



# ANSYS в инженерных задачах

Наталья Анатольевна Лыкова



# Система уравнений Навье-Стокса

- Уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0;$$

- Уравнение количества движения (сохранения импульса)

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right);$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости.

# Система уравнений Навье-Стокса

- Уравнение энергии (сохранения энергии)

$$\frac{\partial(\rho h_{\text{tot}})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} h_{\text{tot}}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\tau}) + \vec{V} \cdot \vec{S}_M + S_E$$

$$h_{\text{tot}} = h_{\text{stat}} + \frac{V^2}{2}$$

$$h_{\text{stat}} = h_{\text{stat}}(T, p)$$

- Уравнение состояния

$$\rho = \rho(T, p)$$

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{stat}} + \frac{1}{2} \rho (\vec{U} \cdot \vec{U})$$

$p$   
 $\rho$   
 $V$   
 $T$   
 $t$   
 $h_{\text{tot}}$   
 $h_{\text{stat}}$   
 $S_M$   
 $S_E$   
 $\mu$   
 $\lambda$   
 $\nabla$   
 $\vec{\tau}$

- дифференциальные уравнения в частных производных как первого, так и второго порядка
- наличие нелинейной зависимости членов уравнений от переменных

# «Проблема тысячелетия»



- Необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши для трёхмерных уравнений Навье — Стокса.

Найти вектор скорости и давление, которые удовлетворяют системе уравнений Навье-Стокса и начальному условию  $v(0, x) = g(x)$ .

- за решение Математический институт Клэя назначил премию в 1 млн долларов США

# Решение уравнений



- 10 января 2014 года математик Мухтарбай Отелбаев опубликовал статью, в которой утверждает, что дал полное решение проблемы.
- 6 февраля 2014 года Лауреатом Филдсовской медали Теренсом Тао была опубликована работа, доказывающая невозможность решения проблемы тысячелетия, посвященной задаче Навье-Стокса, существующими на настоящий момент средствами [2].
- По состоянию на 2014 год подтверждённые решения этих уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях.
- В остальных случаях используется **численное моделирование**.

# Пример точного решения

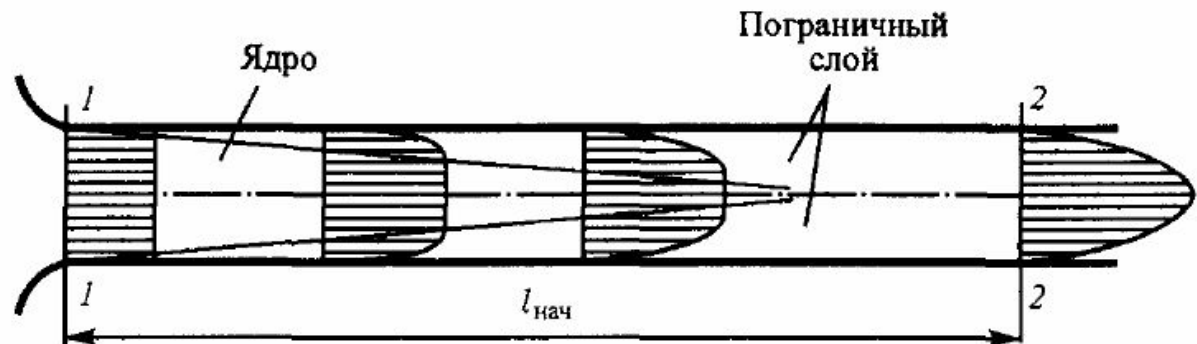
## ■ Течение Пуазейля

ламинарное течение жидкости через каналы в виде прямого кругового цилиндра или слоя между параллельными плоскостями

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2),$$

где

- $v$  — скорость жидкости вдоль трубопровода;
- $r$  — расстояние от оси трубопровода;
- $R$  — радиус трубопровода;
- $p_1 - p_2$  — разность давлений на входе и на выходе из трубы;
- $\eta$  — вязкость жидкости;
- $L$  — длина трубы.





