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называется ***связью***.
- Силы, обусловленные связями и препятствующие перемещениям, называются ***силами реакций связи*** или ***реакцией связи.*** Направлена реакция связи всегда с  той стороны, куда связь не дает перемещаться телу.
- Принцип освобождения от связей.

- ***Аксиома 7.*** Связи, наложенные на систему материальных точек, можно заменить силами реакций, действие которых эквивалентно действию связей.

- **Типы связей:**
- **1. Связь – гладкая опора** (без трения) – реакция опоры приложена в точке опоры и всегда направлена перпендикулярно опоре.

- **2. Гибкая связь** (нить, веревка, трос, цепь) – подвешен груз. Реакция направлена вдоль нити от тела, нить растянута.

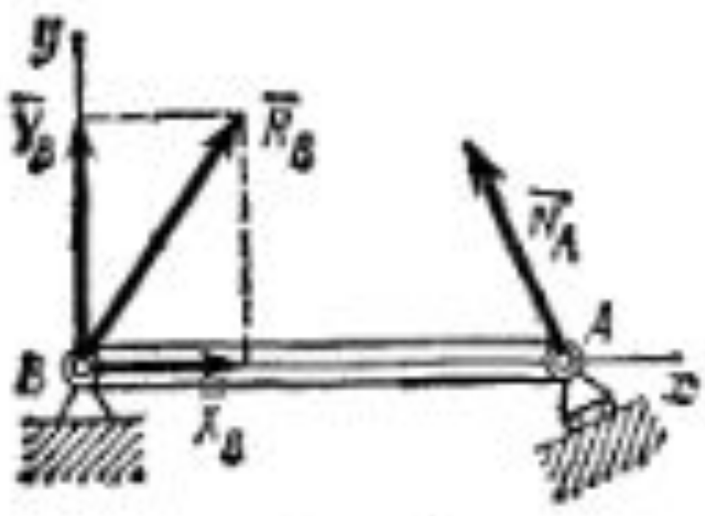



- **3. Жесткий стержень –** стержень может быть сжат или растянут. Реакция стержня направлена вдоль стержня.

- **4. Шарнирная опора.** Шарнир допускает поворот вокруг точки закрепления. Различают два вида шарниров:

- - **подвижный шарнир** (опора А). Стержень, закрепленный на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей (площадки).
- *Реакция* $\overline{N}_A$ направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперек опорной поверхности.

Реакция $\overline{N}_A$ опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.



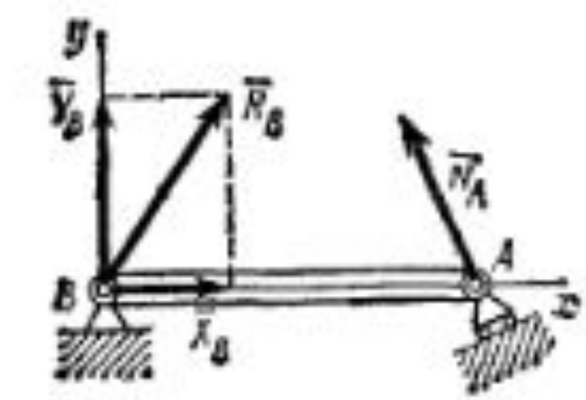
Связи

- \- **неподвижный шарнир** (опора B).

- Стержень может свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. *Реакция опоры* $\overline{R}_B$ проходит через ось шарнира, но неизвестна по направлению.

- Реакцию разлагают на составляющие $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$ по направлению координатных осей. Реакция по модулю определится:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$$

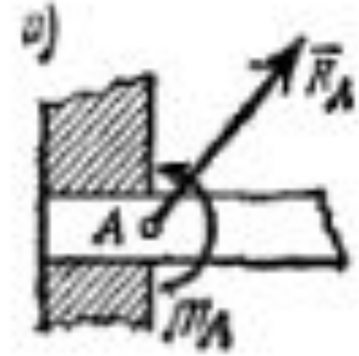



Способ закрепления применяется для того, чтобы исключить возможные напряжения от действия температуры или изгиба.

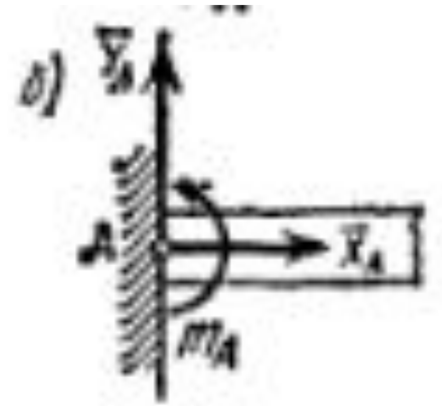
## 5. Защемление , или «заделка».

Любые перемещения точки крепления невозможны.

Под действием внешних сил в опоре возникают *реактивная сила* и *реактивный момент,* препятствующий повороту.





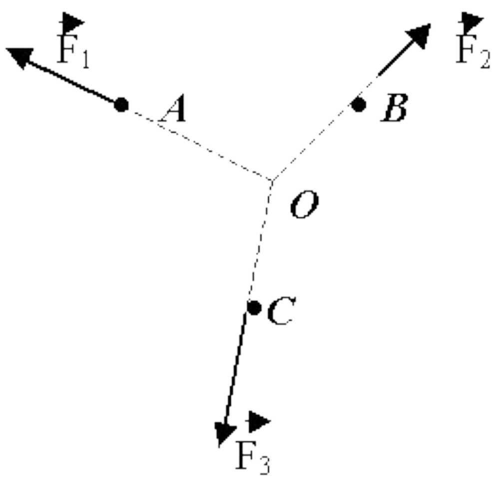


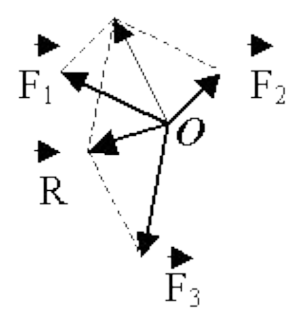


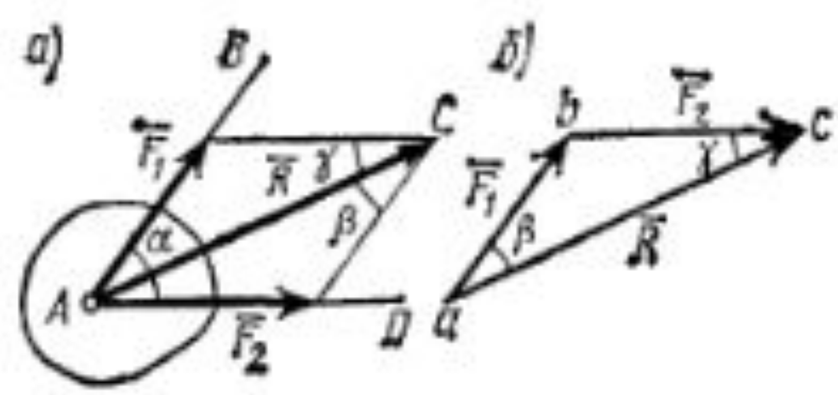
$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$$

 **Система сходящихся сил.**

- ***1. Определение равнодействующей геометрическим способом***
- **А. Сложение сил.**
- *Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется* ***сходящейся.***




- *Рис. 8.* *Следствие 2 и 3 аксиом.* *4-я аксиома.* *Рис. 9.*

- ***Плоская задача***. Геометрическая сумма двух сил находится по правилу параллелограмма (рис. 9).

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k$$

- ***Объемная задача***. Геометрическая сумма трех сил , не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (рис. 10).

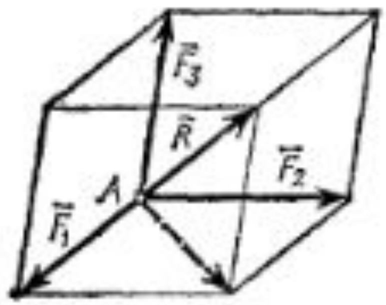
- 

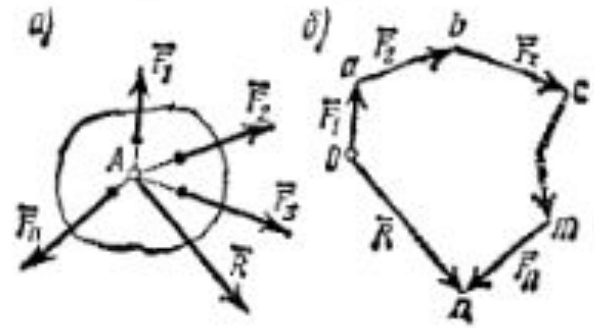
Рис. 10.


