Кафедра «Информационные технологии»

Исследование операций

Курс лекций по дисциплине
«Исследование операций»
для специальности направления
1-40 01 02-01 «Информационные системы и технологии
(в проектировании и производстве)»

Автор-составитель
Е.Г. Стародубцев, доцент, канд. физ.-мат. наук

Основы теории игр

1. Основные понятия теории игр, матричные игры

2. Решение матричных игр. Принцип минимакса

3. Решение игры в смешанных стратегиях путем сведения к задаче линейного программирования

4. Игры с природой

1. Основные понятия теории игр, матричные игры

Игра - *математическая модель конфликтной ситуации, реализуемой в условиях неопределенности*.

Теория игр - *математическая теория конфликтных ситуаций.*

Каждая взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, а ее анализ затруднен *наличием многих факторов* (как существенных, так и несущественных), влияющих на результат конфликта.

Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, надо отвлечься от второстепенных факторов и построить *упрощенную модель конфликтной ситуации*, которая и называется игрой.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что *ведется по определенным правилам*. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтов – «играми» в буквальном смысле слова (шашки, шахматы, карточные игры, ...).

Все эти игры носят характер соревнования, происходящего по известным правилам и заканчиваются «победой» (выигрышем) того или другого игрока.

Например, при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать выпуск аналогичной продукции на других предприятиях.

Невозможно полностью контролировать деятельность конкурентов, можно только предполагать возможные варианты их действий, т. е. решение приходится принимать *в условиях неопределенности*. Каждое из конкурирующих предприятий преследует свои цели, поэтому имеет место *конфликтная ситуация*.

Таким образом, *теория игр* занимается исследованием конфликтных ситуаций.

В игре могут сталкиваться интересы двух (***игра парная***) или нескольких (***игра множественная***) противников. Существуют игры с бесконечным множеством игроков.

По характеру выигрышей выделяют игры **с нулевой суммой** и **с ненулевой суммой**. В играх с нулевой суммой *общий капитал игроков не изменяется*, а лишь *перераспределяется в ходе игры*, поэтому сумма выигрышей равна нулю (проигрыш рассматривается как отрицательный выигрыш). В случае парной игры это означает, что *выигрыш одного игрока равен проигрышу другого*.

В качестве одного из признаков классификации игр часто выбирают *множество игроков*.

Различают игры:

- двух лиц (*парные игры*)
- *n* лиц ($n>2$, *множественные игры*).

Парные игры называются **антагонистическими**, если игроки преследуют противоположные цели.

Если в антагонистической игре

игрок 1 стремится максимизировать свой выигрыш ***g1***, то цель игрока 2 - минимизация выигрыша игрока 1, так что

$$g1 = -g2,$$

где ***g2*** - выигрыш игрока 2

(***игра с нулевой суммой***: ***g1 + g2 = 0***).

В ***играх с ненулевой суммой*** сумма выигрышей *отлична от нуля*.

Например, при организации лотереи часть общего взноса участников не участвует в формировании призового фонда, а идет организатору лотереи.

Игры, в которых оба участника сознательно стремятся добиться для себя наилучшего результата, называются ***стратегическими***.

Часто игровой схемой формализуют такие ситуации, в которых один из участников *безразличен к результату игры*. Такие игры называют ***статистическими*** или ***играми с природой***.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на ***конечные*** и ***бесконечные*.**

В конечной игре каждый из игроков имеет *конечное число возможных стратегий*.

Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на ***кооперативные***, ***коалиционные*** и ***бескоалиционные***.

Если игроки *не имеют права вступать в соглашения*, то такая игра относится к *бескоалиционным*, если же игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции, - к *коалиционным*.

Кооперативная игра – это такая игра, в которой *заранее определены коалиции*.

Одна из возможных классификаций игр

Рассмотрим стратегическую парную игру с нулевой суммой. Пусть в игре участвуют два игрока: ***A*** и ***B***. Как уже отмечалось, в такой игре выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Игра ведется по определенным правилам. Каждый участник игры имеет несколько вариантов возможных действий (***чистых стратегий***).

Например, игрок ***A*** имеет ***m*** чистых стратегий *(A1, A2,…, Am),* а игрок ***B*** – ***n*** чистых стратегий *(B1, B2,…, Bn).* Из своих чистых стратегий каждый игрок выбирает такой вариант, который, как он полагает, может обеспечить ему наилучший результат (исход игры).

Исход игры – это значение некоторой функции, называемой ***функцией выигрыша*** или ***платежной функцией***.

Платежная функция задается либо аналитическим выражением, либо таблично, т. е. с помощью ***платежной матицы***.

В последнем случае игра называется ***матричной***. По строкам в ***платежной матрице*** располагаются стратегии игрока *A*, а по столбцам - стратегии игрока *B*.

Элемент платёжной матрицы a_{ij}, который находится на пересечении строки i и столбца j, есть *выигрыш игрока A* (и в то же время *проигрыш игрока B*) в ситуации, когда игрок *A* выбрал стратегию A_j, а игрок *B* выбрал (независимо от A) стратегию B_j.

Таким образом, именно независимый выбор двух игроков определяет исход игры (величину выигрыша *A*).

Платежная матрица игры

Стратегии	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Например, величина a_{21} показывает выигрыш игрока A и, в то же время, проигрыш игрока B, если игрок A выбирает свою чистую стратегию A_2, а игрок B выбирает чистую стратегию B_1.

Пример 1

Камень, ножницы, бумага

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Камень, ножницы, бумага — популярная детская игра на руках, известная во многих странах мира. Иногда используется как методика случайного выбора персоны для какой-либо цели (наряду с бросанием монеты, вытягиванием соломинок и т. п.)

Жесты, используемые в игре (слева направо: камень, ножницы и бумага). Каждый из знаков побеждает одного и проигрывает другому.

Правила игры

Игроки считают вместе вслух «Камень... Ножницы... Бумага... Раз... Два... Три», одновременно качая кулаками. На счёт «Три» они одновременно показывают при помощи руки один из трёх знаков: камень, ножницы или бумагу.

Победитель определяется по правилам:

- Камень побеждает ножницы («камень затупляет или ломает ножницы»);
- Ножницы побеждают бумагу («ножницы разрезают бумагу»);
- Бумага побеждает камень («бумага накрывает камень»).

Если игроки показали одинаковый знак, то засчитывается ничья и игра переигрывается. В классическом варианте в игру играют вдвоём, но возможна игра большего числа участников. При этом ничья засчитывается в ситуации, когда одновременно хотя бы один игрок показал «камень», хотя бы один игрок показал «бумагу» и хотя бы один игрок показал «ножницы».

Платежная матрица этой игры

	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	**0**	**1**	**-1**
Ножницы	**-1**	**0**	**1**
Бумага	**1**	**-1**	**0**

Пример 2. В игре принимают участие два игрока. Каждый из них может записать независимо от другого число 4, 5 или 6.

Если *разность между числами*, записанными игроками *A* и *B:*

- *положительна*, то игрок *A* выигрывает количество очков, равное этой разности.
- *отрицательна*, то выигрывает игрок *B*.
- *равна нулю*, то игра заканчивается вничью.

Необходимо составить *платежную матрицу игры*.

Решение

У игрока *А* имеется три стратегии:

$\boldsymbol{A_1}$ - записать число 4;

$\boldsymbol{A_2}$ - записать число 5;

$\boldsymbol{A_3}$ - записать число 6.

Поэтому платежная матрица будет иметь три строки

Платёжная матрица для примера 2

Стратегии	$B_1(4)$	$B_2(5)$	$B_3(6)$
$A_1(4)$	**0**	**-1**	**-2**
$A_2(5)$	**1**	**0**	**-1**
$A_3(6)$	**2**	**1**	**0**

Игрок *B* также имеет три стратегии: B_1, B_2, B_3 *(записать число 4, 5 или 6).* Платежная матрица имеет три столбца.

В случае, если игрок *A* запишет число 4 (стратегия A_1 и игрок *B* также запишет 4 (стратегия B_1), то выигрыш игрока *A* составит 4 - 4 = 0, т. е. элемент платежной матрицы a_{11} = 0. Аналогично рассчитываются все остальные элементы платежной матрицы.

Например, если игрок *A* выберет стратегию A_3 (запишет число 6). а игрок *B* выберет стратегию B_1 (запишет число 4), то выигрыш игрока *A* составит a_{31} = 6 - 4 = 2. Столько же проиграет игрок *B*.

Отрицательный выигрыш означает на самом деле проигрыш. Так, a_{23} = -1 означает, что если игрок *A* выберет стратегию A_2 (запишет 5), а игрок *B* выберет стратегию B_3 (запишет 6), то *A* выиграет -1 очко (т. е. проиграет 1 очко), а *B* проиграет -1 очко (т. е. выиграет 1 очко).