## Дискретизация

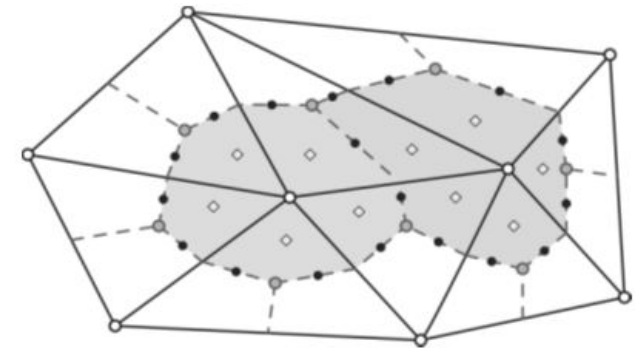
- метод конечных разностей (МКР)
- метод конечных элементов (МКЭ)
- метод конечных объемов (МКО)



- Уравнение неразрывности и количества движения в координатной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \right]$$



- Интегрирование по контрольному объему  $\Omega$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_S \rho V_i dn_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho V_j d\Omega + \int_S \rho V_i V_j dn_i = - \int_S P dn_i + \int_S \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) dn_i + \int_{\Omega} S_{V_j} d\Omega$$

$\Omega$  - контрольный объем

$S$  - контрольная поверхность, ограничивающая контрольный объем

$dn_i$  - дифференциал декартовой составляющей вектора внешней нормали к поверхности

# Метод конечных объёмов

- Дискретная форма интегральных соотношений

$$\Omega \left( \frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} (\rho V_i \Delta n_i)_{ip} = 0$$

$$\Omega \left( \frac{\rho V_j - \rho^0 V_j^i}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} (V_j)_{ip} = \sum_{ip} (P \Delta n_j)_{ip} + \sum_{ip} \left( \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \Delta n_i \right) + \overline{S_{V_j}} \Omega$$

$\Delta t$

$\Delta n_i$

$ip$  - вычисление для точки интегрирования и суммирование по всем точкам интегрирования данного контрольного объема

0 - величина соответствует предыдущему значению времени

$\dot{m}_{ip} = (\rho V_i \Delta n_i)_{ip}$  - изменение массы через поверхность элемента

# Метод конечных элементов

Переменная  $\phi$  внутри объема

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i$$

где

$N_i$  - аппроксимирующая функция для  $i$ -го узла;

$\phi_i$  - значение переменной в  $i$ -м узле;

$n$  - число узлов элемента.

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1$$

- В МКО заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на всей расчетной области

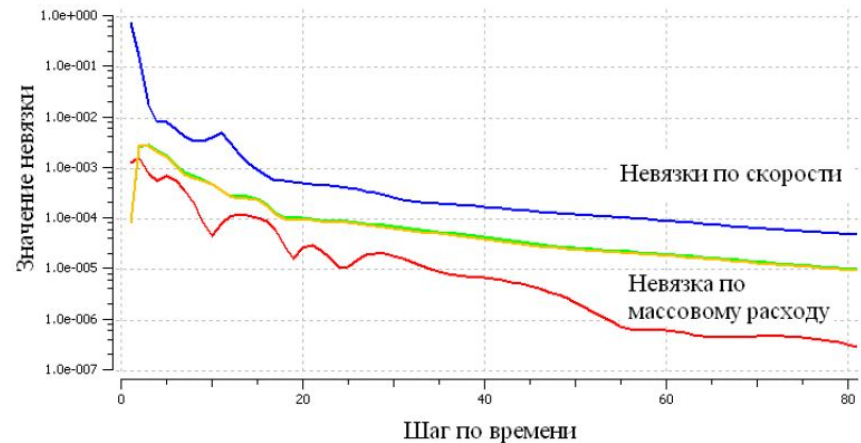
# Шаг по времени и невязки

Шаг по времени равен:  $\Delta t \leq 0.3 \frac{h}{u}$ ,

где:  $h$  - минимальный размер ячейки в расчётной сетке,  
 $u$  - средняя скорость потока.

Невязки:

$$nev = \sqrt{\sum_m \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{m}}$$



# Уравнения Рейнольдса

$$U_j = \bar{U}_j + u_j, \quad p = \bar{p} + p',$$

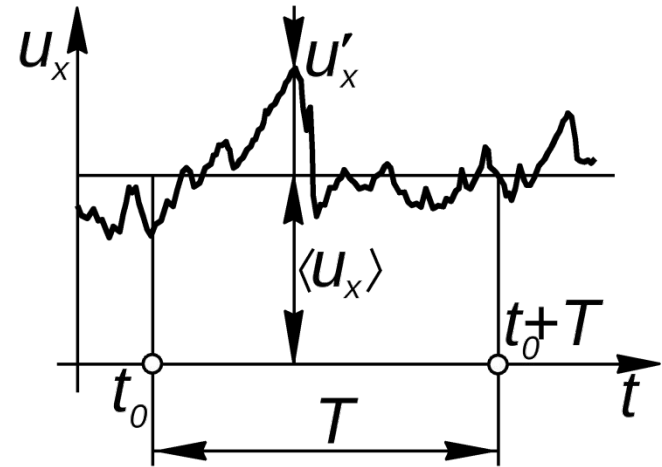
$$\bar{U}_i(t, x_j) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U_i(t, x_j) dt;$$

