



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Содержание



- Основные понятия
- Метод Крамера
- Решение системы методом Крамера
- Метод Гаусса
- Решение системы методом Гаусса
- Матричный метод (с помощью обратной матрицы)
- Решение системы матричным методом

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где - x_1, x_2, x_3 неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$),
 b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю, то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Метод Крамера

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1)$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а определители Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 0 - 9 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 13.$$



Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$



3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$

Метод Гаусса

Ранее рассмотренный метод можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1 . Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2 . Для этого третье уравнение разделим на a'_{32} , умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3 , затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го — x_1 .

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1 . Для этого второе уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{21}} = -2$, а затем сложим с 1-ым уравнением.

Аналогично третье уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{31}} = -2$ а затем сложим с первым.

В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2 . Для этого третье уравнение умножим на $\frac{a'_{22}}{a'_{32}} = -\frac{7}{3}$, и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 8\frac{2}{3}x_3 = -8\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. На этом прямой ход метода Гаусса закончен, начинаем обратный ход.

Из последнего уравнения полученной системы уравнений находим x_3 :

$$x_3 = \frac{-8\frac{2}{3}}{8\frac{2}{3}} = -1.$$

Из второго уравнения получаем: $x_2 = \frac{1}{7}(3 + 3x_3) = \frac{1}{7}(3 + 3 \cdot (-1)) = 0.$

Из первого уравнения находим оставшуюся неизвестную переменную и этим завершаем обратный ход метода Гаусса:

$$x_1 = \frac{1}{2}(9 - 3x_2 + x_3) = \frac{1}{2}(9 - 3 \cdot 0 + (-1)) = 4.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$