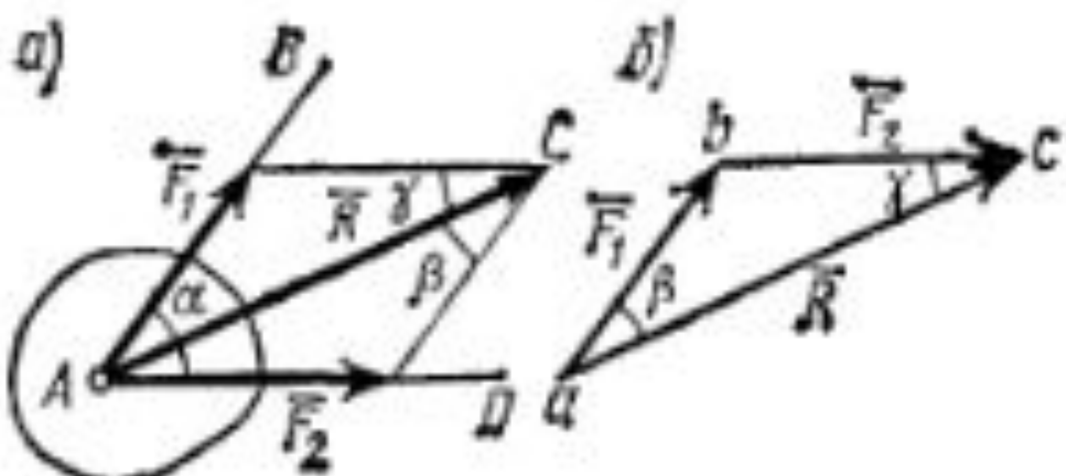
Рис.11.

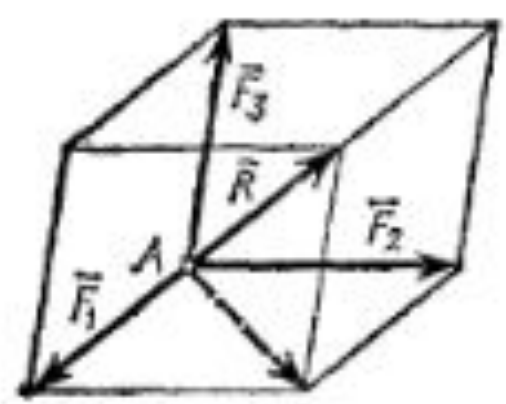
- При геом. способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) не изменится.
- Такой способ получения равнодействующей называется **геометрическим**.
- *Т.обр.,* система сходящихся сил имеет **равнодействующую**, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия (рис. 11).

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k$$

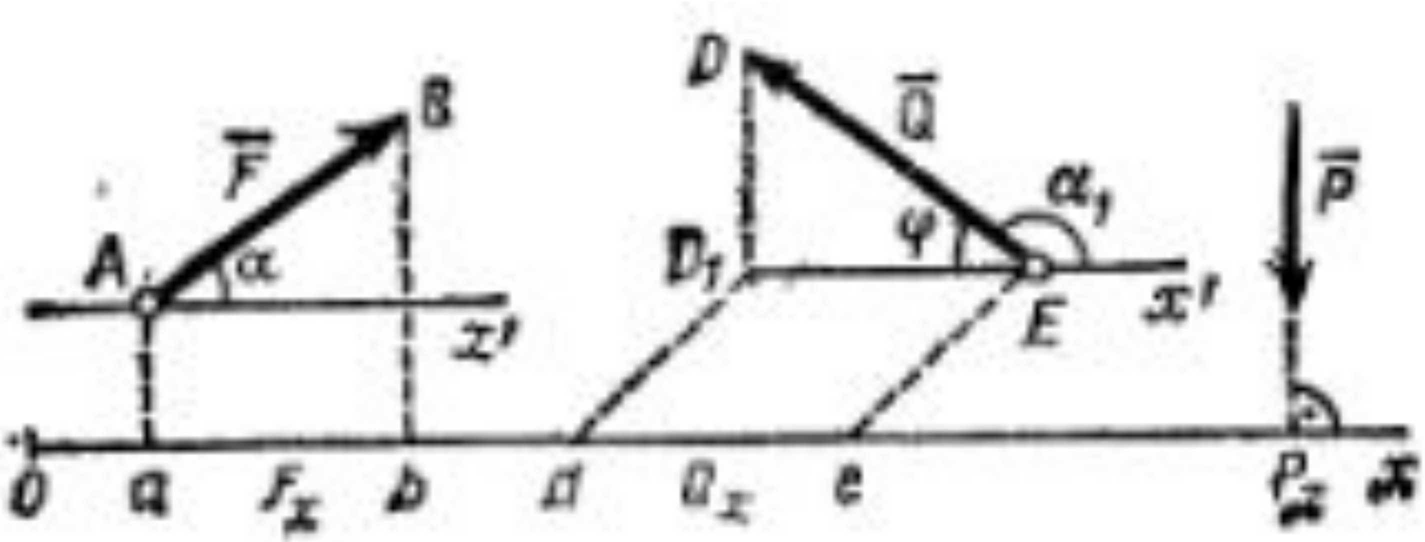
**Б. Разложение сил.** Способом разложения удобно пользоваться при определении сил давления тела на связи и реакции связей.

- *А) разложение силы по двум заданным направлениям.*
- В этом случае сила будет являться диагональю **параллелограмм**а, а стороны параллельны заданным направлениям (рис.9).
- Б) *разложение силы по трем заданным направлениям.*
- В этом случае, если заданные направления не лежат в одной плоскости, задача сводится к построению **параллелепипед**а, диагональю которого и будет являться изображением данной силы, а его ребра будут параллельны заданным направлениям.



- ***Проекция силы на ось*** есть *алгебраическая величина*, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.
- Проекция положительна, если угол острый, - отрицательна, если угол тупой, - равна нулю, если сила перпендикулярна оси.

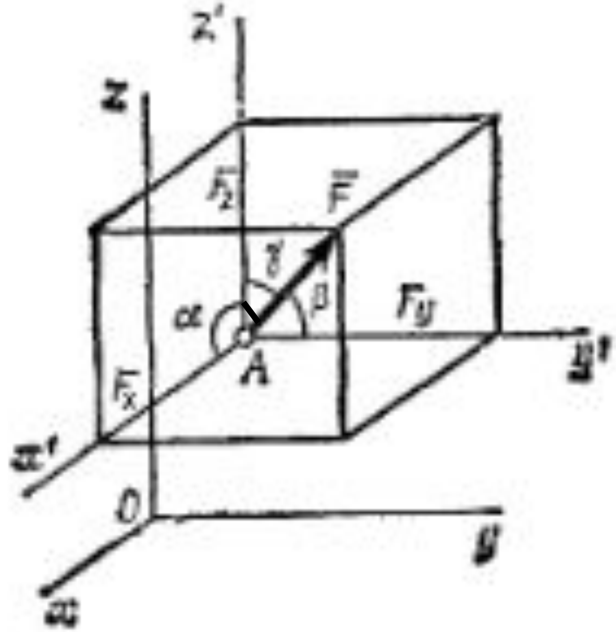



$$Q_X = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi = -de$$

$F_x = F\cos\alpha = ab,$ $\qquad P_x = 0$

Статика.

## Объемная задача:




Положение вектора силы определено при известном модуле силы и углах $\alpha, \beta, \gamma$, которые сила образует с координатными осями.

Для решения задач механики удобно задавать силу ее проекциями Fx, Fy, Fz на координатные оси. Модуль силы и углы, которые она образует с координатными осями, определятся по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ ; \quad \cos\alpha = F_x \setminus F\ ; \quad \cos\beta = F_y \setminus F\ ; \quad \cos\gamma = F_z \setminus F$$

.

- **2. Определение равнодействующей аналитическим способом**
- ***Аналитический способ сложения сил.*** Из аналитической геометрии: *Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось*.
- Т.е., если $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$, то $R_x = \sum F_{kx}$, $R_Y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.

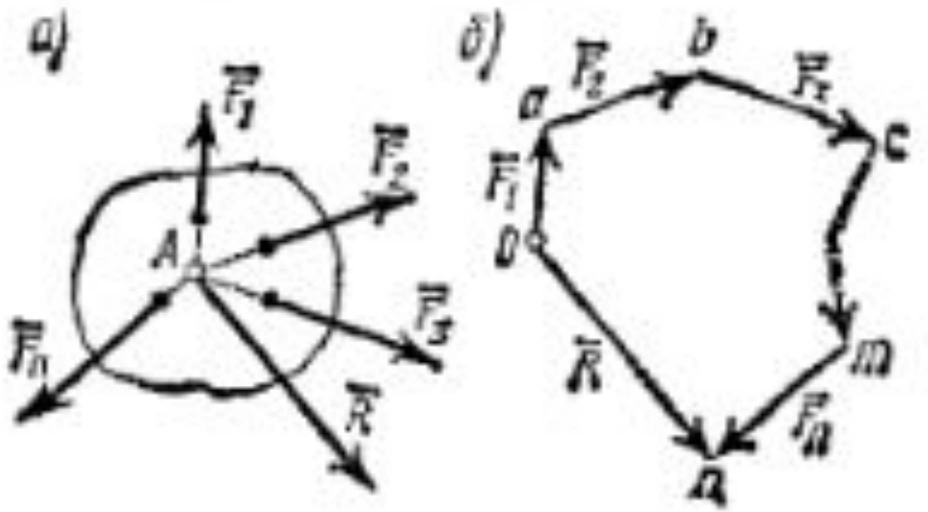
  .

$$R_x, R_y, R_z$$

- Зная $R_x, R_y, R_z$ находим: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$; $\cos\alpha = R_x \setminus R$; $\cos\beta = R_y \setminus R$; $\cos\gamma = R_z \setminus R$;

- . Силы расположены в одной плоскости:

- **Равновесие системы сходящихся сил.**
- ***Геометрическое условие равновесия***.
- *Для равновесия системы сходящихся сил* ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы силовой многоугольник, построенных из этих сил, был замкнутым.* Т. Д совпадает с т. О.




- 
- Рис.15.