Уравнения Навье-Стокса, осреднённые по Рейнольдсу

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{U}_j \bar{U}_k) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \right) - \rho \overline{u_j u_k};$$

$\rho \overline{u_j u_k}$  - напряжения Рейнольдса



# Модели турбулентности

- Модели вихревой вязкости:
  - Однопараметрическая модель Колмогорова-Прандтля
  - Стандартная модель  $k - \varepsilon$
  - RNG -  $k - \varepsilon$  модель
  - Стандартная модель  $k - \omega$
  - Зонная модель BSL -  $k - \omega$
  - Зонная модель SST -  $k - \omega$
  - Модель  $(k - \varepsilon)_{1E}$
- Модели напряжений Рейнольдса:
  - Изотропная модель Launder-Reece-Rodi (LRR Reynolds Stress)
  - Квазиизотропная модель Launder-Reece-Rodi (QI Reynolds Stress)
  - Модель Speziale-Sarka-Gatski (SSG Reynolds Stress)
  - Модель SMC (Omega Reynolds Stress)
  - Модель BSL-RSS
  - Переходная модель ANSYS CFX Transition Model
- Вихревые модели:
  - Модель крупных вихрей LES
  - Модель дискретных вихрей DES
  - Модель адаптивного масштаба SAS

# Алгебраические модели

Алгебраические модели - это простейший тип моделей турбулентности, согласно которым значение турбулентной вязкости  $\mu_t$  вычисляется через пульсацию скорости и характерный масштаб длины по эмпирической формуле.

Поскольку не решается никаких дополнительных уравнений движения, алгебраические модели также называют моделями нулевого порядка.

Характерный масштаб пульсаций скорости записывается с помощью характерного масштаба длины  $l_t$  (путь смешения Прандтля)

$$u_i = l_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Тогда уравнение для напряжений Рейнольдса примет вид

$$-\rho \overline{u_j u_k} = \rho \left( l_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (2)$$

# Алгебраические модели

Турбулентная вязкость по физическому смыслу аналогична формуле вязкости для газов

$$\mu = \frac{1}{3}U\lambda\rho,$$

где  $\lambda$  - длина свободного пробега молекулы газа,  
 $\rho$  - плотность газа,  
 $U$  - средняя скорость молекулы газа.

Тогда уравнение для турбулентной вязкости примет вид

$$\mu_t = f_\mu u_t l_t \rho, \quad (3)$$

где  $f_\mu$  - это коэффициент пропорциональности, примем его =1.

Окончательно получаем формулу для напряжений Рейнольдса:

$$-\rho \overline{u_j u_k} = \mu_t \cdot \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}.$$



# Модели с одним уравнением

Кинетическая энергия единицы массы турбулентных флуктуаций

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}.$$

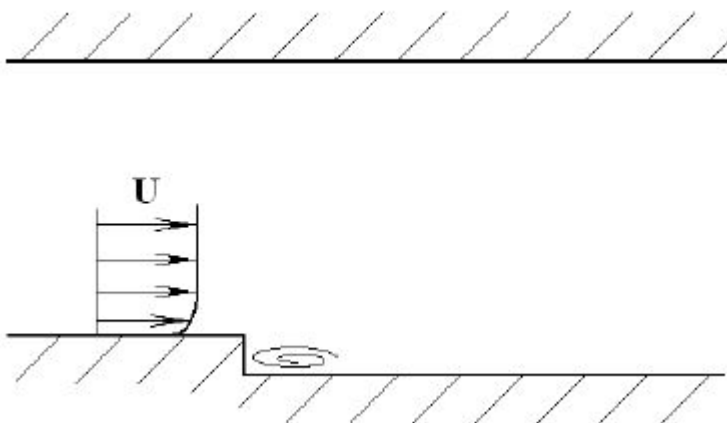
Уравнение для турбулентной кинетической энергии

