СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
Лекция 6

Определение случайной величины

- Случайная величина – это величина, принимающая в результате испытания одно из возможных значений, при этом появление того или иного значения является случайным событием.
- Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Дискретная случайная величина и способы ее задания

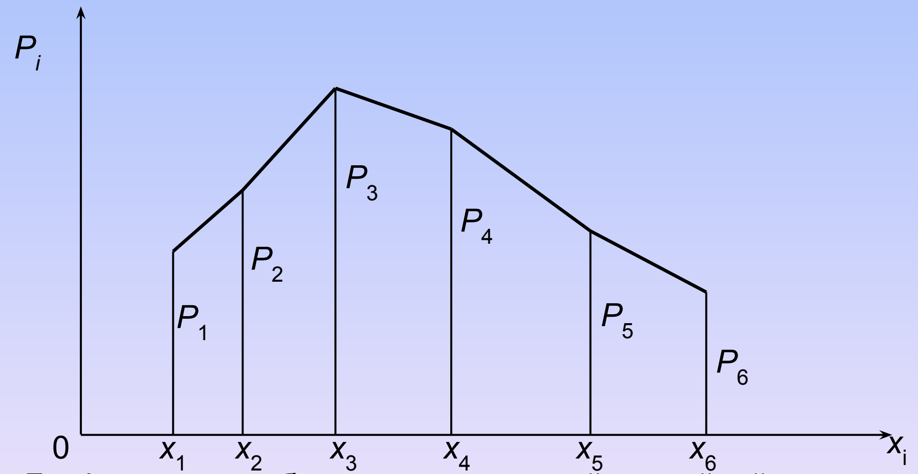
Дискретной случайной величиной называется случайная величина с конечным количеством возможных значений.

Для определения дискретной случайной величины задают закон ее распределения (ряд распре-деления), то есть все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Дискретная случайная величина и способы ее задания

- События, заключающиеся в том, что появится одно из возможных значений случайной величины, являются несовместными и образуют полную группу событий. Сумма вероятностей полной группы событий равна единице:



Графическое изображение дискретной случайной величины в виде многоугольника распределения.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x) = 1$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

- **Математическое ожидание**

$$\mu(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i=x_1\cdot p_1+\ldots+x_n\cdot p_n$$

- **Дисперсия**

$$D(X)=\mu(X^2)-(\mu(X))^2$$, где $$\mu(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 Pi$$

- **Среднее квадратичное отклонение**

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Основные законы распределения дискретных случайных величин

- Формула Бернулли: $P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$

$$P(A) = p, P(\overline{A}) = q$$

- Совокупность полученных вероятностей $Pn(0)$, $Pn(1)$, $Pn(2)$, ...,$Pn(n)$ представляет собой **биномиальное распределение**.

Основные законы распределения дискретных случайных величин

- **Формулу Муавра-Лапласа используют для схемы Бернулли, когда** $n > 10 \quad p \geq 0{,}1$

Вероятности определяют по формулам:

а)

$$P_n(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-np)^2}{npq}}$$

- локальная формула Лапласа;

б)

$$P_n(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z1}^{z2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}})$$

- интегральная формула Лапласа, где $\Phi(z)$- интегральная функция Лапласа

Основные законы распределения дискретных случайных величин

- При тех же условиях, но когда $n > 10$ и $p < 0{,}1$ применяют **формулу Пуассона:**

$$P_n(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu},$$

где $\mu = np$

- При этом:

$$\mu = \mu(X) = D(X); \ \sigma = \sqrt{\mu}$$

Непрерывная случайная величина. Способы ее задания

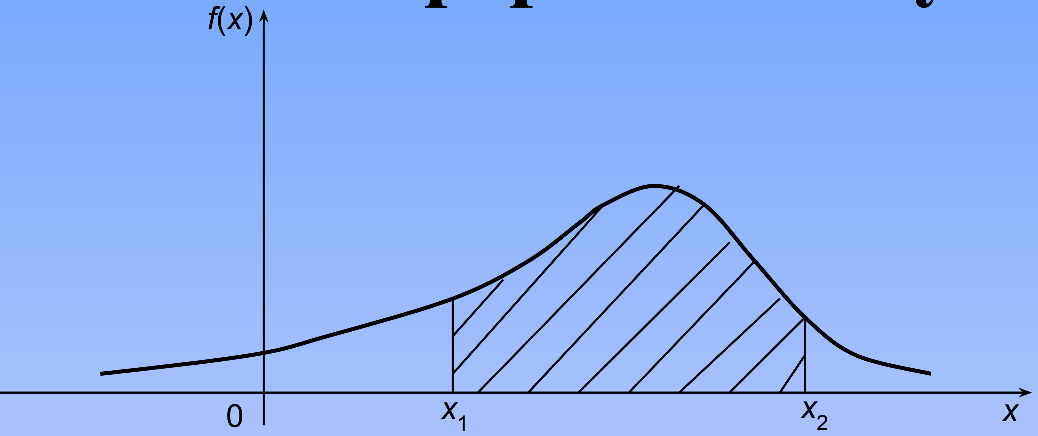
- *Непрерывной случайной величиной* называется случайная величина, которая может принимать любое значение из некоторого интервала (на котором она существует).
- **Интегральная функция распределения** непрерывной случайной величины:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