- **Равновесие системы сходящихся сил.**

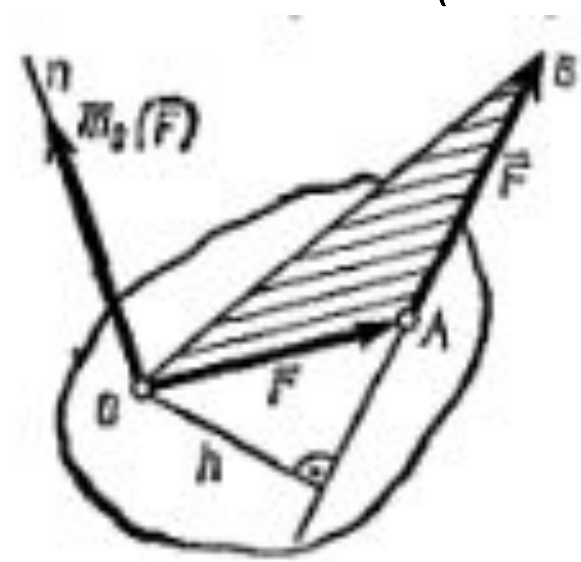
- ***Аналитические условия равновесия*.**
- Аналитический модуль главного вектора: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ . Следовательно, $\bar{R}$ =0, если
- $R_x = 0,$ , $R_y = 0$ , $R_z = 0$ .
-
- В общем случае пространственной системы сходящихся сил:
- $\sum F_{kx} = 0$ , $\sum F_{ky} = 0$ , $\sum F_{kz} = 0$ .

- Т.е., *для равновесия пространственной системы сходящихся сил* ***необходимо и достаточно****, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.*

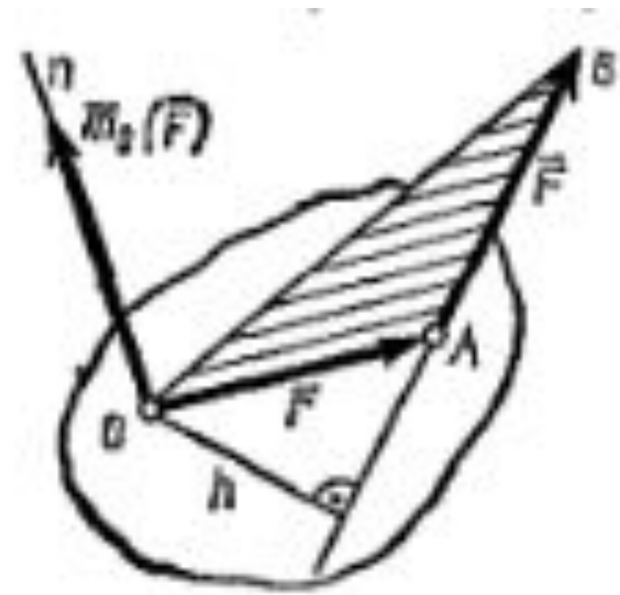
- ***Момент силы относительно центра***

Под действием силы $\overline{F}$ тело может совершать вращательное движение вокруг некоторой точки. *Момент силы характеризует вращательный эффект*.

- ***Центром момента*** называют точку, относительно которой берется момент. ***Момент относительно центра*** – момент относительно этой точки.
- В точке А к телу приложена сила $\overline{F}$. Из некоторого центра О опустим перпендикуляр на линию действия силы, его длина - ***плечо силы*** отн-но центра О.
- Момент силы относительно центра О определяется модулем момента, равным *Fh*; положением в пространстве плоскости ОАВ («плоскость поворота); направлением поворота в момент силы – ***векторная величина***.



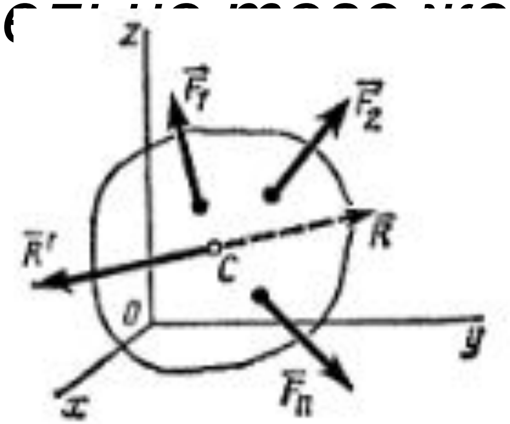
- ***Моментом силы*** $\overline{F}$ ***относительно центра О*** называется приложенный в центре О вектор $\overline{m_o}(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля *F* силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости поворота в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки.




- Модуль момента силы: $\left|\overline{m_o}(\overline{F})\right| = Fh = 2пл.\Delta OAB$ .
- Из рис. видно, что $\overline{m_o}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$ , где $\overline{r} = \overline{OA}$ - радиус-вектор точки А, проведенный из точки О.

- ***Свойства момента силы*:**
- - при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия момент силы относительно центра не изменяется;
- - момент силы относительно центра О равен нулю либо когда сила равна нулю, либо когда плечо силы равно нулю.

- ***Теорема Вариньона*** *о моменте равнодействующей: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.*



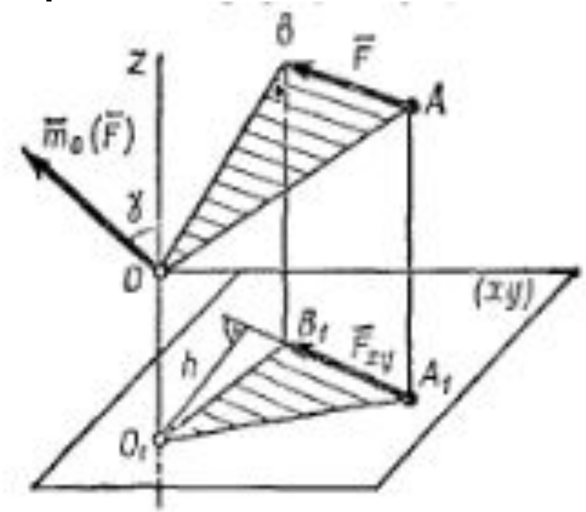

- Рис.23.

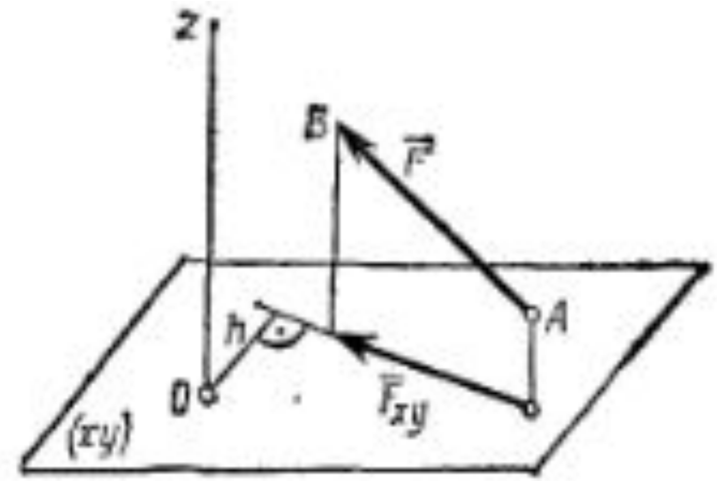
$$\overline{m_o}\left(\overline{R}\right) = \sum \overline{m_o}\left(\overline{F_k}\right)$$

- ***Пространственная система сил. Момент силы.***

- Рассмотрим момент силы $\overline{F}$ относительно центра О в системе коорд … м че

$$\overline{m}_o\left(\overline{F}\right)$$



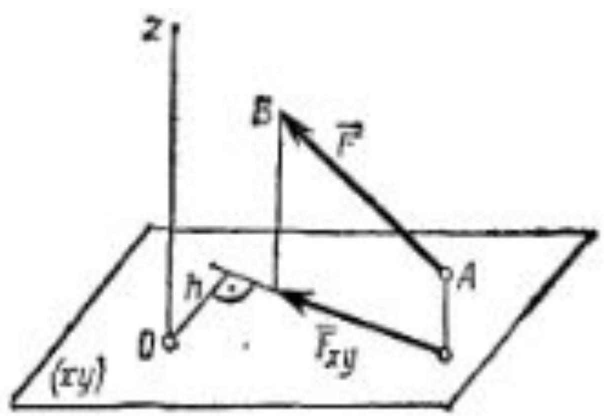



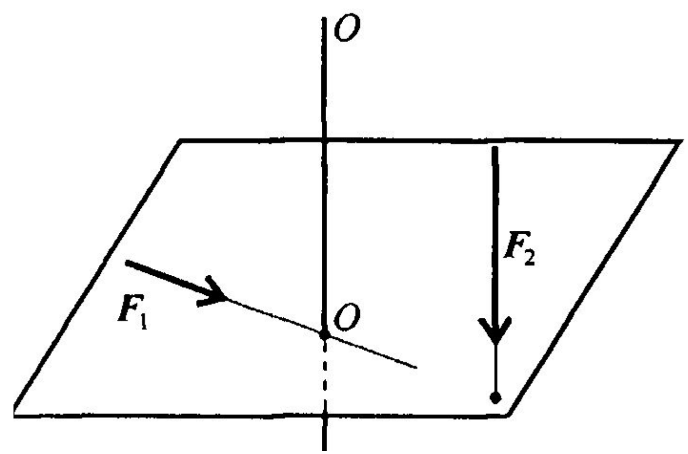

$$m_z\left(\overline{F}\right) = \pm F_{xy} h$$

- *Момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

- *Момент силы относительно оси будет иметь* ***знак плюс****, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила* $\overline{F}_{xy}$ *, виден происходящим против хода часовой стрелки, и* ***знак минус*** *– по ходу часовой стрелки.*

- **Частные случаи вычисления моментов**:
- 1. $\boldsymbol{F}_1$ пересекает ось; $M_{OO}(\boldsymbol{F}_1) = 0$;
- 2. $\boldsymbol{F}_2 \| OO$; пр $\boldsymbol{F}_2 = 0$; $M_{OO}(\boldsymbol{F}_2) = 0$.