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \rho \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \right) - \rho \varepsilon.$$

Чтобы замкнуть уравнение для кинетической энергии турбулентности, полагается, что количество диссипированной турбулентной энергии определяется энергосодержащим движением:

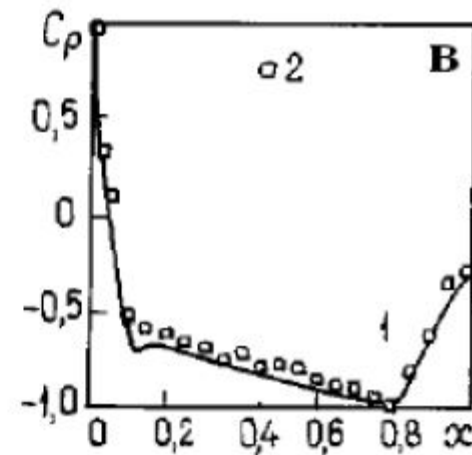
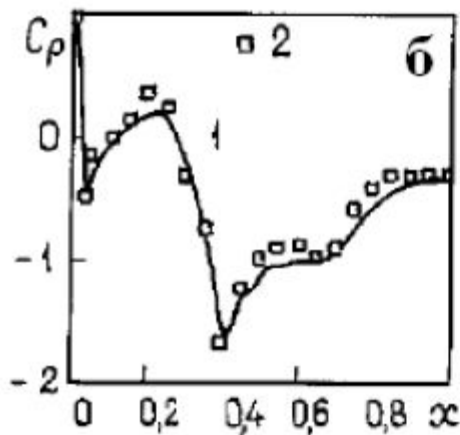
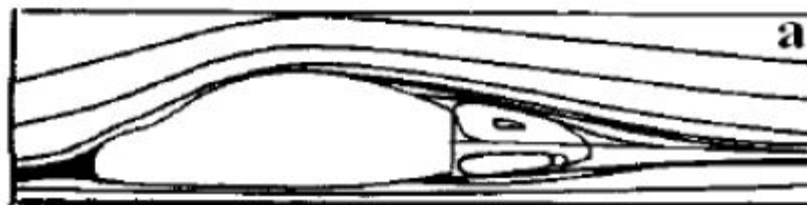
$$\varepsilon = C_D k^{3/2} / l.$$

# Модели с двумя уравнениями



Обтекание обращённой  
назад ступеньки

Сравнение эксперимента и расчёта  
турбулентного обтекания  
автомобиля



# Модели турбулентности

В общем виде, используемые в моделях с одним или двумя дифференциальными уравнениями, уравнения переноса можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = P - D + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \Gamma_{\Phi}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] + A$$

Расшифровка параметров для каждого вида уравнений:

	$\Phi$	$P$	$D$	$\Gamma_{\Phi}$
кинетическая энергия	$k$	$\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$	$\rho \varepsilon$ или $\beta^* \rho k \omega$	$\frac{\mu_t}{\sigma_k}$
скорость диссипации кинетической энергии	$\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$	$c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$	$\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}}$
удельная скорость диссипации	$\omega$	$\alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$	$\beta \rho \omega^2$	$\sigma_{\omega} \mu_t$