Пример 3. Конструкторские бюро КБ-1 и КБ-2 участвуют в конкурсе проектов двух бытовых приборов. В КБ-1 этим заняты четыре, а в КБ-2 - три отдела.

Комиссия по оценке проектов лучшим признает тот, которым в конструкторском бюро *занималось большее количество отделов*.

При равенстве задействованных отделов баллы не начисляются.

Кроме одного балла, получаемого за лучший проект, КБ дополнительно начисляется столько баллов, сколько отделов было занято аналогичным проектом в конкурирующем КБ. Общее количество баллов каждого КБ равняется сумме баллов, набранных по обоим проектам. Необходимо придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу (матрицу баллов, начисляемых КБ-1).

Решение

Игрок *A* - КБ-1, игрок *B* - КБ-2. Запишем стратегии игроков в виде: (k_1, k_2), где k_1 и k_2 - количества отделов, которые занимались 1-м проектом и 2-м проектом, соответственно.

Т.к. у игрока *A* имеется 4 отдела, их можно распределить по проектам следующими способами:

$A_1 = (4, 0)$; $A_2 = (3, 1)$; $A_3 = (2, 2)$;

$A_4 = (1, 3)$; $A_5 = (0, 4)$,

т. е. игрок *A* имеет 5 различных стратегий.

Стратегия A_1 состоит в том, чтобы все 4 отдела занять 1-м проектом, стратегия A_2 - в том, чтобы 3 отдела занять 1-м проектом, а 1 отдел – 2-м, и т. д.

Аналогично, игрок B имеет 3 отдела и 4 стратегии:

$B_1 = (3, 0)$; $B_2 = (2, 1)$; $B_3 = (1, 2)$; $B_4 = (0, 3)$.

Платежная матрица этой игры:

Стратегии	$B_1 = (3,0)$	$B_2 = (2,1)$	$B_3 = (1,2)$	$B_4 = (0,3)$
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	-1
$A_3 = (2, 2)$	-2	2	2	-2
$A_4 = (1, 3)$	-1	0	3	1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4

Приведем рассуждения при расчете элементов этой платежной матрицы.

Элемент a_{11} и есть выигрыш игрока А, который он получит, если выберет стратегию A_1 (все 4 отдела займет 1-м проектом), а игрок В при этом выберет свою стратегию B_1 (все свои 3 отдела займет 1-м проектом).

Тогда по 1-му проекту выиграет игрок А (т.к. как количество отделов, занятых этим проектом, у него больше). Ему будет начислен 1 балл за выигрыш и еще дополнительно 3 балла за то, что у конкурента этим занималось 3 отдела.

Итого по первому проекту игрок *A* выиграет 4 балла. По второму проекту - ничья (им не занимались ни первый, ни второй игрок). Поэтому $a_{11} = 4$. Элемент a_{12} представляет собой выигрыш игрока *A* при условии, что он выберет стратегию A_1 (один отдел на первый проект и три на второй), а игрок *B* выберет стратегию B_2 (два отдела на первый проект и один на второй).

По первому проекту выигрывает игрок *A* – 3 балла (один за выигрыш и два дополнительно за то, что у конкурента этим занималось два отдела). По второму проекту 1 балл выигрывает игрок *B* (дополнительные баллы не начисляются, так как его конкурент (игрок *A)* вторым проектом вообще не занимался). Таким образом, выигрыш игрока *A* по второму проекту равен -1 (отрицательный выигрыш есть на самом деле проигрыш), а общий выигрыш игрока *A* равен a_{12} = 3 - 1 = 2.

Элемент a_{42} представляет собой выигрыш игрока A при условии, что он выберет стратегию A_4 (один отдел на первый проект и три на второй), а игрок B выберет стратегию B_2 (два отдела на первый проект и один на второй).

Тогда по первому проекту выигрывает игрок *B* (так как у него этим проектом занято больше отделов). Он получает 1 балл за выигрыш и 1 дополнительный балл за то, что у игрока *A* первым проектом был занят один отдел, т. е. по первому проекту игрок *A* проигрывает 1 + 1 = 2 балла (выигрывает -2 балла).

По второму проекту выигрывает игрок *A* и получает 1 дополнительный балл за то, что у игрока *B* этим проектом занимался один отдел, т. е. по второму проекту выигрыш игрока *A* составит 1 + 1 = 2 балла.

Общий выигрыш игрока *A* в этой ситуации составит $a_{42} = -2+2=0$.

Остальные элементы платежной матрицы рассчитываются аналогично.

2. Решение матричных игр. Принцип минимакса

Пусть дана парная игра с нулевой суммой, заданная платежной матрицей размерности *m* х *n*.

Решить матричную игру означает определить наилучшие стратегии игроков *A* и *B*. Если рассматривается стратегическая игра, то предполагается, что *противники одинаково разумны*, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Поэтому каждый игрок должен рассчитывать на *самое неблагоприятное для себя поведение противника*.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока *A.* Выбирая стратегию A_i мы должны рассчитывать, что игрок *B* ответит на нее той из своих стратегий B_j , для которой выигрыш игрока А будет *минимальным*.

Поэтому для каждой стратегии A_i найдем α_i - минимальный гарантированный выигрыш игрока A при применении стратегии A_i - по следующей формуле:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \ (i = \overline{1, m}). \qquad (1)$$

(т.е. находим минимальный элемент по каждой строке платежной матрицы).

Очевидно, что желающий перестраховаться игрок А должен предпочесть ту стратегию, для которой гарантированный выигрыш α_i - максимален, т. е. лучшая, с его точки зрения, стратегия имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (2)$$

(т.е. среди минимальных элементов по каждой строке платежной матрицы находим наибольший)

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максимином*.

Стратегия, обеспечивающая игроку A получение нижней цены игры, называется *максиминной стратегией*. Если игрок A будет придерживаться своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры при любом поведении игрока B.

Аналогичным способом определим наилучшую стратегию игрока *B*. С его точки зрения, в платежной матрице записаны проигрыши. Он заинтересован уменьшить свой проигрыш. Поэтому в каждом из столбцов (соответствующем определенной стратегии) он должен найти максимальное значение проигрыша при выборе стратегии B_j по следующей формуле:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (3)$$

Выбирать стратегию игроку B следует так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить $\beta = \min_j \beta_j$.

Величина

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (4)$$

называется *верхней ценой игры* (*минимаксом*), а соответствующая ей чистая стратегия B_j – *минимаксной*. Если игрок B будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то ему гарантировано, что в любом случае он проиграет не больше верхней цены игры. Можно показать, что всегда максимин не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \le \beta$.

Если нижняя цена игры равна верхней ($\alpha = \beta$). то говорят, что игра имеет *седловую точку* и чистую цену игры $\gamma = \alpha = \beta$. Стратегии A_i* и B_j*, позволяющие достичь этого значения, называются оптимальными, а пара оптимальных стратегий (A_i*, B_j*) называется седловой точкой матричной игры.

Игра, которая имеет седловую точку, решается в *чистых стратегиях*, т. е. рекомендуется каждому игроку применять одну свою стратегию A_i* и B_j*. Тогда игроку *A* гарантировано, что он получит выигрыш, не меньший чистой цены игры (γ). А игроку *B* гарантировано, что он получит проигрыш, не больший чистой цены игры (γ).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Найдем решение игры для примера 2.

Будем записывать величины α_i в дополнительном столбце справа, а величины β_j - в дополнительной строке внизу платежной матрицы:

Решение игры для примера 2

Стратегии	$B_1(4)$	$B_2(5)$	$B_3(6)$	α_i
$A_1(4)$	**0**	**-1**	**-2**	**-2**
$A_2(5)$	**1**	**0**	**-1**	**-1**
$A_3(6)$	**2**	**1**	**0^***	**0**
β_j	**2**	**1**	**0**	

Если игрок *A* выбирает чистую стратегию A_1 (записывает число 4), то его минимальный выигрыш составит

$$\alpha_1 = min(0;-1;-2) = -2$$

Аналогично находятся значения α_i для каждой строки (см. последний столбец в таблице). Наибольший из минимальных выигрышей стратегий (нижняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_{i} \alpha_i = 0.$$

Нижней цене игры соответствует стратегия A_3. Таким образом, если игрок A выбирает стратегию A_3 (записывает число 6), то ему гарантирован выигрыш, не меньший $\alpha = 0$.

Если игрок B выбирает чистую стратегию B_1 (записывает 4), то его максимальный проигрыш будет выглядеть следующим образом:

$$\beta_1 = max(0;1;2) = 2.$$

Аналогично находим максимальный проигрыш для каждого столбца (см. последнюю строку в таблице). Наименьший из максимальных проигрышей (верхняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\beta = \min_{j} \beta_j = 0.$$

Верхней цене игры соответствует стратегия B_3. Таким образом, если игрок *B* выбирает стратегию B_3 (записывает число 6), то ему гарантирован проигрыш, не больший $\beta = 0$.