- ***Теорема Вариньона для момента силы относительно оси.***

- Если обе части равенства теоремы Вариньона для
- момента силы относительно центра: $\overline{m_o}\left(\overline{R}\right) = \sum \overline{m_o}\left(\overline{F_k}\right)$
- спроецировать на какую-нибудь ось z, получим:
- 

$$m_z\left(\overline{R}\right) = \sum m_z\left(\overline{F_k}\right)$$

.

25. Статика. **Пара сил. Момент пары сил**

- Система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны, называется ***парой сил*** (рис.17)

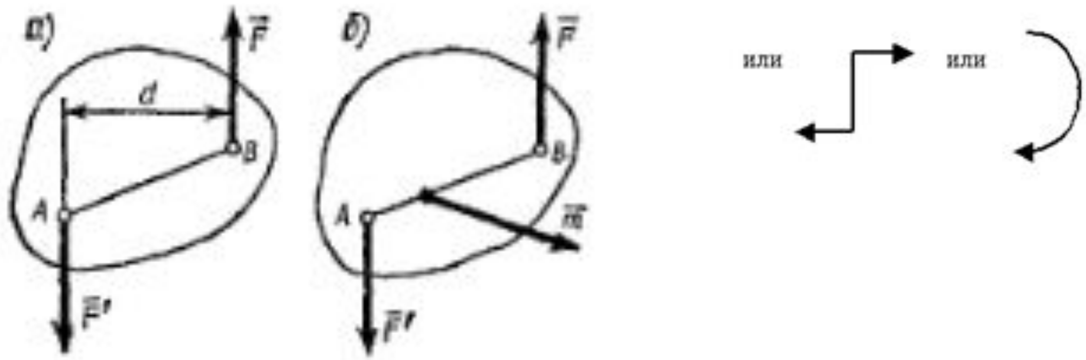
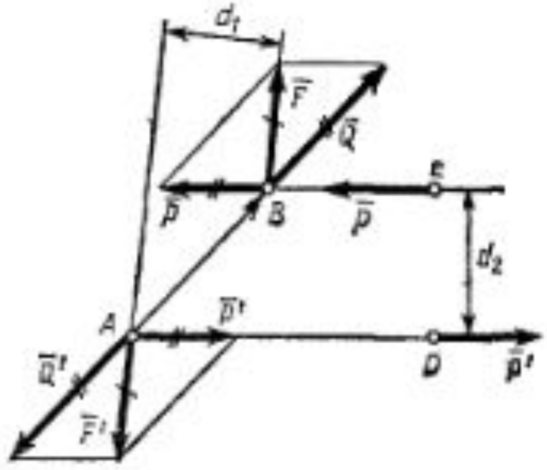



Рис.17.

- .
- ***Плоскость действия пары сил*** - плоскость, проходящую через линии действия сил.
- ***Плечо пары сил*** – расстояние *d* между линиями действия сил пары.
- Тело под действием пары сил совершает вращательное движение, следовательно, можно говорить о ***моменте пары***. Его характеризует: модуль, равный *Fd;* положение плоскости действия пары; направление поворота пары в этой плоскости. Т.о., момент пары сил – ***векторная величина***.

- **Момент пары** численно равен произведению модуля силы на плечо пары ***Fd***.
- Момент считается *положительным*, если пара вращает тело *против хода часовой стрелки*.
- **Свойства пар сил**:
- ***1. Эквивалентность пар:*** *Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны* (оказывают на тело одинаковое механическое действие).



27. Статика. Момент пары сил.

- **2.** Из (1) следует: Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.

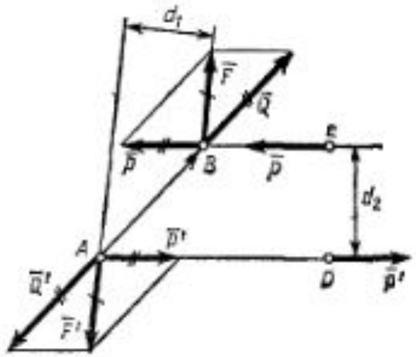



Рис.19

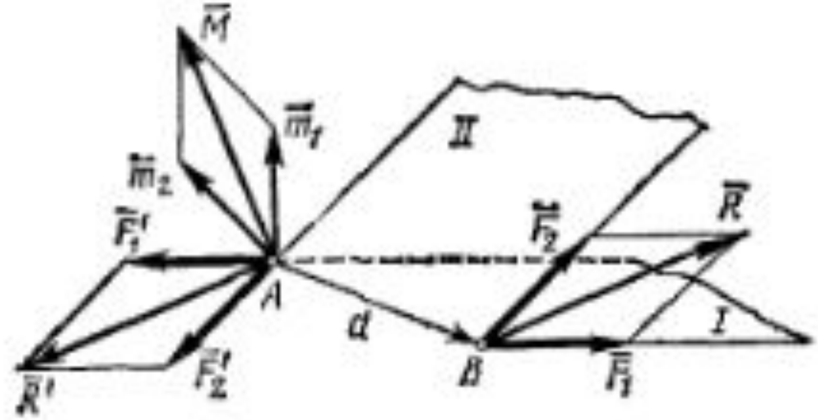
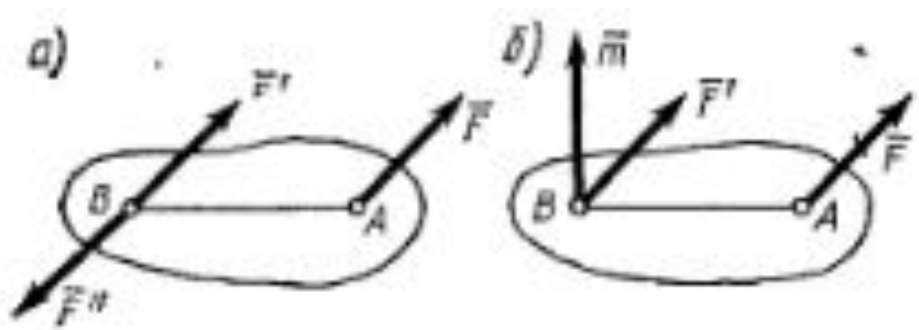



Рис. 20.

- Из сказанного выше следует **теорема о сложении пар**:
- ***3.*** *Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.* Действительно, если последовательно суммировать силы пар и их моменты, получаем эквивалентную пару с моментом:
- $$\overline{M} = \overline{m_1} + \overline{m_2} + \ldots + \overline{m_n} = \sum \overline{m_k}$$
- ***Следствие*. Условие равновесия системы пар**, действующих на твердое тело. *Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар системы равнялась нулю:*
- $\overline{M} = 0$ или $\sum \overline{m_k} = 0$

Для плоской системы сил алгебраическая сумма: $M_\Sigma = 0$; $\sum m_k = 0$ .

- ***Теорема*** *Пуансо* ***о параллельном переносе силы:***
- *Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно добавить пару сил с моментом, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.*
- 

- Рис.21.
- На тело в точке А действует сила $\bar F$, прикладываем в точке В
- две уравновешенные силы $\bar F' = \bar F$ и $\bar F'' = -\bar F$. Система
- трех сил представляет собой силу $\bar F'$ и пару сил $\bar F, \bar F''$ с моментом $\bar m = \bar m_B(\bar F)$.

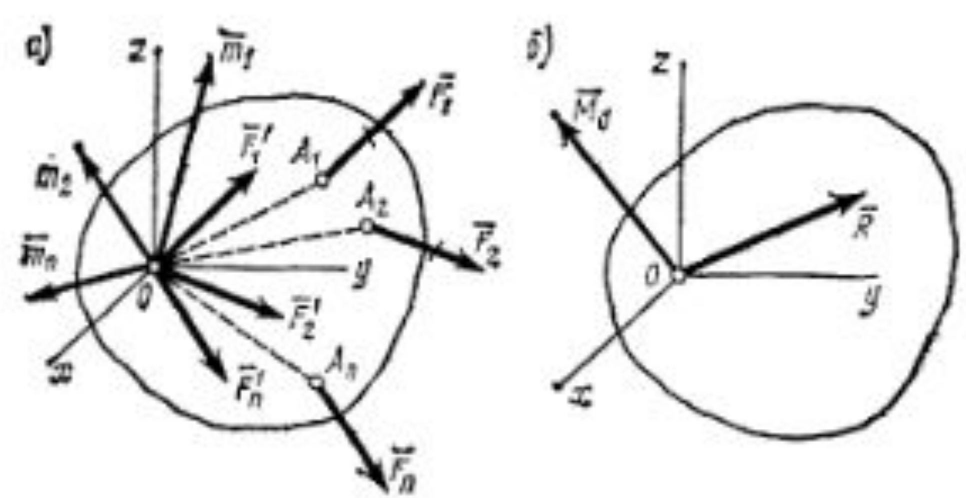
- Из теоремы вытекает ***теорема о приведении системы сил к данному центру***:
- *Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\overline{R}$, равной* ***главному вектору системы сил*** *и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом $\overline{M}_o$, равным* ***главному моменту системы сил*** *относительно це*
- 

Рис.22.