# Модели турбулентности

В случае SST модели последний член уравнения

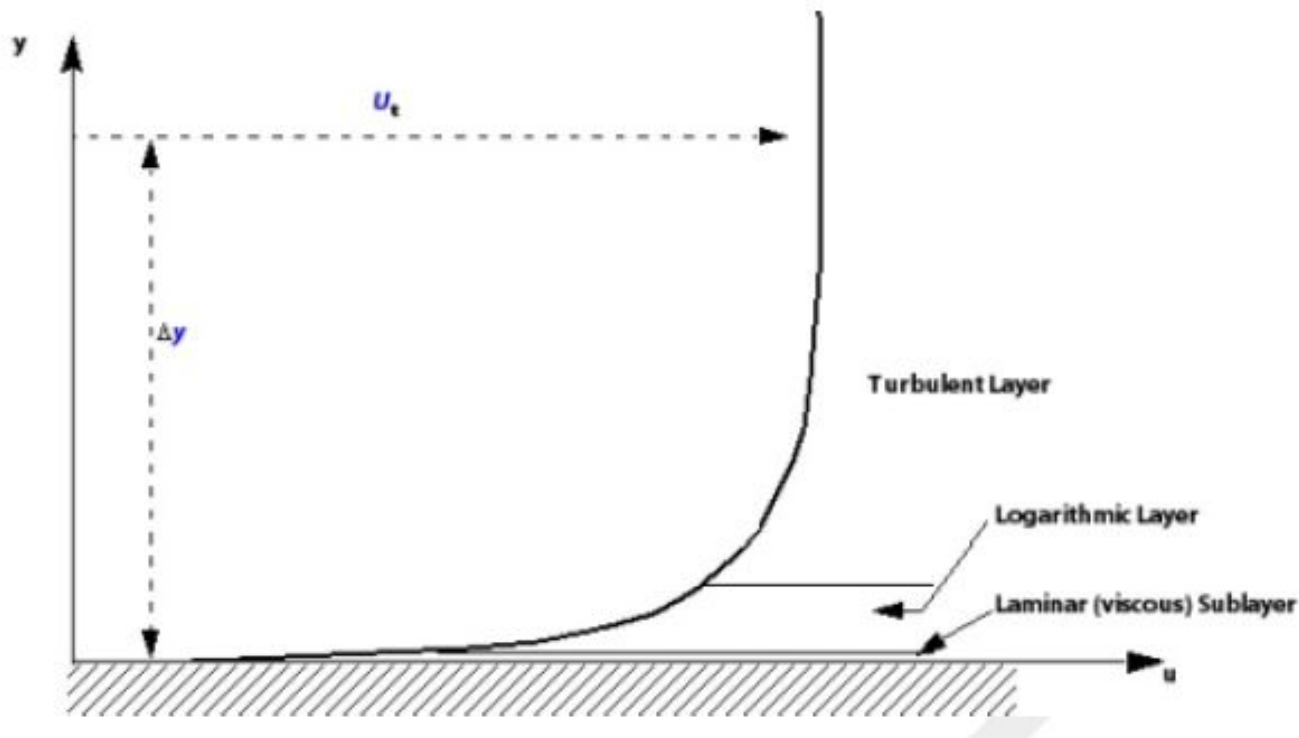
$$A = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

в остальных случаях  $A = 0$ .

Константы для моделей с двумя дифференциальными уравнениями:

$k - \varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_\mu$
	1.44	1.92	1.0	1.3	0.09
$k - \omega$	$\beta^*$	$\beta$	$\alpha$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
	0.09	0.075	5/9	0.5	0.5
$k - \omega$ (SST)	$\beta_1^*$	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\sigma_{k1}$	$\sigma_{\omega 1}$
	0.09	0.075	$\beta_1 / \beta_1^* - \sigma_{\omega 1} k^2 / \sqrt{\beta_1^*}$	0.85	0.5
	$\beta_2^*$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\sigma_{k2}$	$\sigma_{\omega 2}$
	0.09	0.0828	$\beta_2 / \beta_2^* - \sigma_{\omega 2} k^2 / \sqrt{\beta_2^*}$	1	0.856