Поскольку $\alpha = \beta$, то игра *имеет седловую точку* и решение в чистых стратегиях. Чистая цена игры равна 0. Оптимальная стратегия игрока *A* – A_3. Оптимальная стратегия игрока *B* - B_3. Игрокам рекомендуется выбирать свои оптимальные стратегии.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha<\beta$, то решением игры для каждого игрока будет ***смешанная стратегия***, состоящая *в применении им двух и более чистых стратегий с определенными частотами*.

Однако, применение игроками смешанных стратегий имеет смысл только тогда, когда *данная игра проводится ими многократно*.

В случае *однократно проводимой игры*, не имеющей седловой точки, *дать какие-либо содержательные рекомендации игрокам не представляется возможным*.

Смешанной стратегией игрока *A* называется вектор

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

где p_i - вероятность, с которой игрок *A* выбирает свою чистую стратегию A_i. Компоненты вектора *p* удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i \geq 0 \;\; (i = \overline{1, m}) \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанной стратегией игрока *B* называют вектор

$$\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где q_j - вероятность (частота) применения игроком B его чистой стратегии B_j. При этом

$$q_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}) \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Решить задачу в смешанных стратегиях означает найти такие оптимальные смешанные стратегии $\overline{p^*}$ и $\overline{q^*}$ которые доставляют игроку *А* максимальный средний выигрыш, а игроку *В* - минимальный средний проигрыш. *Ценой игры* (γ) при этом называется величина среднего выигрыша игрока *А* (среднего проигрыша В), приходящегося на одну партию.

Можно показать, что цена игры всегда удовлетворяет условию $\gamma \le \alpha \le \beta$.

Следовательно, если каждый игрок придерживается своих смешанных стратегий при многократном повторении игры, то он получает более выгодный для себя результат, чем применяя «перестраховочные» стратегии, соответствующие α и β. Каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как ему это невыгодно.

Чистые стратегии игроков, имеющие ненулевые вероятности в его смешанной стратегии, называются *активными.*

Пример 5. Применим принцип минимакса к платежной матрице из примера 3, рассчитав нижнюю и верхнюю цены игры.

Расчет нижней и верхней цены игры для примера 3

Стратегии	$B_1=(3,0)$	$B_2=(2,1)$	$B_3=(1,2)$	$B_4=(0,3)$	α_i
$A_1=(4,0)$	4	2	1	0	0
$A_2=(3,1)$	1	3	0	-1	-1
$A_3=(2,2)$	-2	2	2	-2	-2
$A_4=(1,3)$	-1	0	3	1	-1
$A_5=(0,4)$	0	1	2	4	0
β_j	4	3	3	4	

Минимальный выигрыш игрока *А* при применении им стратегии A_1 составит $\alpha_i = min\ (4;\ 2;\ 1;\ 0) = 0$ (минимум в первой строке). Аналогично находятся величины α_i для остальных строк.

Нижняя цена игры будет равна:

$$\alpha = \max_{i} \alpha_i = max\ (0; -1; -2; -1; 0) = 0.$$

Таким образом, игроку *А* гарантирован выигрыш не меньший нуля, если он будет придерживаться стратегии A_1 (все отделы на первый проект) или стратегии A_5 (все отделы на второй проект).

Максимальный проигрыш игрока *B* при применении им стратегии B_1 будет равен:

$$\beta_1 = max\ (4;\ 1;\ -2;\ -1;\ 0) = 4$$

(максимум в первом столбце). Аналогично находятся значения β_j для остальных столбцов.

Верхняя цена игры будет равна:

$$\beta = \min_j \beta_j = min\ (4;\ 3;\ 3;\ 4) = 3.$$

Игроку *B* гарантировано, что он проиграет не больше 3 баллов, если будет придерживаться стратегии B_2 (два отдела на первый проект и один на второй) или B_3 (один отдел на первый проект и два на второй).

Поскольку в данном примере нижняя цена игры не равна верхней: ($\alpha = 0 < \beta = 3$), то игра в чистых стратегиях решения не имеет. Ее следует искать в смешанных стратегиях, если известно, что она реализуется не один раз, а многократно.

Тогда для игрока *A* следует найти вектор

$$\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$$

Каждая компонента такого вектора p_i есть вероятность (частота), с которой нужно выбирать стратегию A_i. Для игрока *B* нужно найти вектор

$$\bar{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, некоторые ***общие выводы***:

- В случае игры с седловой точкой игрокам выгодно придерживаться максиминной и минимаксной стратегий и не выгодно отклоняться от них. В таких случаях про игру говорят, что в ней имеет место ***равновесие в чистых стратегиях***.
- Возможна игра и с несколькими седловыми точками. Тогда игра имеет несколько оптимальных решений, но *с одинаковой ценой игры*.

- Чаще встречаются *матричные игры без седловой точки*, когда **$\alpha < \beta$**, и тогда для нахождения решения игры используются *смешанные стратегии*.

- **Смешанная стратегия** игрока - вектор, каждый из компонентов которого - *относительная частота использования игроком соответствующей чистой стратегии*.

- Справедливы теоремы:

Теорема 1 - Основная теорема теории матричных игр.

Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Теорема 2.

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок свои стратегии (в том числе и чистые стратегии).

3. Решение игры в смешанных стратегиях путем сведения к ЗЛП

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки **=>** *игра решается в смешанных стратегиях*.

Будем считать, что *все элементы платежной матрицы неотрицательны*. Если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить достаточно большое число L, которое переводит платежи в область неотрицательных значений.

При этом цена игры увеличится на *L*, а смешанные стратегии игроков не изменятся. Если все выигрыши игрока *A* неотрицательны, то можно принять, что средний выигрыш $\gamma > 0$.

Применение игроком *A* оптимальной смешанной стратегии $\overline{p^*} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока *B*, средний выигрыш, не меньший цены игры (γ).

Допустим, что игрок *A* применяет свою оптимальную стратегию $\overline{p^*}$, а игрок *B* - свою чистую стратегию B_j. Тогда средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока *A* можно рассчитать по формуле

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + a_{mj}p_m, \quad j = \overline{1, n}.$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше цены игры γ, можем записать условия:

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + a_{mj}p_m \geq \gamma, \quad j = \overline{1,n}.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на $\gamma > 0$, получим следующее:

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + \ldots + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \geq 1, \quad j = \overline{1,n}$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы игры; p_i (i =1, 2, ..., m) – вероятности, с которыми игрок А выбирает одну из своих стратегий; γ – средняя цена игры.

Введем новые обозначения:

$$x_i = \frac{p_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда неравенства выше можно записать в следующем виде:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + a_{mj}x_m \geq 1, \quad j = \overline{1, n},$$

где все $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), так как $p_i \geq 0$, $\gamma > 0$.

Компоненты вектора p являются вероятностями событий, образующих полную группу. Поэтому они удовлетворяют следующему условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Учитывая соотношение $x_i = \dfrac{p_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, m}.$, получим:

$$x_1\gamma + x_2\gamma + \ldots + x_m\gamma = 1,$$

т. е. переменные x_i удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Поскольку игрок *A* стремится максимизировать свой средний выигрыш γ, обратная ему сумма переменных x_i должна быть наименьшей. Получаем целевую функцию задачи:

$$F(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min$$

Таким образом, задача решения матричной игры сводится к ЗЛП, в которой требуется найти неотрицательные значения переменных $x_i \ (i=\overline{1,m})$, минимизирующие линейную функцию и удовлетворяющие линейным ограничениям:

$$F=\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min; \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \ge 1 \quad (j=\overline{1,n}); \\ x_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}). \end{cases}$$

$$x_i=\frac{p_i}{\gamma}, \quad i=\overline{1,m}$$

p_i – вероятности, с которыми игрок А выбирает одну из своих стратегий; γ – средняя цена игры.

Решив данную задачу, найдем цену игры по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Вероятности применения игроком A его чистых стратегий рассчитаем по следующей формуле:

$$p_i = x_i \gamma = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Для определения смешанной стратегии игрока B нужно решить двойственную задачу:

$$F_Д = \sum_{j=1}^{n} z_j \to \max; \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le 1 \quad (i = \overline{1, m}); \\ z_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Решив двойственную задачу, найдем оптимальные значения переменных z_j. Поскольку рассматривается игра с нулевой суммой, средний проигрыш игрока B, приходящийся на одну партию, равен выигрышу игрока A, т. е. удовлетворяет следующему равенству:

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Вероятности применения игроком B его чистых стратегий определяются по формуле

$$q_j = z_j \gamma = \frac{z_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пример 6.