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k' = \sum \overline{F}_k \qquad \overline{M}_o = \sum \overline{m}_k = \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k\right)$$

- ***Следствие*** (условие эквивалентности систем сил): *две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны*.
- ***Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю,*** т.е.
- $$\bar{R} = 0, \qquad \bar{M}_o = 0$$
- .

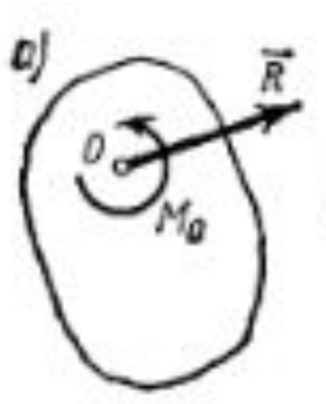
- Рассмотрим, каким образом **плоская система** сил приводится к ***простейшему виду***.
- Любую систему сил при приведении к центру О можно заменить одной силой , равной главному вектору системы, и одной парой сил с моментом , равным главному моменту системы относительно центра О. Знак вектора можно опустить.
-
- 1. $\bar{R} = 0, M_o \neq 0$ . В этом случае система приводится к паре с моментом Мо. Значение Мо не зависит от выбора центра О. Вращение.
- 2. $\bar{R} \neq 0,$ Мо=0. Система приводится к равнодействующей $\bar{R}$ , проходящей через центр О. Прямолинейное движение.
- 


Рис.26.

- *Рассмотрим* ***равновесие плоской системы сил***.
- Для равновесия системы сил должны соблюдаться равенства:
- $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_o = 0$.
- Аналитические условия равновесия для плоской системы сил:
- $$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_o\left(\vec{F}_k\right) = 0$$ .
- **Условия равновесия**: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.*

$$\vec{R} = 0; \vec{M}_o = 0$$

- Из равенства вытекают также следующие **формы условий равновесия плоской системы сил**:

- *Для равновесия произвольной плоской системы сил **необходимо и достаточно**:*
- *1. Чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-либо двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox, не перпендикулярную прямой AB, были равны нулю:*

.

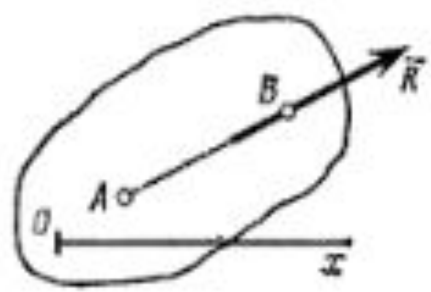
- $$\sum m_A\left(\overline{F_k}\right)=0,\sum m_B\left(\overline{F_k}\right)=0,\sum F_{kx}=0$$
-
- 


Рис.27.

- ***2.** Чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:*
- $$\sum m_A\left(\overline{F_k}\right)=0,\sum m_B\left(\overline{F_k}\right)=0,\sum m_C\left(\overline{F_k}\right)=0$$ .

***Случай параллельных сил***. Если направить ось Ох перпендикулярно силам, а ось Оу параллельно им, то условия равновесия системы параллельных сил значительно упростятся. В этом случае остаются только два условия равновесия:

- $$\sum F_{ky} = 0, \sum m_o(\overline{F}_k) = 0 .$$

- Другая форма условия равновесия имеет вид:
- $$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \sum m_B(\overline{F}_k) = 0 .$$
-

- ***Главный вектор и главный момент пространственной системы сил.***
- Значения главного вектора $\overline{R}$ и главного момента $\overline{M_0}$ системы сил определяются равенствами:
- $$\overline{R} = \sum \overline{F_k}; \overline{M_0} = \sum \overline{m_0}\left(\overline{F_k}\right).$$
- Проекции главного вектора $\overline{R}$ на оси x,y,z :
- $$R_x = \sum F_{kx}; .R_y = \sum F_{ky}; .R_z = \sum F_{kz}.$$
- Проекции главного момента $\overline{M_0}$ :
-
- $$M_x = \sum m_x\left(\overline{F_k}\right); .M_y = \sum m_y\left(\overline{F_k}\right); .M_z = \sum \overline{F_k}.$$
-

- ***Равновесие произвольной пространственной системы сил*** $\overline{R} = 0; \overline{M}_0 = 0.$
- Условия равновесия любой системы сил: Но векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_0$ равны нулю тогда, когда проекции главного вектора и главного момента на оси x, y, z равны нулю: $R_x = R_y = R_z = 0$; $M_x = M_y = M_z = 0$

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

- , или
-

$$\sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0; \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0; \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

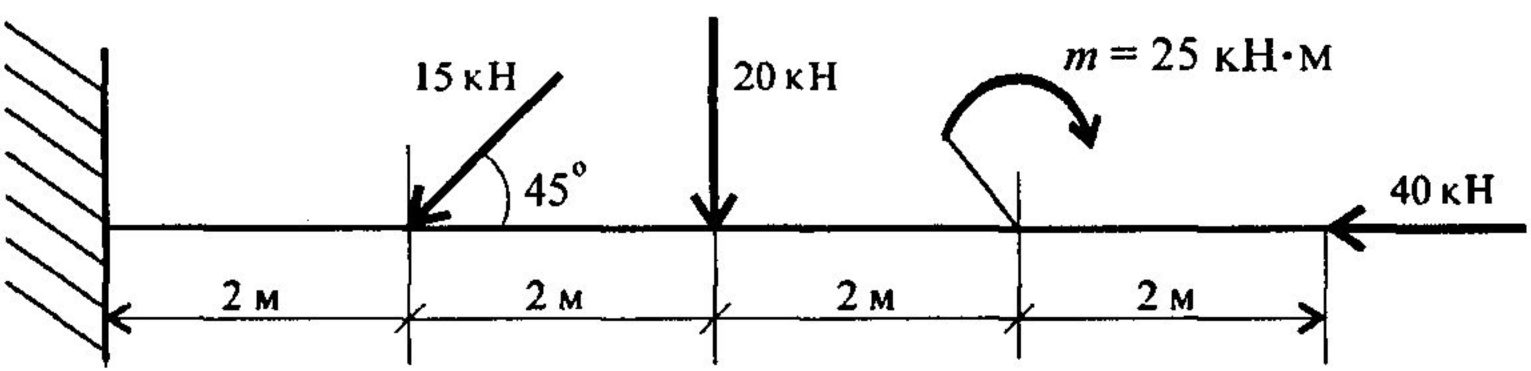
-
- *Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.*
- Если на тело кроме сил *действует еще пара*, заданная ее моментом:

$$\sum m_x\left(\overline{F}_k\right) + m_x = 0; \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) + m_y = 0; \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) + m_z = 0.$$

-
-

# Балочные системы. Определение реакций опор и моментов защемления

- **1. Виды нагрузок и разновидности опор**
- По способу приложения  нагрузки делятся на сосредоточенные и распределенные. Если реально передача нагрузки происходит на пренебрежимо малой площадке (в точке), нагрузку называют ***сосредоточенной***; если распределена по площадке или линии –



- *В задачах статики для абсолютно твердых тел распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей сосредоточенной силой.*

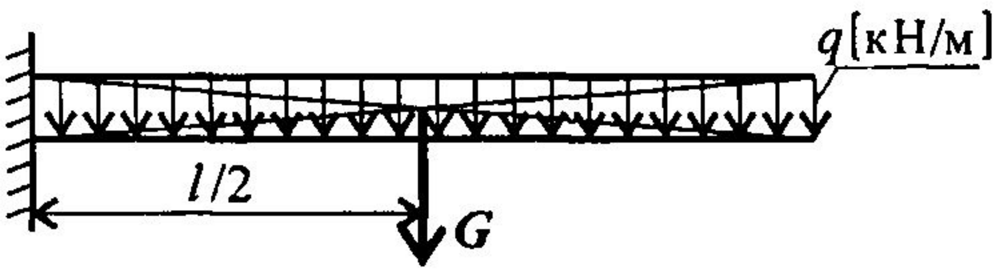



*Рис. 6.1*

$q$ — интенсивность нагрузки; $l$ — длина стержня;

$G = ql$ — равнодействующая распределенной нагрузки.

## Разновидности балочных систем

- **Балка** – прямой брус, закрепленный на опорах и изгибаемый приложенными к нему силами. Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.
- *Жесткая заделка (защемление).*

Опора не допускает перемещений и поворотов. Заделку заменяют двумя составляющими силы $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и $\boldsymbol{R}_{Ay}$ и парой с моментом $M_R$.