# Пристеночные функции



$$y^+ = \frac{\rho \Delta y u_t}{\mu}$$

$k - \varepsilon$

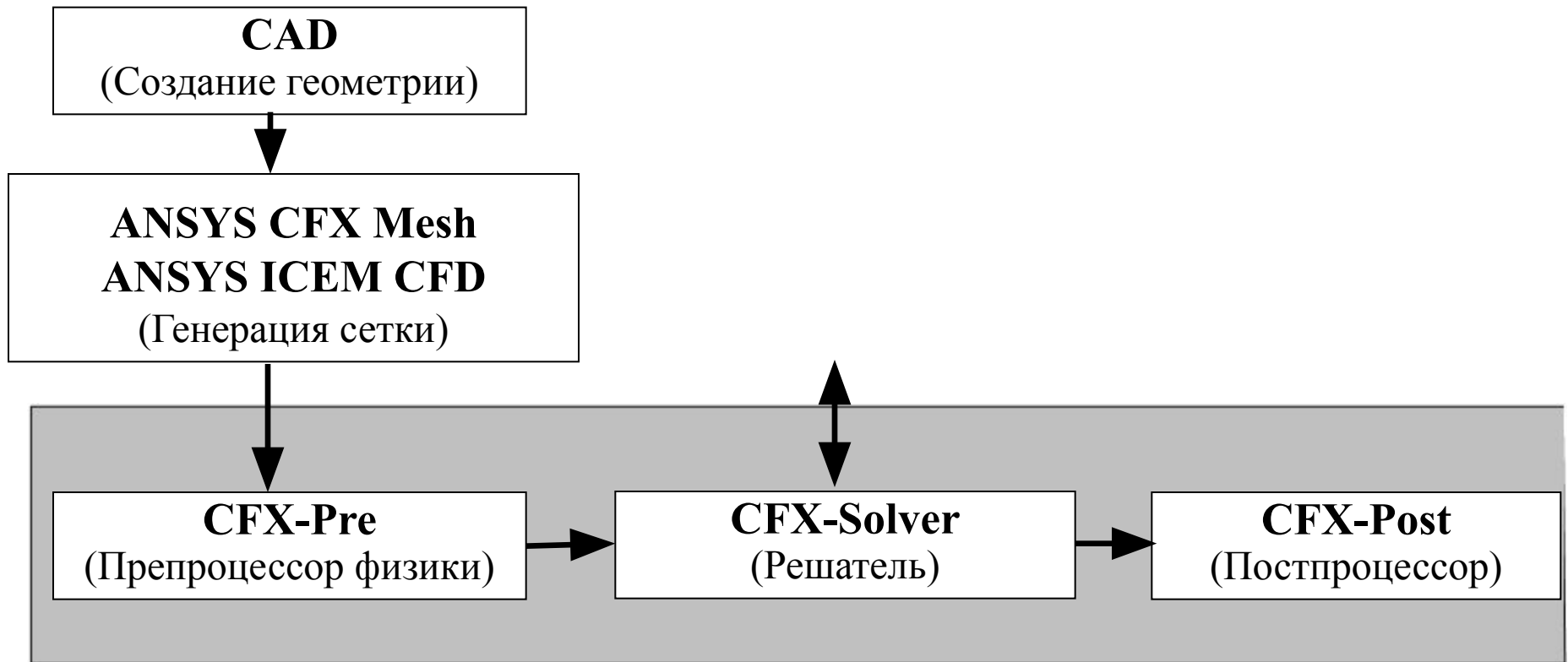
$y^+ = 30 \dots 100$

SST -  $k - \omega$

$y^+ \sim 1$

- Создание геометрической модели (CAD)
- Теоретический анализ, построение модели
- Построение расчетной сетки (ANSYS CFX Mesh или ANSYS ICEM CFD)
- Гидро-, газодинамический расчет и анализ (CFX)
- Оптимизация

# Архитектура комплекса ANSYS CFX



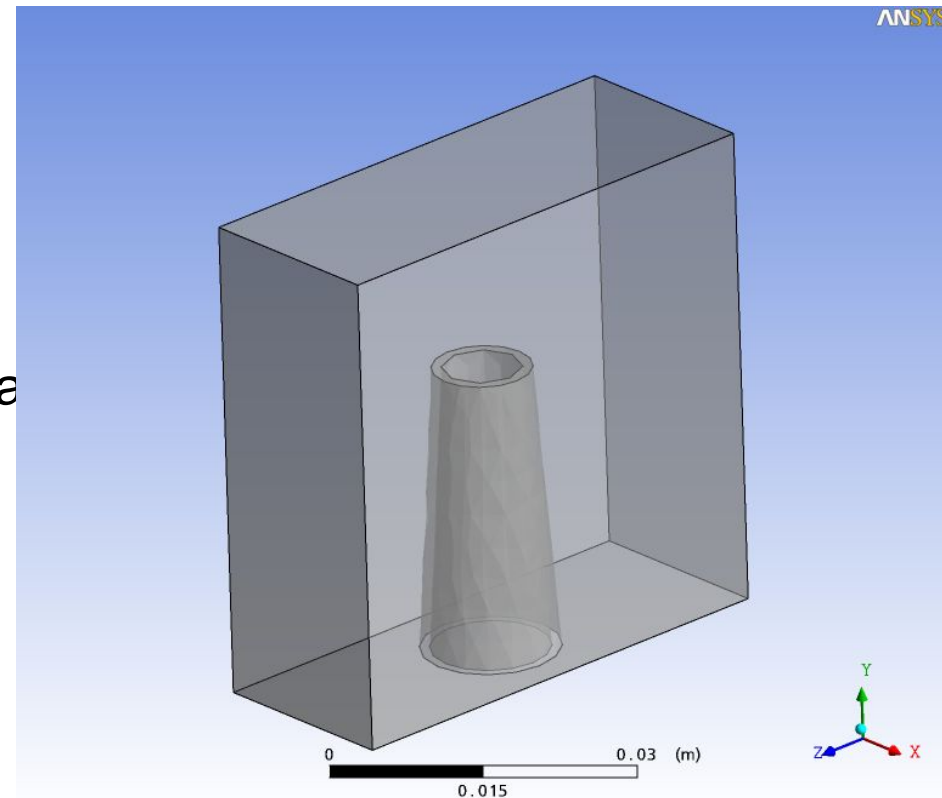
- Система автоматизации проектных работ (САПР) или CAD (англ. *Computer-Aided Design*) — программный пакет, предназначенный для создания чертежей, конструкторской и/или технологической документации и/или 3D моделей.
- В современных системах проектирования CAD получает данные из систем твёрдотельного моделирования CAE (Computer-aided engineering), и передаёт в CAM (Computer-aided manufacturing) для подготовки производства (например генерации программ обработки деталей для станков с ЧПУ или ГАПС (Гибких Автоматизированных Производственных Систем)).