Решим *в смешанных стратегиях* игру о двух КБ, платежная матрица которой была составлена в примере 3.

Прежде всего, прибавим ко всем элементам платежной матрицы число 2, чтобы перевести их в область неотрицательных значений.

Платежная матрица для примера 3

Стратегии	$B_1=(3,0)$	$B_2=(2,1)$	$B_3=(1,2)$	$B_4=(0,3)$
$A_1=(4,0)$	**4**	**2**	**1**	**0**
$A_2=(3,1)$	**1**	**3**	**0**	**-1**
$A_3=(2,2)$	**-2**	**2**	**2**	**-2**
$A_4=(1,3)$	**-1**	**0**	**3**	**1**
$A_5=(0,4)$	**0**	**1**	**2**	**4**

Цена игры при этом увеличится на 2. Получим платежную матрицу:

Преобразованная платежная матрица

Стратегии	B_1=(3,0)	B_2=(2,1)	B_3=(1,2)	B_4=(0,3)
A_1=(4,0)	**6**	**4**	**3**	**2**
A_2=(3,1)	**3**	**5**	**2**	**1**
A_3=(2,2)	**0**	**4**	**4**	**0**
A_4=(1,3)	**1**	**2**	**5**	**3**
A_5=(0,4)	**2**	**3**	**4**	**6**

Составим задачу линейного программирования, чтобы решить игру для игрока *A:*

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 \geq 1; \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 6x_5 \geq 1; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Двойственная к ней задача даст решение для игрока *B:*

$$F_д = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \to max$$

$$\begin{cases} 6z_1+4z_2+3z_3+2z_4 \le 1 \\ 3z_1+5z_2+2z_3+z_4 \le 1 \\ 4z_2+4z_3 \le 1 \\ z_1+2z_2+5z_3+3z_4 \le 1 \\ 2z_1+3z_2+4z_3+4z_4 \le 1 \\ z_j \ge 0, \qquad j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Решим исходную задачу с помощью надстройки *Поиск решения* и получим отчет по устойчивости. Значения в графе *Теневая цена (Лагранжа множитель)* отчета по устойчивости есть оптимальные значения двойственных переменных. Оптимальные значения переменных: x_1^*=0.125; x_2^*= 0; x_3^*= 0.03125; x_4^* = 0; x_5^*= 0.125. Из отчета по устойчивости - z_1^*=0.009375; z_2^*= 0.15; z_3^*=0,1; z_4^* = 0.021875.

Значение целевой функции будет равно

$$F = \sum_{i=1}^{5} x_i^* = 0{,}28125$$

Найдем вероятности применения игроком А своих чистых стратегий по формулам:

$$p_1 = \frac{x_1^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}125}{0{,}28125} \approx 0{,}445; \; p_2 = \frac{x_2^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0}{0{,}28125} \approx 0;$$

$$p_3 \approx 0{,}11; \qquad p_4 = 0; \qquad p_3 \approx 0{,}445.$$

Таким образом, у игрока *А* активными являются первая, третья и пятая стратегии. Причем первую стратегию нужно выбирать в 44,5% случаев, третью стратегию - в 11% случаев, а пятую стратегию - также в 44,5% случаев.

Рассчитаем теперь вероятности применения стратегий для игрока *B* по формуле:

$$q_1 = \frac{z_1^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}009375}{0{,}2815} = 0{,}033;$$

$$q_2 = \frac{z_2^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}15}{0{,}2815} = 0{,}533;$$

$$q_3 = \frac{0{,}1}{0{,}2815} = 0{,}356; \quad q_4 = \frac{0{,}021875}{0{,}2815} = 0{,}078.$$

У игрока В все стратегии являются активными, т.е. все их нужно применять с соответствующими частотами.

Цена игры: $\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} z_j^*} = \frac{1}{0,28125} = 3,556.$

Но эта цена игры - для преобразованной платежной матрицы. Чтобы вернуться к исходной игре, следует отнять число 2, которое было прибавлено ко всем элементам платежной матрицы. Итак, цена игры γ =1,556. Таким образом, если игрок *A* будет придерживаться своей смешанной стратегии, ему гарантирован средний выигрыш не меньше, чем 1.556.

Очевидно, это лучший результат, чем при применении *перестраховочной стратегии*, дающей гарантированный выигрыш $\alpha=0$ (пример 4).

Если игрок *B* будет придерживаться своей *смешанной стратегии*, то ему гарантирован средний проигрыш не больше 1.556.

Это также лучше, чем применять перестраховочную стратегию, которая гарантирует проигрыш не более $\beta = 3$ (пример 5).

Соотношение $\alpha < \gamma < \beta$ выполняется.

Еще один **пример перехода к ЗЛП** – *Моделирование конкурентной борьбы двух групп фирм за рынок сбыта продукции*

Есть две группы фирм, выпускающих одну и ту же продукцию. Ассортимент товаров у обеих фирм одинаковый, поэтому между ними постоянно идет борьба на рынке сбыта за покупателя.

Фирма *А* имеет возможность использовать 6 стратегий варьирования ассортиментом продукции.

Фирма *В* имеет только 2 стратегии варьирования ассортиментом продукции.

На основе многолетних наблюдений за взаимодействием фирм на рынке сбыта установлена матрица выигрышей фирмы *А*, т. е. относительного захвата рынка фирмой *А* ($a_{i,j} = \overline{1,6}$- стратегии фирмы *А*, $j = \overline{1,2}$ - стратегии фирмы *В*). При этом $0<a_{ij}< 1$. Обе фирмы в равной степени умны и осторожны.

Фирма *A* ищет такую стратегию $S_A=(x_1, x_2, \ldots, x_6)$, чтобы обеспечить себе максимальный захват рынка сбыта с вероятностью **v**, не зависящей от поведения фирмы *B.*

Аналогично фирма *B* ищет такую стратегию $S_B=(y_1, y_2)$, которая обеспечивала бы ей с вероятностью не больше **v** максимальный захват рынка сбыта у фирмы-конкурента.

Здесь под x_i и y_j понимают вероятности стратегий соответственно фирм A и B.

Соотношения для вероятностной стратегий фирм А и В имеют вид:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1; \qquad y1+y2=1.$$

Условно будем считать, что % представляют собой вероятности захвата рынка. Тогда по формуле полной вероятности независимых событий составим два уравнения для фирмы *A* (на каждую из двух стратегий фирмы *B):*

$$a_{11}\cdot x_1+a_{21}\cdot x_2+a_{31}\cdot x_3+a_{41}\cdot x_4+a_{51}\cdot x_5+a_{61}\cdot x_6 \geq \nu;$$
$$a_{12}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{32}\cdot x_3+a_{42}\cdot x_4+a_{52}\cdot x_5+a_{62}\cdot x_6 \geq \nu;$$
$$0 \leq x_i \leq 1.$$

Аналогично составим уравнения фирмы В (на каждую из шести стратегий фирмы А):

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2 \le v; \qquad a_{21}y_1+a_{22}y_2 \le v;$$

$$a_{31}y_1+a_{32}y_2 \le v; \qquad a_{41}y_1+a_{42}y_2 \le v;$$

$$a_{51}y_1+a_{52}y_2 \le v; \qquad a_{61}y_1+a_{62}y_2 \le v;$$

$$0 \le y_j \le 1.$$

Подставив $y_2=1-y_1$ во все неравенства (5.5) и рассматривая их как уравнения, получим систему уравнений:

$$v = a_{12} + (a_{11} - a_{12})y_1; \qquad v = a_{22} + (a_{21} - a_{22})y_1;$$

$$v = a_{32} + (a_{31} - a_{32})y_1; \qquad v = a_{42} + (a_{41} - a_{42})y_1;$$

$$v = a_{52} + (a_{51} - a_{52})y_1; \qquad v = a_{62} + (a_{61} - a_{62})y_1;$$

$$0 \le y_j \le 1.$$

Для примера пусть платежная матрица $||a_{ij}||$

имеет вид:

A1	$a_{11}=0,54$	$a_{12}=0,75$
A2	$a_{21}=0,64$	$a_{22}=0,36$
A3	$a_{31}=0,19$	$a_{32}=0,91$
A4	$a_{41}=0,56$	$a_{42}=0,60$
A5	$a_{51}=0,37$	$a_{52}=0,85$
A6	$a_{61}=0,46$	$a_{62}=0,76$