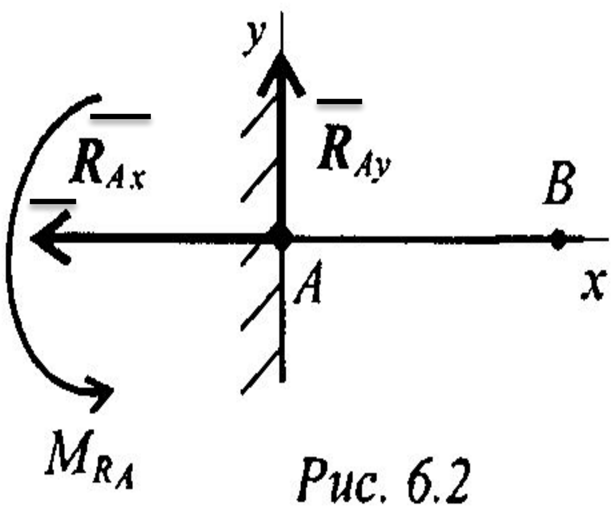


Рис. 6.2

Для определения этих неизвестных удобно использовать систему уравнений в виде

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{0}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{0}^{n} m_{kA} = 0$$

Разновидности балочных систем

*Шарнирно-подвижная опора* (рис. 6.3)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и перемещение вдоль опорной поверхности. Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

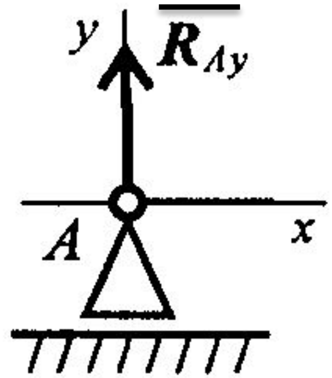



*Рис. 6.3*

*Шарнирно-неподвижная опора* (рис. 6.4)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и может быть заменена двумя составляющими силы вдоль осей координат.

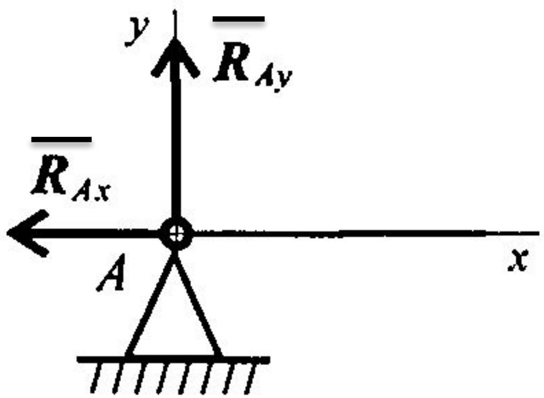



*Рис. 6.4*

*Балка на двух шарнирных опорах* (рис. 6.5)

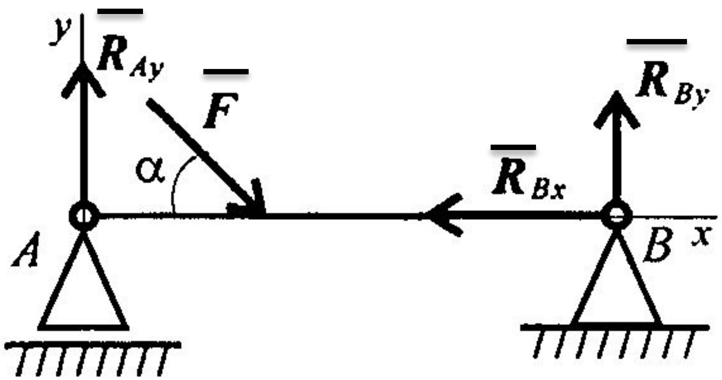



*Рис. 6.5*

Не известны три силы, две из них — вертикальные, следовательно, удобнее для определения неизвестных использовать систему уравнений во второй форме

$$\sum_{0}^{n} m_{kA} = 0; \quad \sum_{0}^{n} m_{kB} = 0; \quad \sum_{0}^{n} F_{kx} = 0.$$

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение

$$\sum_{0}^{n} F_{ky} = 0.$$

При равновесии твердого тела, где можно выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, удобно использовать систему уравнений в третьей форме (рис. 6.6):

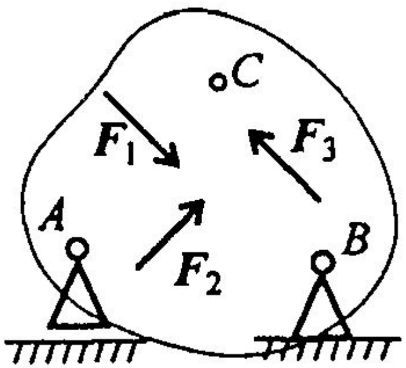
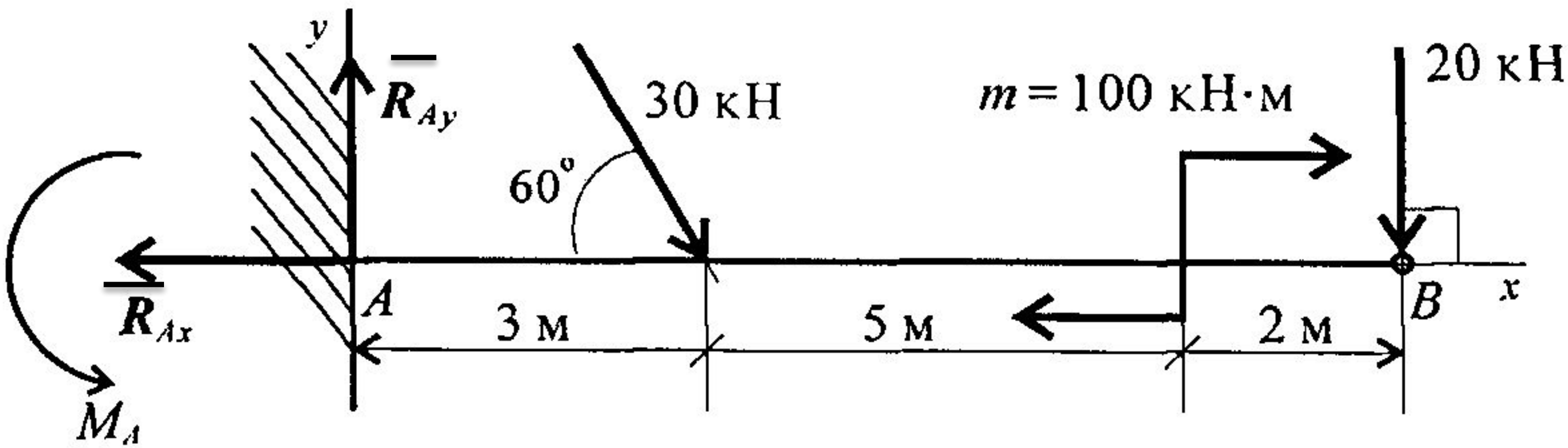



*Рис. 6.6*

$$\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_{0}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{cases}$$

# Пример решения задач

**Пример 1.** Одноопорная (защемленная) балка нагружена сосредоточенными силами и парой сил (рис. 6.7). Определить реакции заделки.



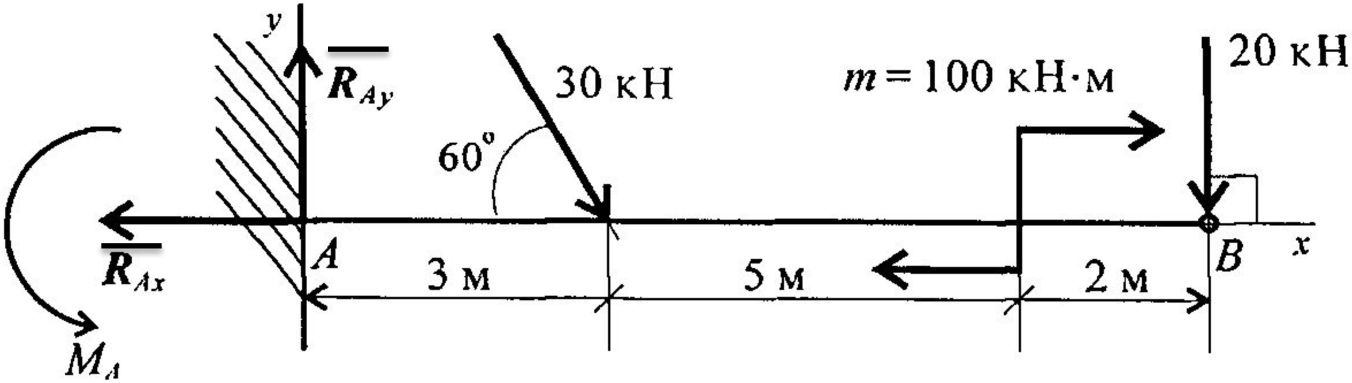

***Решение***

1. В заделке может возникнуть реакция, представляемая двумя составляющими ($\boldsymbol{R}_{Ay}$; $\boldsymbol{R}_{Ax}$), и реактивный момент $M_A$. Наносим на схему балки возможные направления реакций.

З а м е ч а н и е. Если направления выбраны неверно, при расчетах получим отрицательные значения реакций. В этом случае реакции на схеме следует направить в противоположную сторону, не повторяя расчета.

В силу малой высоты считают, что все точки балки находятся на одной прямой; все три неизвестные реакции приложены в одной точке. Для решения удобно использовать систему уравнений равновесия в первой форме. Каждое уравнение будет содержать одну неизвестную.