# CAD

В ANSYS CFX могут импортироваться геометрические данные из CAD:

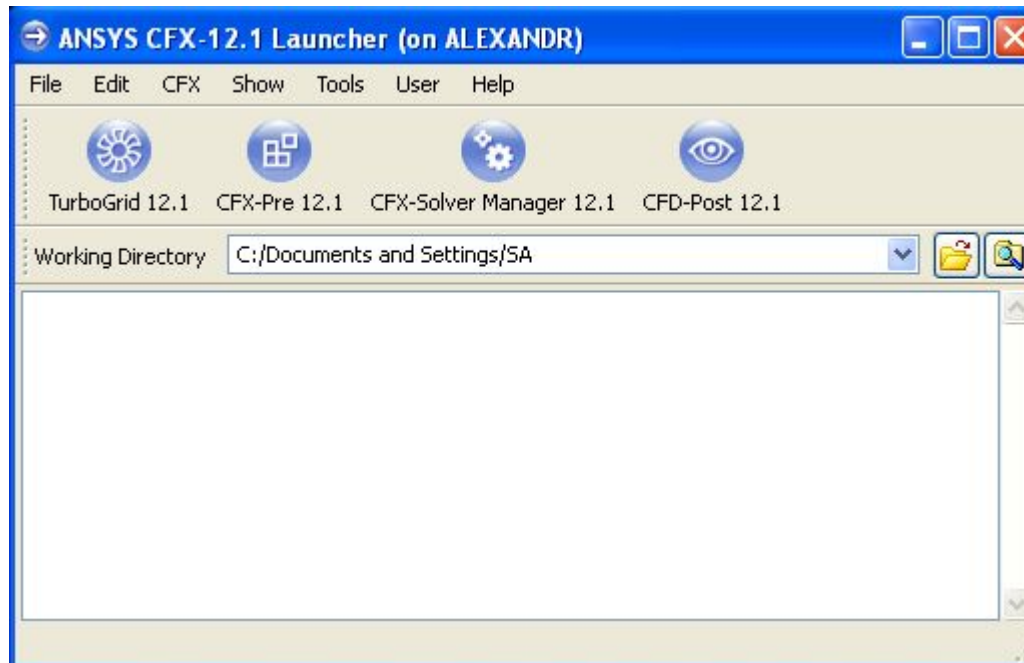
- Solid Works (машиностроение);
- Solid Edge (2D/3D CAD-система);
- Catia [V5] (аэрокосмическая промышленность);
- BladeGen (лопаточные устройства турбомашин);
- ACIS (3D CAD-система);
- Parasolid и другие.



# Комплекс ANSYS CFX



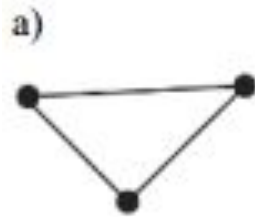
- 1. **ANSYS CFX-Pre** – приложение, в котором реализован процесс определения физики поставленной задачи.
- 2. **ANSYS CFX-Solver** – приложение, реализующее процесс решения задачи вычислительной гидродинамики.
- 3. **ANSYS CFX-Post** – это программа, предназначенная для анализа, визуализации и представления результатов, полученных в ходе решения задачи посредством ANSYS CFX Solver.