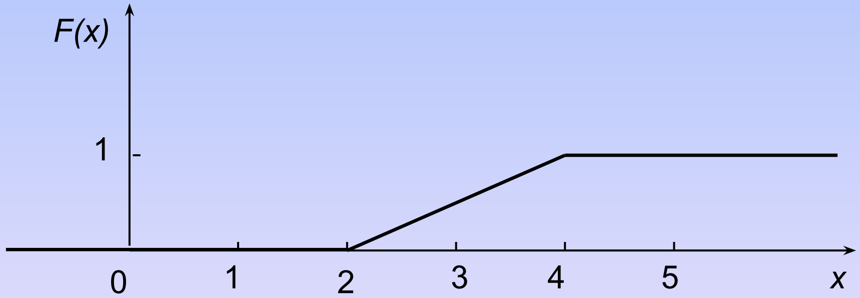
- **Дифференциальная функция распределения** непрерывной случайной величины (функция плотности распределения):

$$f(x) = \frac{dP}{dx} = F'(x)$$

Непрерывная случайная величина.



Графическое задание непрерывной случайной величины в виде функции распределения плотности вероятностей.



Графическое изображение интегральной функции распределения случайной величины

Условие нормирования для непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Числовые характеристики непрерывной дискретной случайной величины

- **Математическое ожидание:** $$\mu(X) = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)dx$$
- **Дисперсия:** $$D(X) = \mu(X^2) - (\mu(X))^2$$

где $$\mu(X^2) = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f(x)dx$$

- **Среднее квадратичное отклонение:** $$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$
- **Вероятность попадания в промежуток:**

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

- 1. Равномерное распределение:

Дифференциальная функция распределения -

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения -

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

- **2. Показательное (экспоненциальное) распределение** непрерывной случайной величини з параметром λ .

Дифференциальная функция распределения –

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Интегральная функция распределения -

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

- **3. Нормальное распределение:**

Дифференциальная функция распределения (функция Гаусса) –

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

–

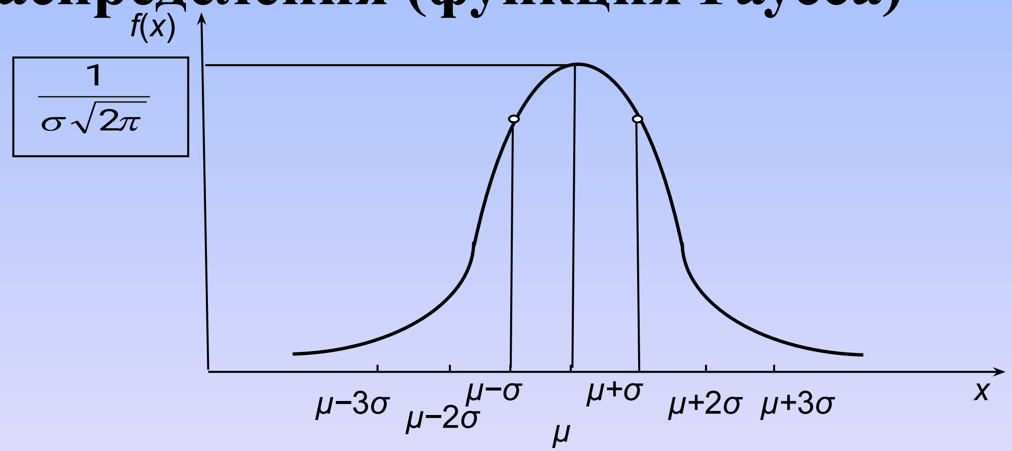


График нормального распределения случайной величины.

Стандартная функция Лапласа

- Если в функции Гаусса взять $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, то получим **нормированную** или стандартную **функцию** (дифференциальную функцию).

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

3. Нормальное распределение

- **Вероятность** попадания нормально распределенной случайной величины в интервал определяется по формуле:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - интегральная функция Лапласа, ее значения находятся по таблице.

- **Правило трех сигм:** если случайная величина нормально распределена, то практически достоверно, то есть с вероятностью, близкой к единице, ее значения лежат на промежутке [μ−3σ; μ+3σ].