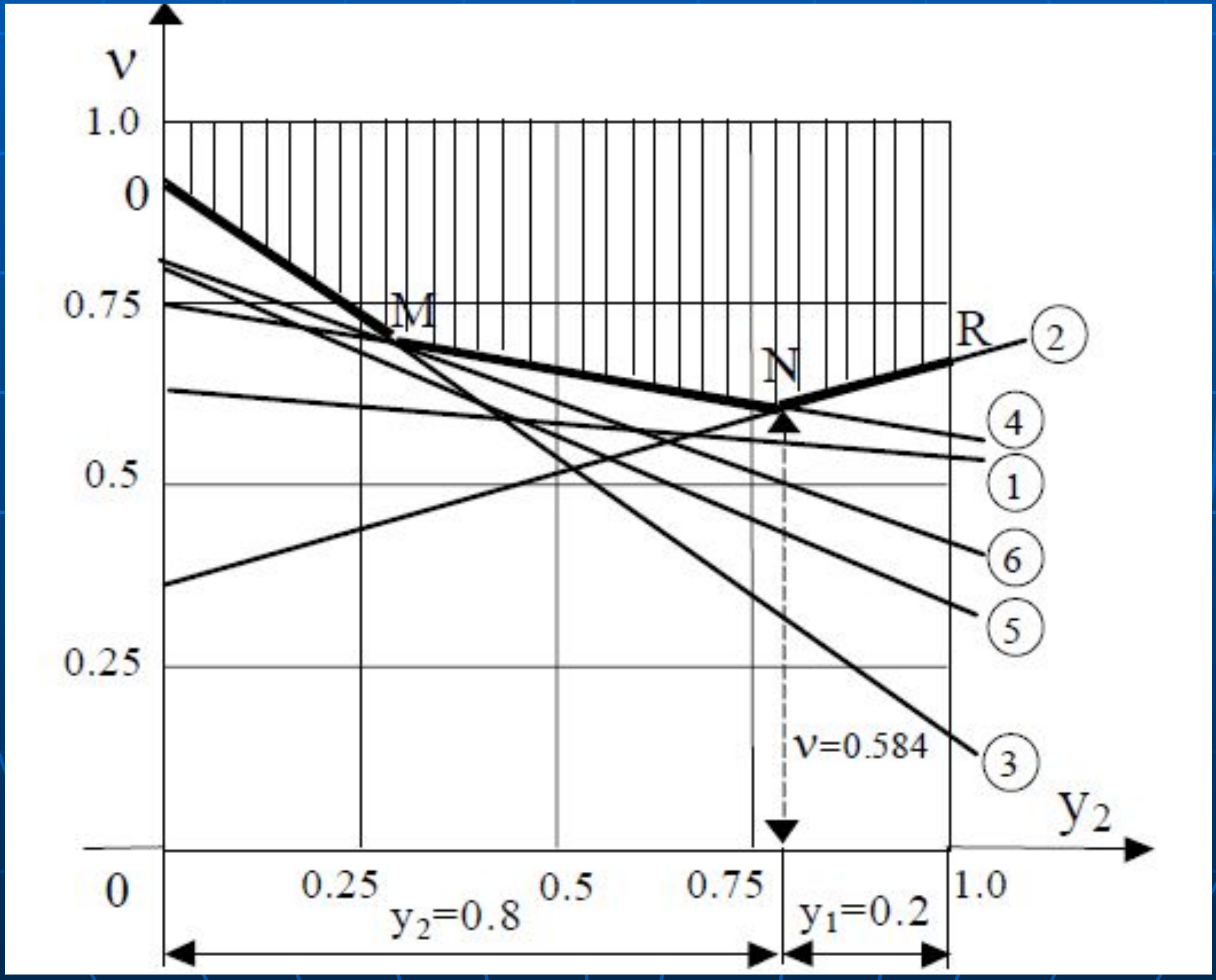
Тогда система уравнений (5.6) примет вид:

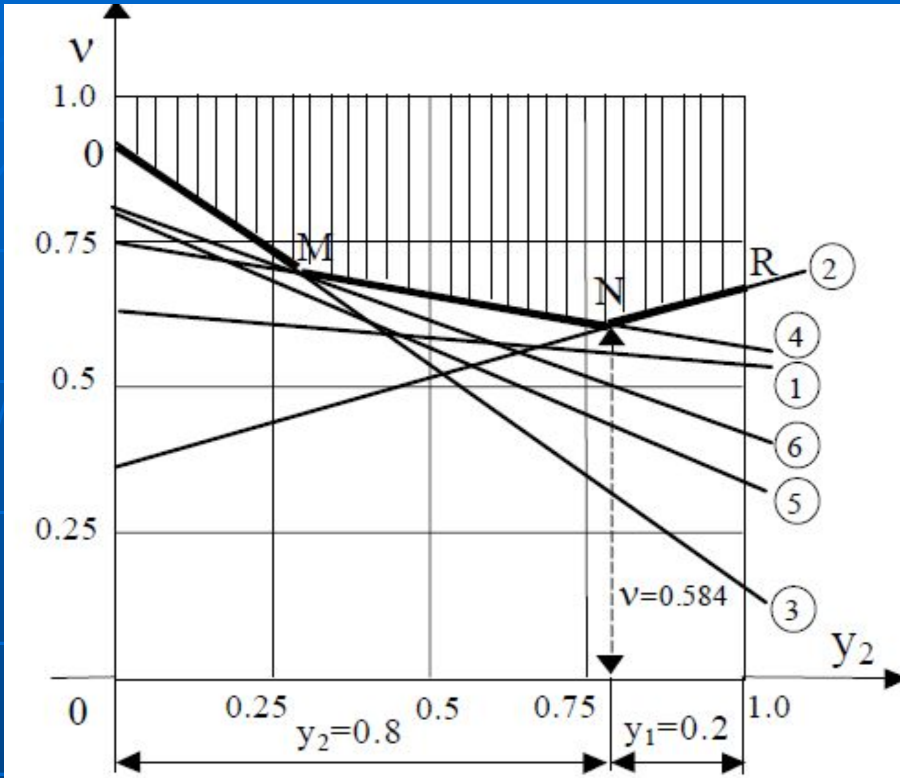
$v = 0{,}75 - 0{,}24 \cdot y_1$; (1) $\quad v = 0{,}36 - 0{,}28 \cdot y_1$; (2)

$v = 0{,}91 - 0{,}72 \cdot y_1$; (3) $\quad v = 0{,}60 - 0{,}02 \cdot y_1$; (4)

$v = 0{,}85 - 0{,}48 \cdot y_1$; (5) $\quad v = 0{,}76 - 0{,}30 \cdot y_1$; (6)

Начертим эти 6 прямых в системе координат v 0 y_1 (см. рис.). Каждая точка заштрихованной области определяет возможное решение, т.к. она удовлетворяет всем рассмотренным неравенствам для фирмы В.





Из рис. ясно, что наименьшая величина v находится на пересечении прямых (2) и (4). Приравняв эти уравнения между собой, получим:

$0{,}36 + 0{,}28y_1 = 0{,}60 - 0{,}02y_1$; $y2 = 1 - y1$, откуда находим, что $y_2 = 0{,}8$ и $y_1 = 0{,}2$.

Таким образом, выбирая стратегию B_2 с вероятностью y_2=0,8 и стратегию B_1 с вероятностью y_1=0,2, фирма В имеет минимальные потери от конкурентной борьбы с более мощной фирмой А.

В результате рынок сбыта между фирмами будет поделен следующим образом:

- фирма *A* захватит $v = 0,584$ рынка сбыта,

- фирма *B* - $1 - v = 0,416$ рынка сбыта.

Для нахождения вероятностей стратегий фирмы *A* поступим следующим образом. Положим $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Подставив значение $v = 0,584$ в уравнения стратегий фирмы *A*, находим: $x_2 = 1/15$, а $x_4 = 14/15$.

В итоге, если фирма *A* выполняет стратегию A_2 с вероятностью 1/15 и стратегию A_4 с вероятностью 14/15, то доля захвата рынка у фирмы *A* будет максимальной, и она составит 0,584, несмотря на поведение фирмы *B*.

Из рисунка выше видно, что если обе фирмы отклонятся от своих стратегий, то они теряют долю захвата рынка сбыта.

4. Игры с природой

Игра с природой – игровая модель, в которой один из участников *безразличен к результату игры*. Свои чистые стратегии такой участник игры реализует не целенаправленно, а случайно.

Под термином «природа» понимают весь *набор внешних обстоятельств*, в которых сознательному игроку приходится принимать решение (например, погодные условия, спрос на рынке, состояние валютной биржи и т. д.).

В играх с природой растет неопределенность при принятии решения сознательным игроком. «Природе» безразличен выигрыш, она может реализовать стратегии, выгодные сознательному игроку. Поэтому в таких играх решение принять сложнее, а выиграть можно больше.

Игра с природой задается платежной матрицей, в которой строки соответствует стратегиям сознательного игрока, а столбцы - состояниям природы.

