Математический анализ

Лекция 9

Лектор: Михайлов Ю.А.

Кафедра 812 «Математика»

2 семестр

Раздел 1. Определенный интеграл.

Раздел 2. Ряды.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Раздел 4. Кратные интегралы.

Функции нескольких переменных

- Дифференцирование сложных ФНП.
- Инвариантность первого дифференциала.
- Градиент и производная по направлению.
- Свойства градиента.
- Дифференцирование неявных ФНП.
- Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

•

Дифференцирование сложных ФНП

Будем (для простоты) рассматривать функции двух переменных. Для функций n переменных все аналогично.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функции $x = x(t), y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, где $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$.

Тогда сложная функция $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$$

Доказательство. Сделаем приращение $\Delta t = t - t_0$. Тогда по условию дифференцируемости функции f

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y + \bar{\bar{o}}(\rho)\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\bar{\bar{o}}(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t}$$

- При $\Delta t \to 0$ получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}(t_0), \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$$

(непрерывность $x(t), y(t)$ в точке t_0),

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0,$$

$$\left|\frac{\rho}{\Delta t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \le C,$$

$$\frac{\bar{\bar{o}}(\rho)}{\rho} \to 0 \text{ (т. к. } \rho \to 0\text{).}$$

Итак, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим нужную формулу, ч. т. д.

- Если переменные x, y зависят не от одной переменной, получим аналогичный вариант формулы производной сложной функции:

для $f(x, y)$ при $x = x(u, v), y = y(u, v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

(при условии дифференцируемости всех функций).

Пример 1

Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t\,, y = \sin t\,.$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= y x^{y-1} \cdot \frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t =$$

$$= \sin t\,(\ln t)^{\sin t - 1} \cdot \frac{1}{t} + (\ln t)^{\sin t} \ln(\ln t) \cdot \cos t\,.$$

В некоторых задачах необходимо переходить от декартовых координат к полярным и наоборот.

- Пусть имеется функция $u(x, y), x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}\, r\cos\varphi\,.$$

Чтобы получить формулы для обратных выражений, найдем обратную матрицу: если

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \text{то}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

Воспользовались матричными уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

•

Пример 2

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$,

$y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – это частная производная:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$; $\dfrac{dz}{dx}$ – это полная производная,

т. е. производная сложной функции $z\big(x, y(x)\big)$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \cdot (x^2 + 1).$$

- # Инвариантность первого дифференциала

Дифференциал ФНП, определенный ранее, называется также первым в отличие от дифференциалов других порядков (второй, третий и т. д.), о которых пойдет речь позже. Его вид для функции $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

не зависит от того, являются ли x, y независимыми переменными или функциями (зависимыми переменными).

Действительно, пусть $x = x(u, v), y = y(u, v)$.

Тогда $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$;

$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$ подставим в df:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right);$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv.$$

- Выражения, стоящие в скобках, соответствуют формуле производной сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Итак,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$$

и форма записи первого дифференциала сохраняется (инвариантна).

• Градиент и производная по направлению

Пусть имеется функция $f(x, y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$. Напомним, что ее градиент – это вектор

$$\operatorname{grad} f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right).$$

Определим производную функции f по любому направлению. Направление можно задать единичным вектором
$\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2), |\overline{\omega}| = 1$

Определение. Производной функции $f(x, y)$ в точке M_0 по направлению $\overline{\omega}$ называется число

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(M_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(M_0 + t\overline{\omega}) - f(M_0)}{t}.$$

Отметим, что при этом точка M_0 получает приращение $t\overline{\omega}, |t\overline{\omega}| = t$ вдоль вектора $\overline{\omega}$.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то $\forall \overline{\omega}$: $|\overline{\omega}| = 1$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(M_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\omega_2 = (\mathrm{grad}\, f(M_0), \overline{\omega}) -$$

скалярное произведение вектора $\mathrm{grad}\, f(M_0)$ и вектора $\overline{\omega}$.

Доказательство. Из определения производной по направлению видно, что

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(M_0) = \frac{dg}{dt}(0),$$

$$\text{где } g(t) = f(x_0 + t\omega_1, y_0 + t\omega_2).$$

Тогда по формуле производной сложной функции двух переменных

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\omega_2$$

и при $t = 0$ получаем нужную формулу, ч.т.д.

Замечание. Если направление задается произвольным ненулевым вектором $\bar{l} = (l_1, l_2)$, то его можно нормировать к длине 1 с сохранением направления:

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{l_1}{|\bar{l}|}, \frac{l_2}{|\bar{l}|}\right).$$

В *n*-мерном случае формула аналогична:
если $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n), |\bar{\omega}| = 1$, то для $f(x), x \in R^n$, в точке x^0

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}}(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\omega_k = (\mathrm{grad}\, f(x^0), \bar{\omega}).$$

Отметим, что единичный вектор своими координатами имеет направляющие косинусы:

$$\bar{\omega} = (\cos\varphi_1, \dots, \cos\varphi_n)$$

Пример 3

Найти производную функции

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} - x^2 z + \frac{y^2}{z}$$ в точке $A(2;\ -1;1)$

по направлению к точке $B(3;\ 1;-1)$.