Пример решения задач




2. Используем систему уравнений:

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{0}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{0}^{n} m_{k_A} = 0.$$

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = -R_{Ax} + 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$R_{Ax} = 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 15\,\text{кН}.$$

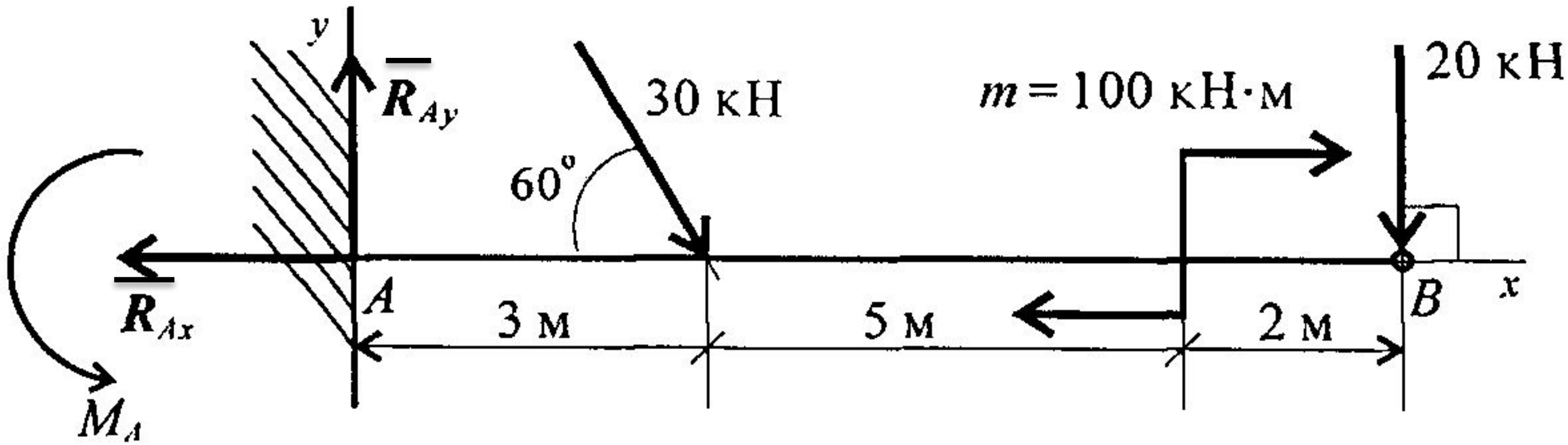
$$\sum_{0}^{n} F_{ky} = R_{Ay} - 30 \cdot \cos 30^\circ - 20 \cdot \cos 0^\circ = 0.$$

$$R_{Ay} = 30 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot 1 = 45{,}98\,\text{кН}.$$

$$\sum_{0}^{n} m_{kA} = -M_A + 30 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + 100 + 20 \cdot 10 = 0.$$

$$M_A = 377{,}94\,\text{кН·м}.$$

Пример решения задач




Знаки полученных реакций (+), следовательно, направления реакций выбраны верно.

3. Для проверки правильности решения составляем уравнение моментов относительно точки $B$.

$$\sum m_{kB} = -M_A + R_{Ay} \cdot 10 - 30 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ + 100 = 0.$$

Подставляем значения полученных реакций:

$$-377{,}94 + 45{,}98 \cdot 10 - 210 \cdot 0{,}866 + 100 = 0;$$

$$-559{,}8 + 559{,}8 = 0.$$

Решение выполнено верно.

# Понятие о трении. Виды трения

*Трение* — сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении — трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

## *Трение скольжения*

Причина — механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется *силой трения скольжения* (рис. 13.3а).

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{тр} = F_f = fR,$$

где $R$ — сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;

$f$ — коэффициент трения скольжения.

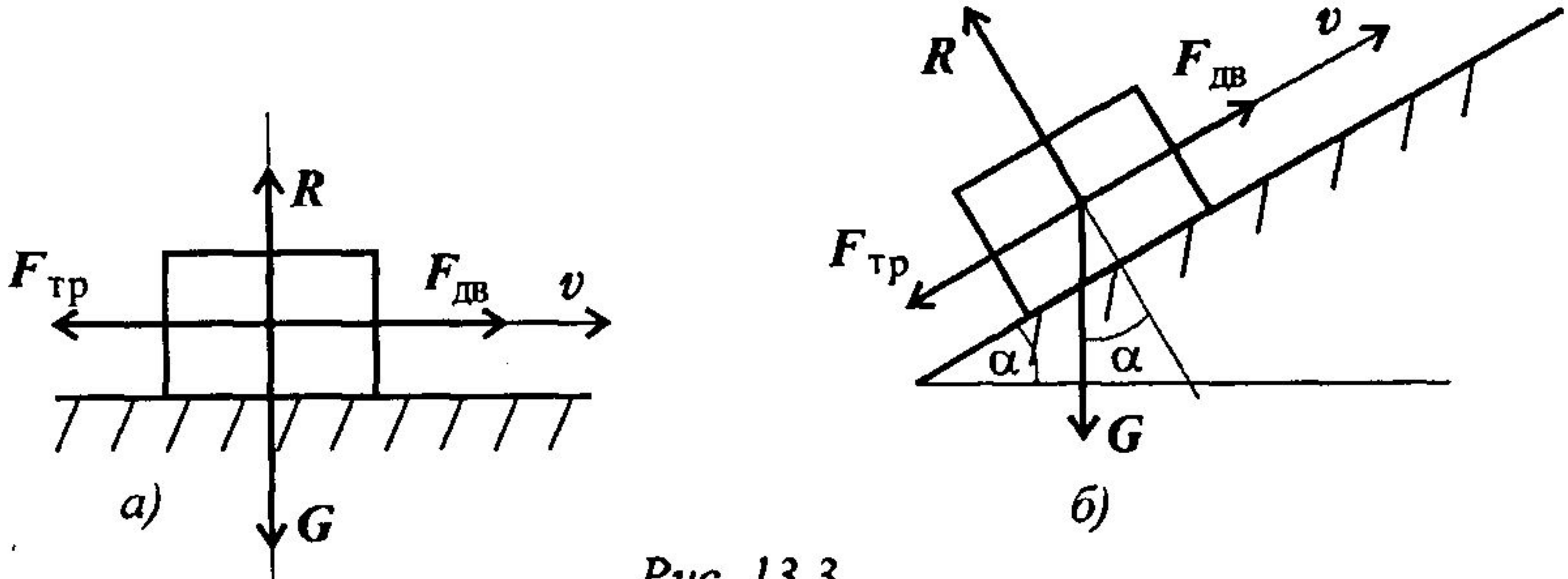



Рис. 13.3

В случае движения тела по наклонной плоскости (рис. 13.3б)

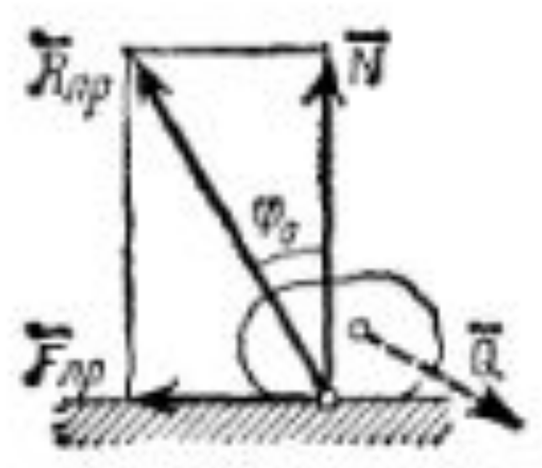
$$R = G\cos\alpha,$$

где $\alpha$ — угол наклона плоскости к горизонту.

*Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения.*

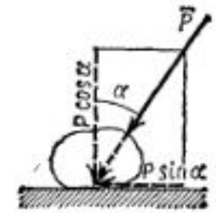
- 2. При изучении трения твердых тел, кроме коэффициента трения, важную роль играет **угол трения**. Пусть твердое тело, находящееся в равновесии, опирается на неподвижную поверхность и пусть $\overline{R}$ есть реакция связи и равнодействующая нормальной реакции $N$ и перпендикулярной ей силы трения $\overline{F}$.

- Рис.33




- Полная реакция $\overline{R}$ будет отклонена от нормали на некоторый угол. Очевидно, что при изменении силы трения $\overline{F}$ от нуля до $\overline{F}_{пр}$ сила $\overline{R}$ изменяется от $\overline{N}$ до $\overline{R}_{пр}$, а ее угол $\varphi$ с нормалью растет от нуля до предельного значения. Его наибольшее значение называется ***углом трения*** $\varphi_0$. $tg\varphi_0 = F_{пр} \backslash N$ $tg\varphi_0 = f_0$

- Сила трения меняется от нуля до некоторого предельного значения, называемого трением покоя (статическая сила трения):
- 0< $F \leq F_{пр}$ ,




В момент достижения силой трения предельной величины $\overline{F}_{пр}$ возникает ***предельное равновесие*** .

$\overline{R}$

При равновесии тела полная реакция находится внутри угла трения. При предельном $\varphi_0$ равновесии реакция отклоняется от нормали на $\varphi_0$ угол .

Это означает, что если к телу приложить силу под углом к нормали, равным или меньшем , то тело не сможет совершать движение.