Примеры задач, которые могут быть сведены к играм с природой:

- Доход от реализации продукции определенного вида зависит от спроса на эту продукцию. Спрос, в свою очередь, определяется состоянием рынка сбыта, действиями конкурентов, экономической ситуацией и другими факторами. Так как не удается заранее точно предсказать значение спроса, то невозможно и точно оценить ожидаемую прибыль.

- Для отопления производственных помещений предприятие закупает топливо. Расход топлива в отопительный период зависит от погодных условий этого периода. В связи с этим невозможно однозначно заранее предсказать расход топлива и, в результате, точно оценить затраты на отопление.

Если имеющихся данных недостаточно для принятия полностью обоснованного решения, то говорят, что имеет место ситуация ***принятия решений в условиях неопределенности***.

В отдельных случаях могут быть известны некоторые вероятностные характеристики изучаемого явления. Поиск оптимального решения в этой ситуации называется ***задачей принятия решений в условиях риска***.

Пример 7. Туристическая фирма «Топ Тур» реализует туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 единиц. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то фирма может заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед. за каждую новую путевку.

Если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованную путевку составят 6 усл. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 усл. ед.

Требуется определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

Решение

Построим платежную матрицу игры.

Сознательный игрок *A* имеет 4 возможные стратегии:

A_1 - заказать 6 путевок;

A_2 - заказать 7 путевок;

A_3 - заказать 8 путевок;

A_4 - заказать 9 путевок.

Потребительский спрос выступает в качестве второго игрока (природы). Возможны следующие состояния природы:

$П_1$ - купят 6 путевок;

$П_2$ - купят 7 путевок;

$П_3$ - купят 8 путевок;

$П_4$ - купят 9 путевок.

Результаты расчета платежной матрицы игры показаны в таблице:

Платежная матрица игры с природой

Стратегия	$П_1$ (купят 6)	$П_2$ (купят 7)	$П_3$ (купят 8)	$П_4$ (купят 9)
A_1 (заказать 6)	60	65	70	75
A_2 (заказать 7)	54	70	75	80
A_3 (заказать 8)	48	64	80	85
A4 (заказать 9)	42	58	74	90

Поясним расчеты некоторых элементов платежной матрицы.

Элемент a_{11} означает прибыль сознательного игрока *А* (фирмы) в ситуации, когда закажут 6 путевок (стратегия A_1), и спрос на них составит 6 шт. (состояние $П_1$). Поскольку при этом все путевки будут проданы, а прибыль от одной путевки равна 10 усл. ед., то общая прибыль составит $a_{11} = 6 \times 10 = 60$ усл. ед.

Элемент a_{11} есть выигрыш игрока *A* (прибыль фирмы), если будет заказано 6 путевок, а спрос составит 7 шт. Тогда 6 заранее заказанных путевок будут проданы и принесут прибыль 6 * 10 = 60 усл. ед., а 7-я путевка будет экстренно заказана. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед., так что прибыль от этой путевки окажется уже не 10, а 10 - 5 = 5 усл. ед. Общая прибыль фирмы составит a_{12} = 60 + 5 = 65 усл. ед.

Элемент a_{21} платежной матрицы есть выигрыш игрока *А*, если будет заказано 7 путевок, а купят только 6. В этом случае прибыль от этих проданных путевок будет равна 6*10 = 60 усл. ед., а 7-я путевка принесет убыток 6 усл. ед. Поэтому общая прибыль фирмы составит a_{21}= 60 - 6 = 54 усл. ед.

Аналогично рассчитываются все остальные элементы платежной матрицы.

Особенность игр с природой - решение достаточно найти *только для сознательного игрока*, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может.

Анализ платежной матрицы игры с природой начинается с выявления и отбрасывания заведомо невыгодных стратегий игрока *А*.

Стратегия является *заведомо невыгодной*, если в соответствующей строке платежной матрицы все значения меньше, чем значения в какой-либо другой строке.

Что касается природы, то *ни одну из ее стратегий отбросить нельзя*.

Как правило, игры с природой решают, используя разные критерии, основанные на здравом смысле, интуиции, практической целесообразности.

Если рекомендации согласно разным критериям:

- *совпадают*, то принимается рекомендуемое решение;
- *противоречат друг другу*, то нужно выбрать ту стратегию, на которую указывает большее количество критериев, либо привлечь дополнительную информацию.

4.1. Критерии, основанные на известных вероятностях состояний природы

Критерий Байеса

Иногда на основе данных статистических наблюдений можно определить вероятности состояний природы, например:

$$q_1 = P(П_1);\ q_2 = P(П_2);\ \ldots;\ q_n = P(П_n).$$

Причем $q_j \geq 0\,(j = \overline{1, n})$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, так как все состояния природы составляют полную группу событий.

Среднее значение (матожидание) выигрыша $\overline{\alpha_i}$, который получит игрок A при применении им стратегии A_i, можно рассчитать по формуле

$$\overline{\alpha_i} = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n \quad (i = \overline{1, m}).$$

Согласно критерию Байеса, в качестве оптимальной выбирается та из стратегий A_i, которая соответствует максимальному математическому ожиданию выигрыша. Это можно выразить следующей формулой:

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha_i} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}.$$

Критерий Байеса-Лапласа

Если можно считать, что все состояния природы равновероятны, т. е. удовлетворяют следующему условию:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n},$$

то в качестве оптимальной выбирается та стратегия, которая обеспечивает максимальное среднее арифметическое значение выигрыша. Это можно выразить формулой:

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{a}_i = \max_i \frac{1}{\text{n}} \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} .$$

Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий)

В отдельных случаях может иметь место ситуация, когда каким-либо образом (например, на основании статистических данных или прогнозов экспертов) могут быть определены вероятности p_j внешних состояний (состояний природы):

$$F_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, полагая

что процесс принятия решений повторяется большое число раз, можно на основании известных вероятностей $(p_1, p_2, ..., p_n)$ вычислить ожидаемую среднюю эффективность $\bar{e}_i$ принятия решения E_i: $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_{i,j}$, $i = 1, 2, ..., m$, где p_j – вероятность внешнего состояния F_j $(j = 1, 2, ..., n)$.

Оценочная функция BL-критерия имеет вид

$$Z_{BL} = \max_i \bar{e}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_{i,j},$$

т. е. в качестве оптимального будет рекомендовано то решение E_i, которому соответствует наибольшая ожидаемая эффективность.

У*словия применения BL-критерия*:

1) вероятности внешних состояний p_j (j=1, 2…n) известны и *не меняются с течением времени*;

2) решение реализуется *большое число раз* (теоретически - бесконечно много раз);

3) при небольшом числе реализаций решения допускается *некоторый риск*.

4.2. Критерии, используемые в условиях полной неопределенности, т. е. когда вероятности состояний природы неизвестны

Максиминный критерий Вальда

Согласно этому критерию выбирается та стратегия, которая гарантирует максимальный выигрыш в наихудших условиях, т. е. обеспечивается равенство

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Критерий Вальда выражает позицию «крайнего пессимизма», и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер.

Максиминный критерий Вальда (ММ-критерий) иногда называют «позицией крайнего пессимизма».

Идея применения ММ-критерия: предполагая, что внешние условия могут сложиться наиболее неблагоприятным образом для лица, принимающего решение, следует выбрать тот вариант решения E_i , который *будет лучшим в этих наихудших условиях*.

Применение ММ-критерия оправдано в тех случаях, когда:

1) о вероятностях появления внешних состояний F_j ничего *не известно*;

2) решение реализуется *один или малое число раз*;

3) ситуация принятия решения *не допускает риска*.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска)

На основе платежной матрицы можно рассчитать соответствующую матрицу рисков игры. ***Риском*** называется разность между максимально возможным при данном состоянии природы выигрышем и тем выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i. Максимальный выигрыш при состоянии природы $П_j$, (максимум в j-м столбце) обозначим $β_j$:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j=\overline{1,n})$$

Риск игрока *A* при применении им стратегии A_i в условиях Π_j определяется по формуле:

$$r_{i,j} = \beta_j - a_{i,j} \qquad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n})$$

При этом всегда $r_{i,j} > 0$.

Согласно критерию Сэвиджа выбирается та стратегия, которая *в наихудших условиях дает наименьший риск*, т. е. обеспечивается следующим равенством:

$$r = \min_{i} \max_{j} r_{i,j}$$

Этот критерий также соответствует позиции крайнего пессимизма, но здесь пессимизм понимается в ином свете: *рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решений*.

Идея применения критерия Сэвиджа (S-критерия) базируется на использовании *вспомогательной функции потерь* $r_{i,j}=r(E_i,F_j)$, значения которой вычисляются на основании соотношения:

$$r_{i,j} = \max_i e_{i,j} - e_{i,j}$$

Матрицу элементов $\| r_{i,j} \|$ иногда называют *матрицей рисков* или *матрицей сожалений*, т.к. ее элементы численно выражают «величину сожаления» лица, принимающего решение о том, что при внешнем состоянии F_j принято решение E_i, а не самое лучшее для этого внешнего состояния решение.