Во-первых, $\overline{AB} = (1,2,-2)$, тогда

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1+4+4}};\ \ \bar{\omega} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Найдем $\operatorname{grad} f(A)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - 2xz\Big|_A = -1 - 4 = -5;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{2y}{z}\Big|_A = -2 - 2 = -4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2 - \frac{y^2}{z^2}\Big|_A = -4 - 1 = -5;$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(A) = -5 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{-5 - 8 + 10}{3} = -1.$$

Из формулы для производной по направлению можно сделать вывод о её значениях для разных направлений

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(M_0) = (\operatorname{grad} f(M_0), \overline{\omega}) =$$
$$= |\operatorname{grad} f(M_0)| \cdot |\overline{\omega}| \cdot \cos\varphi\,,$$

где $|\overline{\omega}| = 1, \varphi -$ угол между $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\overline{\omega}$ $\Rightarrow -1 \le \cos\varphi \le 1$, причём

$$\max_{\overline{\omega}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}(M_0) = |\operatorname{grad} f(M_0)|$$

и достигается при $\varphi = 0$,

т.е. при $\overline{\omega} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} f(M_0)$.

Отсюда получаем некоторые свойства градиента:

1) Градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.
2) Модуль градиента равен максимальной производной по направлению данной функции в данной точке.

Еще одно свойство:

3) Вектор градиента ортогонален линиям (поверхностям) уровня данной функции

будет подробнее рассмотрено ниже

Дифференцирование неявных ФНП

Пусть функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Теорема. Пусть функция F дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует дифференцируемая функция $z(x, y)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ такая, что $F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0$ в данной окрестности, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

- Не проводя подробного доказательства, отметим, что формулы для производных неявной функции легко получаются из формулы полных производных по x и по y для функции $F\left(x, y, z(x, y)\right) = 0$:

$$0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$0 = \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Пример 4

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$

Продифференцируем обе части по x,

считая, что $z(x, y)$:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 4 + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$(2z + 2)\frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 - x}{z + 1}.$$

Аналогично по y:

$$-4y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \ \ (2z + 2)\frac{\partial z}{\partial y} = 4y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z + 1}.$$

Таким же способом можно найти и dz.

•

Пример 5

Найти dz, если $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

Приравняем дифференциалы от обеих частей и выразим dz:

$$d(yz) = d\big(\operatorname{arctg}(xz)\big);$$

$$zdy + ydz = \frac{1}{x^2z^2+1}(zdx + xdz);$$

$$z(x^2z^2+1)dy + y(x^2z^2+1)dz = zdx + xdz;$$

$$dz(yx^2z^2 + y - x) = zdx - z(x^2z^2+1)dy;$$

$$dz = \frac{z}{yx^2z^2 + y - x}dx - \frac{z(yx^2z^2+1)}{yx^2z^2 + y - x}dy$$

Замечание. При вычислении dz мы нашли

и частные производные функции z:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

- # Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим поверхность, заданную неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Если функция F дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то в этой точке существует касательная плоскость к данной поверхности, её уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

При этом нормаль, т.е. прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, имеет канонические уравнения

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}$$

Отметим, что вектор нормали к касательной плоскости (с точностью до коллинеарности) равен градиенту:

$$\bar{n} = grad\ F(M_0),$$

т.е. $grad\ F(M_0)$ ортогонален поверхности уровня $F(x, y, z) = C$ при $C = 0$, так же будет и при других C.

- Если поверхность задана явно уравнением $z = f(x, y)$, то можно считать $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Тогда

$$\operatorname{grad} F(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

и уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнения нормали

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

•

Пример 6

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболоиду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке $(1, -1, 1)$.

Найдем градиент:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

$$\operatorname{grad} F(M_0) = 2(x_0, y_0, -z_0) = 2(1, -1, -1).$$

Касательная плоскость:

$$1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+1) - 1 \cdot (z-1) = 0;$$

$$x - y - z - 1 = 0.$$

Нормаль:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Пример 7

Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + y + 2z + 9 = 0$.

$$\operatorname{grad} F = (4 - y, -x + 2y, -1)||(4, 1, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4, 1, 2) = -2\operatorname{grad} F,$$

$$1) - 2(4 - y) = 4, y = 6$$

$$2) - 2(-x + 2y) = 1;$$

$$x - 2y = 1/2; x = 1/2 + 12 = 25/2$$

- Итак, точка касания $M_0\left(\frac{25}{2}, 6, 11\right)$,

где $z_0 = 4x_0 - x_0 y_0 + y_0^2 = 50 - \dfrac{25}{2} \cdot 6 + 36 = 11.$

Уравнение касательной плоскости:

$$4 \cdot \left(x - \frac{25}{2}\right) + 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 11) = 0;$$

$$4x + y + 2z - 78 = 0.$$