- 3. Сила трения при движении меньше силы трения покоя. Сила трения при движении называется динамической силой трения ($F$):
- $$F \le F_{пр} \quad \text{или} \quad F \le f_o N \quad .$$
- Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и положения опорной поверхности, не меняется, то различают статический ($f_0$) и динамический ($f$)

*Коэффициент трения скольжения* зависит от следующих факторов:

— от материала: материалы делятся на *фрикционные* (с большим коэффициентом трения) и *антифрикционные* (с малым коэффициентом трения), например $f = 0{,}1 \div 0{,}15$ (при скольжении стали по стали всухую), $f = 0{,}2 \div 0{,}3$ (при скольжении стали по текстолиту)

— от наличия смазки, например $f = 0{,}04 \div 0{,}05$ (при скольжении стали по стали со смазкой);

— от скорости взаимного перемещения.

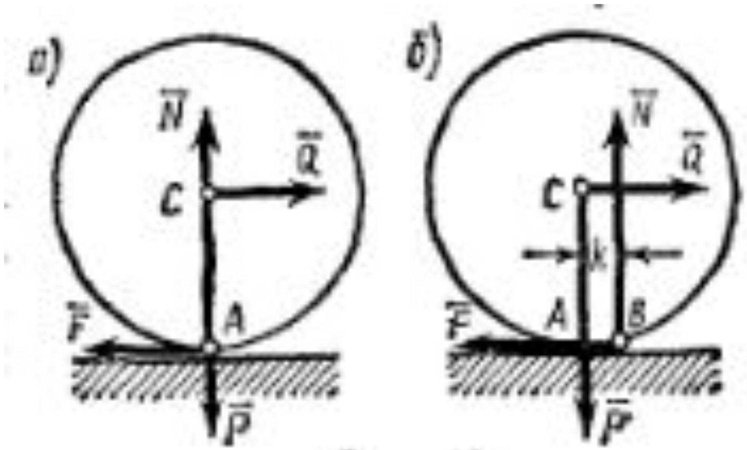
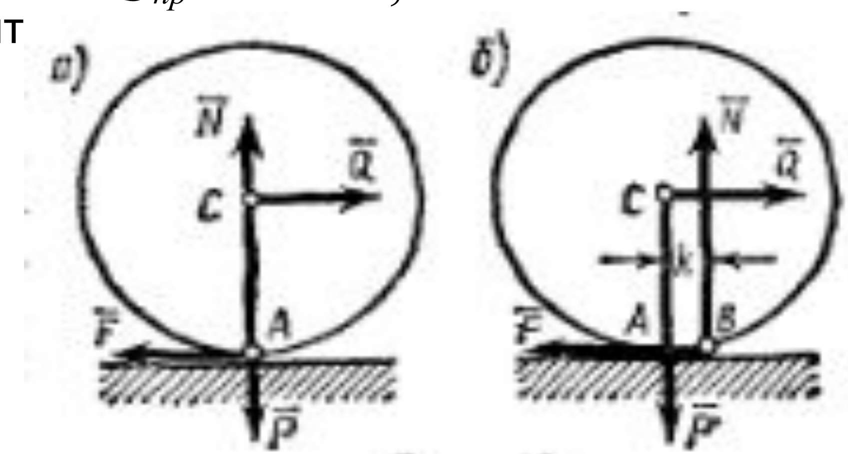
- ***Трение качения***.
- ***Трением качения*** *называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому.*
- 

Рис.36.
- Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса *R*. *P* – вес катка;
- $\bar{Q}$ – приложенная к оси катка сила, $\bar{Q}$ меньше или равна *Fпр* .
- $\bar{F}$ – сила трения, численно равная *Q* и препятствующая скольжению цилиндра; $\bar{N}$ – нормальная реакция, уравновешивающая силу $\bar{P}$.

- На практике касание тел происходит по некоторой площадке АВ (рис. Б)
- При действии силы $\overline{Q}$ интенсивность давления у края площадки А убывает, а у края В возрастает. Реакция $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{Q}$. При увеличении $\overline{Q}$ растет смещение *k* сил; в предельном положении катка (перед началом движения) на каток будут действовать две уравновешивающие друг друга пары сил: $\overline{Q}_{пр}$ $\overline{F}$ и $\overline{N}, \overline{P}$ с момент $Q_{пр}R$ $Nk$
- 



- Из равенства моментов: $Q_{пр}R = Nk$ или $Q_{пр} = (k \setminus R)N$.
- Из рис.36,б видно, что смещение $k$ - плечо пары, линейная величина, измеряется в см. Называется ***коэффициентом трения качения***.

Зависит от материала соприкасающихся тел и является опытной величиной.

Отношение *k\R* для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения $f_0$. Например, при движении стали по стали $f_0 = 0{,}15...0{,}25$ ; *к* = 0,005 см. Поэтому в технике скольжение заменяют качением.

## Центр тяжести

- **Сила тяжести – равнодействующая** сил притяжения Земли, она распределена по всему объему тела.
- Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему сил, линии действия которых сходятся в центре Земли. Поскольку радиус Земли значительно больше размеров любого земного тела, силы притяжения можно считать **параллельными**.
- Для определения точки приложения силы тяжести (равнодействующей параллельных сил) применим теорему Вариньона о моменте равнодействующей:
- **Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов относительно любой точки.**

Тело состоит из частей, силы тяжести которых $q_k$ приложены в центрах тяжести (ЦТ) этих частей.

Пусть равнодействующая (сила тяжести всего тела) приложена в неизвестном пока центре $C$.

$x_C$, $y_C$ и $z_C$ — координаты центра тяжести $C$.

$x_k$, $y_k$ и $z_k$ — координаты центров тяжести частей тела.

Из теоремы Вариньона следует:

$$M_x(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gy_C = \sum_0^n q_k y_k; \quad y_C = \frac{\sum_0^n q_k y_k}{G};$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gx_C = \sum_0^n q_k x_k; \quad x_C = \frac{\sum_0^n q_k x_k}{G};$$

аналогично для оси $Oz$:

$$M_z(\boldsymbol{F}_\Sigma) = Gz_C = \sum_0^n q_k z_k; \quad z_C = \frac{\sum_0^n q_k z_k}{G}.$$

В однородном теле сила тяжести пропорциональна объему $V$:

$$G = \gamma V;$$

где $\gamma$ — вес единицы объема.

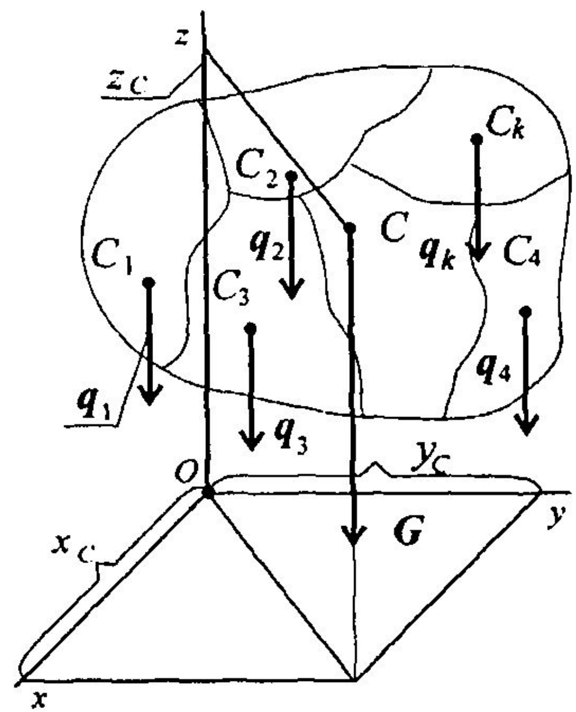


Рис. 8.2

Следовательно, в формулах для однородных тел:

$$x_C = \frac{\sum\limits_0^n \gamma V_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum\limits_0^n V_k x_k}{V}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_0^n \gamma V_k y_k}{\gamma V} = \frac{\sum\limits_0^n V_k y_k}{V}; \quad z_C = \frac{\sum\limits_0^n V_k z_k}{V},$$

где $V_k$ — объем элемента тела; $V$ — объем всего тела.

## Центр тяжести плоских тел (плоских фигур)

- Для плоских фигур справедливо выражение:
- ***V=Ah,***
- где *A* – площадь фигуры; *h* – ее высота.
- Подставляем в формулы, получим:

$$x_C = \frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_0^n A_k h y_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2},$$

где $A_k$ — площадь части сечения; $x_k$, $y_k$ — координаты ЦТ частей сечения.

## Центр тяжести плоских тел (плоских фигур)

Выражение $\sum\limits_0^n A_k x_k$ называют *статическим моментом площади* $(S_y)$.

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_0^n A_k x_k = S_y; \quad x_C = \frac{S_y}{A}; \quad \sum_0^n A_k y_k = S_x; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

*Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.*

- ***Центр масс.***
- *Силовое поле* – это область пространства, в каждой точке которой на помещенную частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки (например, поле тяготения, поле силы тяжести).

- *Однородное поле тяжести* – это силовое поле, в котором выполняются два условия: силы тяжести частиц тела параллельны друг другу и сохраняют для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела. Здесь вес любой частицы тела пропорционален ее массе, g=const. Поэтому **центр масс тела совпадает с положением его центра тяжести.**
- *Центром тяжести твердого тела C* называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве. .
- *Координаты центра тяжести тела:*

- , , .

- Учтем, что и :
- , , , *(1)*
- где , , , - масса и координаты точек системы.
- *Геометрическая точка тела С, координаты которой определяются формулами (1), называется* ***центром масс*** *или центром инерции механической системы.*
- Из равенства (1) - положение ЦМ определяем через радиус-
- вектор .
- - радиусы-векторы точек системы.

$$p_k = m_k g \qquad P = Mg$$

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k$$