Равенство нулю значения $r_{i,j}$ указывает на то, что решение E_i является оптимальным при внешнем состоянии F_j.

Используя этот критерий, для каждого из возможных вариантов принимаемых решений необходимо определить значение $r_i = \max r_{ij}$, и в качестве оптимального будет рекомендован выбор того решения E_i, которое обращает в минимум величину r_i .

Условия применения S-критерия:

1) о вероятностях внешних состояний F_j ничего неизвестно;

2) решение реализуется малое число раз;

3) при небольшом числе реализаций решения допускается некоторый риск.

Критерий Гурвица

Оптимальной считается чистая стратегия A_i, найденная из условия:

$$S = \max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij}\right),$$

где λ - *коэффициент пессимизма*, принимающий значения $0 < \lambda < 1$.

При **$\lambda = 1$** критерий Гурвица превращается в критерий Вальда («крайний пессимизм»),

а при **$\lambda = 0$** - в критерий «крайнего оптимизма», когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш.

При **$0 < \lambda < 1$** получается нечто среднее между тем и другим. В связи с этим критерий Гурвица называют также критерием «пессимизма-оптимизма».

Величина λ выбирается исходя из опыта и здравого смысла. Чем ответственнее ситуация, тем ближе к 1 выбирается λ.

Пример 8. Применим различные критерии для решения игры с природой из примера 7.

1. Допустим, для примера 7 известны вероятности состояний природы, т. е. спроса на путевки:

$$q_1 = 0.2; \quad q_2 = 0.3; \quad q_3 = 0.3; \quad q_4 = 0.2.$$

Тогда средний выигрыш (математическое ожидание) для каждой стратегии игрока ***А*** следующий:

$\bar{\alpha}_1 = 60 \cdot 0.2 + 65 \cdot 0.3 + 70 \cdot 0.3 + 75 \cdot 0.2 = 67{,}5;$

$\bar{\alpha}_2 = 54 \cdot 0.2 + 70 \cdot 0.3 + 75 \cdot 0.3 + 80 \cdot 0.2 = 70{,}3;$

$\bar{\alpha}_3 = 48 \cdot 0.2 + 64 \cdot 0.3 + 80 \cdot 0{,}3 + 85 \cdot 0.2 = 69.8;$

$\bar{\alpha}_4 = 42 \cdot 0.2 + 58 \cdot 0.3 + 74 \cdot 0.3 + 90 \cdot 0.2 = 66.$

Наибольший средний выигрыш дает стратегия *А2*(* $\bar{\alpha}_2 = 70{,}3$ *)**.** Таким образом, по критерию Байеса, следует выбрать вторую стратегию (заказать 7 путевок).

2. Рассмотрим другую ситуацию. Если известно, что все состояния спроса на путевки равновероятны, то можно применить критерий Лапласа. Рассчитаем для каждой стратегии игрока *A* среднее арифметическое значение выигрыша путем следующих вычислений:

$\bar{\alpha}_1 = (60 + 65 + 70 + 75) : 4 = 67{,}5;$

$\bar{\alpha}_2 = (54 + 70 + 75 + 80) : 4 = 69.75;$

$\bar{\alpha}_3 = (48 + 64 + 80 + 85) : 4 = 69.25;$

$\bar{\alpha}_4 = (42 + 58 + 74 + 90) : 4 = 66.$

Наибольший средний выигрыш соответствует стратегии A_2.

Таким образом, сознательному игроку (фирме) рекомендуется применять вторую стратегию.

3. Если о вероятностях состояния спроса вообще ничего не известно, то следует применить критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

К платежной матрице игры добавим два столбца, в которых рассчитаем минимальное и максимальное значения выигрыша для каждой стратегии.

Расчеты для критериев Вальда и Гурвица

Стратегии	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	60	65	70	75	60	75
A_2	54	70	75	80	54	80
A_3	48	64	80	85	48	85
A_4	42	58	74	90	42	90

По критерию Вальда оптимальной является стратегия A_1 (заказать 6 путевок), так как ей соответствует наибольшее значение в столбце минимальных выигрышей:

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij} = \max(60; 54; 48; 42) = 60$$

Вычислим значения показателя S_i для критерия Гурвица, задав параметр λ=0,7:

$$S_1=0,7\cdot60+0,3\cdot75=64,5;$$

$$S_2=0,7\cdot54+0,3\cdot80=61,8;$$

$$S_3=0,7\cdot48+0,3\cdot85=59,1;$$

$$S_4=0,7\cdot42+0,3\cdot90=56,4.$$

Так как наибольшим значением показателя S_i является S_1=64,5, то по критерию Гурвица оптимальной считается стратегия A_1 (заказать 6 путевок)

Чтобы применить критерий Сэвиджа, рассчитаем матрицу рисков. Для этого найдем максимально возможный выигрыш для каждого состояния природы по формуле (3.15). Получим следующие результаты:

$\beta_1 = \max(60; 54; 48; 42) = 60$ (максимум в первом столбце);

$\beta_2 = \max(65; 70; 64; 58) = 70;$

$\beta_3 = \max(70; 75; 80; 74) = 80;$

$\beta_4 = \max(75; 80; 85; 90) = 90.$

Матрица рисков игры с природой

Стратегии	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$max\ r_{i,j}$
A_1	0	5	10	15	15
A_2	6	0	5	10	10
A_3	12	6	0	5	12
A_4	18	12	6	0	18

Для каждой стратегии A_i рассчитаем максимальный риск и запишем в правый дополнительный столбец матрицы. Минимальное значение в этом столбце равно 10. Ему соответствует стратегия A_2 (заказать 7 путевок), которая и будет оптимальной по критерию Сэвиджа.

Таким образом, если в данной задаче о вероятностях состояния природы ничего не известно, то следует применить стратегию A_1, на которую указали два критерия из трех.

Пример 9

Постановка задачи. Для обеспечения содержания автомобильных дорог в зимний период ДРСУ осенью производит заготовку противогололедных материалов (ПГМ), представляющих собой смесь песка и соли. На основании статистических данных ДРСУ известно, что расход ПГМ в течение зимы может составлять от $a_1 = 3$ до $a_1 = 6$ тысяч тонн.

Очевидно, что на будущую зиму имеет смысл заготавливать ПГМ в соответствующих объемах (т. е. не менее a_1 = 3 и не более a_1 = 6 тонн). Для упрощения расчетов предположим, что объем заготовки ПГМ может выражаться только целым числом тысяч тонн: 3, 4, 5, 6.

Если запасенного объема не хватит, то зимой потребуется дополнительно заготавливать ПГМ, что приведет к большим потерям, по сравнению с заготовкой ПГМ в осенний период.

С другой стороны, если весь объем ПГМ не израсходуется в течение зимы, то его хранение в течение летнего периода также невыгодно.

Допустим, известны следующие значения: стоимость заготовки 1 тыс. тонн ПГМ:

в осенний период c = 10 ден. ед.;

в зимний период d = 13 ден. ед.

Затраты на хранение 1 тыс. тонн неиспользованных ПГМ f = 2 ден. ед.

Требуется составить матрицу принятия решений и проанализировать рассматриваемую ситуацию, используя:

1) ММ-критерий;
2) критерий Сэвиджа;
3) критерий Байеса-Лапласа при двух векторах вероятностей внешних состояний $p' = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\right)$ и $p'' = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4)$.

Сделать вывод по результатам применения каждого из критериев.

Решение. Составим матрицу принятия решений. Внешние условия F_j ($j = 1,2,\dots n$) представляют собой возможные варианты расхода ПГМ в течение зимнего периода:

F_1 – расход ПГМ в течение зимы составит 3 тыс. тонн;

F_2 – расход ПГМ в течение зимы составит 4 тыс. тонн;

F_3 – расход ПГМ в течение зимы составит 5 тыс. тонн;

F_4 – расход ПГМ в течение зимы составит 6 тыс. тонн;

В соответствии с этим возможны 4 варианта принимаемых решений:

E_1 - заготовить в осенний период 3 тыс. тонн ПГМ;

E_2 - заготовить в осенний период 4 тыс. тонн ПГМ;

E_3 - заготовить в осенний период 5 тыс. тонн ПГМ;

E_4 - заготовить в осенний период 6 тыс. тонн ПГМ.

Вычислим значения элементов матрицы принятия решений $e_{i,j}$. В данном случае все элементы будут отрицательными, т.к. они отражают затраты ДРСУ, связанные с заготовкой ПГМ в осенний период, и, возможно, дополнительные затраты, вызванные необходимостью хранения неиспользованного объема ПГМ или их дополнительной заготовкой в зимний период.

Рассмотрим, например, ситуацию (E_1,F_1). Она соответствует тому, что осенью ДРСУ произвело заготовку 3 тыс. тонн ПГМ, и в течение зимнего периода потребовалось 3 тыс. тонн ПГМ. В этом случае расходы составят $c \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$ *ден.ед.* Следовательно, $e_{1,1} = -30$.

Ситуация (E_1,F_2) означает, что в осенний период было заготовлено 3 тыс. тонн, а зимой потребовалось 4 тыс. тонн ПГМ. В этом случае к расходам на заготовку ПГМ в осенний период добавятся затраты на заготовку одной тысячи тонн ПГМ в зимний период:

$$e_{1,2}=-(c\cdot 3+d\cdot 1)=-(10\cdot 3+13\cdot 1)=-43$$

Рассмотрим ситуацию (E_2,F_1). Она соответствует тому, что в осенний период ДРСУ заготовило 4 тыс. тонн ПГМ, а в зимний период их потребовалось только 3 тыс. тонн. В этом случае одну тонну потребуется хранить в течение летнего периода. Расходы ДРСУ в этой ситуации $c \cdot 4 + f \cdot 1$ =10 $\cdot$ 4+2 $\cdot$ 1=42, следовательно, $e_{2,1}$=-42.

Подобным образом вычисляются все значения остальных элементов матрицы принятия решений:

$e_{1,3}=-(c\cdot 3+d\cdot 2)=-(10\cdot 3+13\cdot 2)=-56;$

$e_{1,4}=-(c\cdot 3+d\cdot 3)=-(10\cdot 3+13\cdot 3)=-69;$

$e_{2,2}=-c\cdot 4=-10\cdot 4=-40;$

$e_{2,3}=-(c\cdot 4+d\cdot 1)=-(10\cdot 4+13\cdot 1)=-53;$

$e_{2,4}=-(c\cdot 4+d\cdot 2)=-(10\cdot 4+13\cdot 2)=-66;$

$e_{3,1}=-(c\cdot 5+f\cdot 2)=-(10\cdot 5+2\cdot 2)=-54;$

$e_{3,2}=-(c\cdot 5+f\cdot 1)=-(10\cdot 5+2\cdot 1)=-52;$

$$e_{3,3}=-c\cdot 5=-10\cdot 5=-50;$$

$$e_{3,4}=-(c\cdot 5+d\cdot 1)=-(10\cdot 5+13\cdot 1)=-63;$$

$$e_{4,1}=-(c\cdot 6+f\cdot 3)=-(10\cdot 6+2\cdot 3)=-66;$$

$$e_{4,2}=-(c\cdot 6+f\cdot 2)=-(10\cdot 6+2\cdot 2)=-64;$$

$$e_{4,3}=-(c\cdot 6+f\cdot 1)=-(10\cdot 6+2\cdot 1)=-62;$$

$$e_{4,4}=-c\cdot 6=-10\cdot 6=-60;$$

Матрица принятия решений имеет следующий вид:

$e_{i,j}$	F_1	F_2	F_3	F_4
E_1	-30	-43	-56	-69
E_2	-42	-40	-53	-66
E_3	-54	-52	-50	-63
E_4	-66	-64	-62	-60

Применим к анализу рассматриваемой ситуации указанные в задании критерии.

1. Проанализируем ситуацию, используя максиминный критерий. Определим значения $e_{i,r} = \min_j e_{i,j}$, оценивающие эффективность решения E_i при условии, что обстоятельства сложатся наиболее неблагоприятным для ДРСУ образом:

$e_{i,j}$	F_1	F_2	F_3	F_4	$e_{i,r}$	$\max\limits_{i} e_{i,r}$
E_1	-30	-43	-56	-69	-69	
E_2	-42	-40	-53	-66	-66	
E_3	-54	-52	-50	-63	-63	-63
E_4	-66	-64	-62	-60	-66	

Максимум значения $e_{i,r}$ будет достигнут при реализации решения E_3.

Таким образом, согласно ММ-критерию в качестве оптимального будет рекомендовано решение E_3 – заготовка в осенний период 5 тыс. тонн ПГМ. При использовании этого решения затраты ДРСУ при любых погодных условиях не превысят 63 ден.ед.

2. Для применения критерия Сэвиджа составим матрицу рисков $r_{i,j}$. В каждом столбце матрицы $e_{i,j}$ найдем максимальное значение $max\ e_{i,j}$ и вычислим разности $r_{i,j}=max\ e_{i,j} - e_{i,j}$:

$r_{i,j}$	F_1	F_2	F_3	F_4	$e_{i,r}=\max_j r_{i,j}$	$\min_i e_{i,r}$
E_1	0	3	6	9	9	9
E_2	12	0	3	6	12	
E_3	24	12	0	3	24	
E_4	36	24	12	0	36	

Для каждого из вариантов решений E_i определим максимальное значение риска

$e_{i,r}=max\ r_{i,j}$. j

В качестве оптимального будет рекомендован тот вариант решения, при котором величина $e_{i,r}$ минимизируется. Таким образом, с точки зрения критерия Сэвиджа наилучшим будет являться решение E_1 – заготовка в осенний период 3 тыс. тонн ПГМ.

3. Если известны вероятности возможных значений расхода ПГМ, то для анализа рассматриваемой ситуации можно применить критерий Байеса-Лапласа.

Полагая, что все возможные варианты расхода ПГМ равновероятны, т.е. $p' = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, вычислим для каждого из решений E_i величину $\bar{e}' = \sum_{j=1}^{n} p_{\mathrm{j}}' \cdot e_{ij}$, характеризующую среднюю ожидаемую эффективность решения E_i при большом числе реализаций решения:

$$e_1' = \frac{1}{4}(-30 - 43 - 56 - 69) = -49{,}5;$$

$$e_2' = \frac{1}{4}(-42 - 40 - 53 - 66) = -50{,}25;$$

$$e_3' = \frac{1}{4}(-54 - 52 - 50 - 63) = -54{,}75;$$

$$e_1' = \frac{1}{4}(-66 - 64 - 62 - 60) = -63.$$

В качестве оптимального будет рекомендовано решение E_1 – заготовка в осенний период 3 тыс. тонн ПГМ, так как этому решению соответствует максимум $\bar{e}'$.

Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

r_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4				
E_1	-30	-43	-56	-69	-49,5	-49,5	-56	
E_2	-42	-40	-53	-66	-50,25		-54,5	-54,5
E_3	-54	-52	-50	-63	-54,75		-56	
E_4	-66	-64	-62	-60	-63		-62	

Подобным образом произведем расчеты $\bar{e}'' = \sum_{j=1}^{n} p_{\mathrm{j}}'' \cdot e_{ij}$ для случая, когда вероятности расхода ПГМ описываются вектором $p'' = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4)$ и выберем в качестве оптимального тот вариант решения, которому соответствует максимум $\bar{e}_i''$:

$$\bar{e}_1'' = 0{,}1 \cdot (-30) + 0{,}2 \cdot (-43) + 0{,}3 \cdot (-56) + 0{,}4 \cdot (-69) = -56$$

$$\bar{e}_2'' = 0{,}1 \cdot (-42) + 0{,}2 \cdot (-40) + 0{,}3 \cdot (-53) + 0{,}4 \cdot (-66) = -54{,}5$$

$$\bar{e}_3'' = 0{,}1 \cdot (-54) + 0{,}2 \cdot (-52) + 0{,}3 \cdot (-50) + 0{,}4 \cdot (-63) = -56$$

$$\bar{e}_4'' = 0{,}1 \cdot (-66) + 0{,}2 \cdot (-64) + 0{,}3 \cdot (-62) + 0{,}4 \cdot (-60) = -62$$

Таким образом, при векторе вероятностей $p'' = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4)$ оптимальным будет являться решение E_2 – заготовка в осенний период 4 тыс. тонн ПГМ.

Использованная литература

1. ***Еськова О. И.*** Экономико-математические методы и модели: курс лекций для студентов дневной формы обучения экономических специальностей / О. И. Еськова. - Гомель: УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». 2006.- 168 с.

2. Вентцель Е. С. *Исследование операций.* М., «Советское радио», 1972, 552 стр.

3. Бурдук, Е. Л.

Исследование операций : учеб.-метод, пособие для студентов ФБО специальностей «Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство», «Автомобильные дороги» / Е.Л. Бурдук. И.Н. Кравченя: М-во образования Респ. Беларусь. Белорус. гос. ун-т трансп. - Гомель: БелГУТ. 2008. - 74 с.

4. ***С. И. Жогаль. И. В. Максимей*** Задачи и модели исследования операций. Ч. 1. Аналитические модели исследования операций: Уч. пособие. - Гомель: БелГУТ. 1999. - 110 с.