# CFX Mesh

**CFX Mesh** – приложение генерации сеток. На данном этапе происходит следующее:

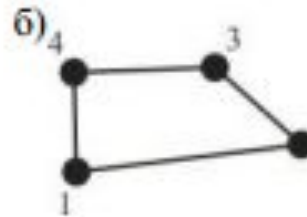
- определение геометрии области исследования;
- создание областей потоков жидкостей или газов, твердых областей и задание имен граничным областям;
- установка параметров сетки.



удачно



неудачно



верно

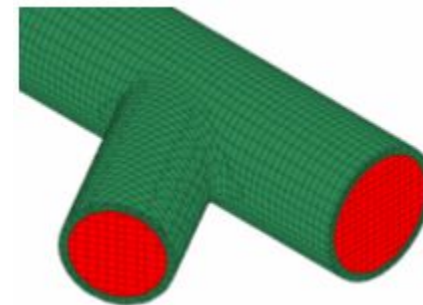
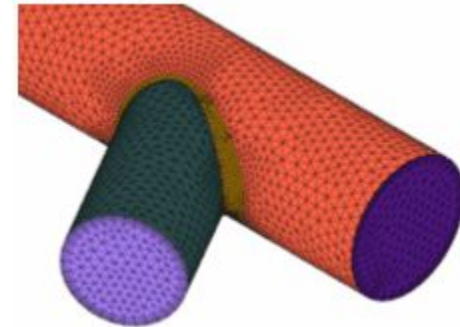


неверно

# ANSYS ICEM CFD



- **ANSYS ICEM CFD** - Комплексное решение для задач генерации расчетных сеток любых типов, от структурированной многоблочной до неструктурированной гекса- или тетраэдрической или гибридной.
- **ICEM CFD Tetra** - полностью автоматический генератор неструктурированных объемных тетраэдрических сеток.
- **ICEM CFD HEXA** - создание гексаэдрической сетки в полуавтоматическом режиме на основе любой геометрии.

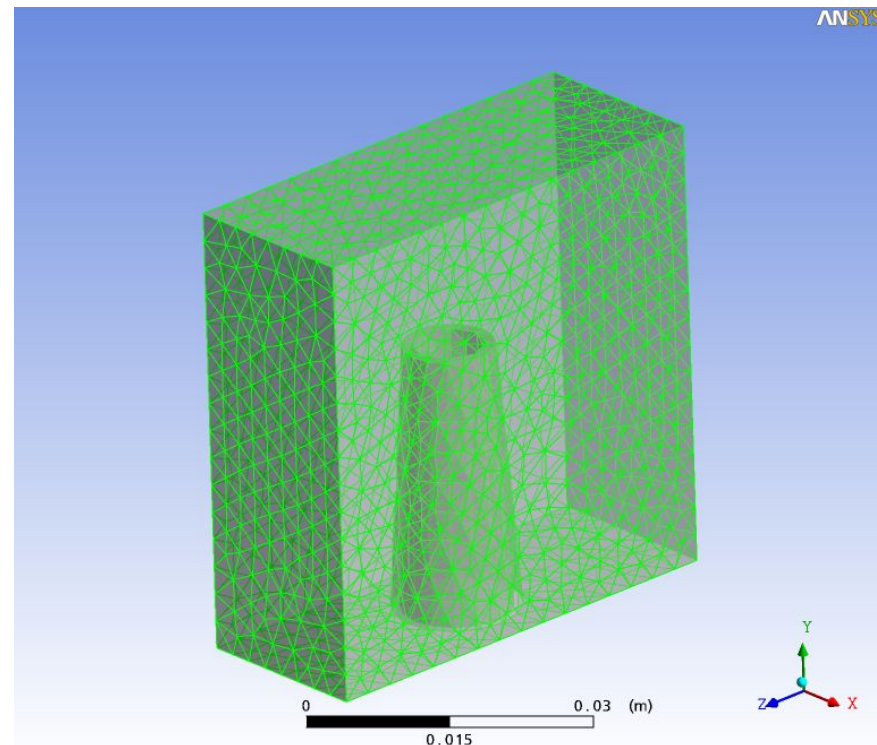


# ANSYS CFX-Pre



Физический препроцессор **ANSYS CFX-Pre** импортирует сетку, созданную генераторами сеток:

- CFX Mesh;
- ICEM CFD;
- ANSYS;
- ANSYS Meshing;
- FLUENT;
- Nastran
- и другие.



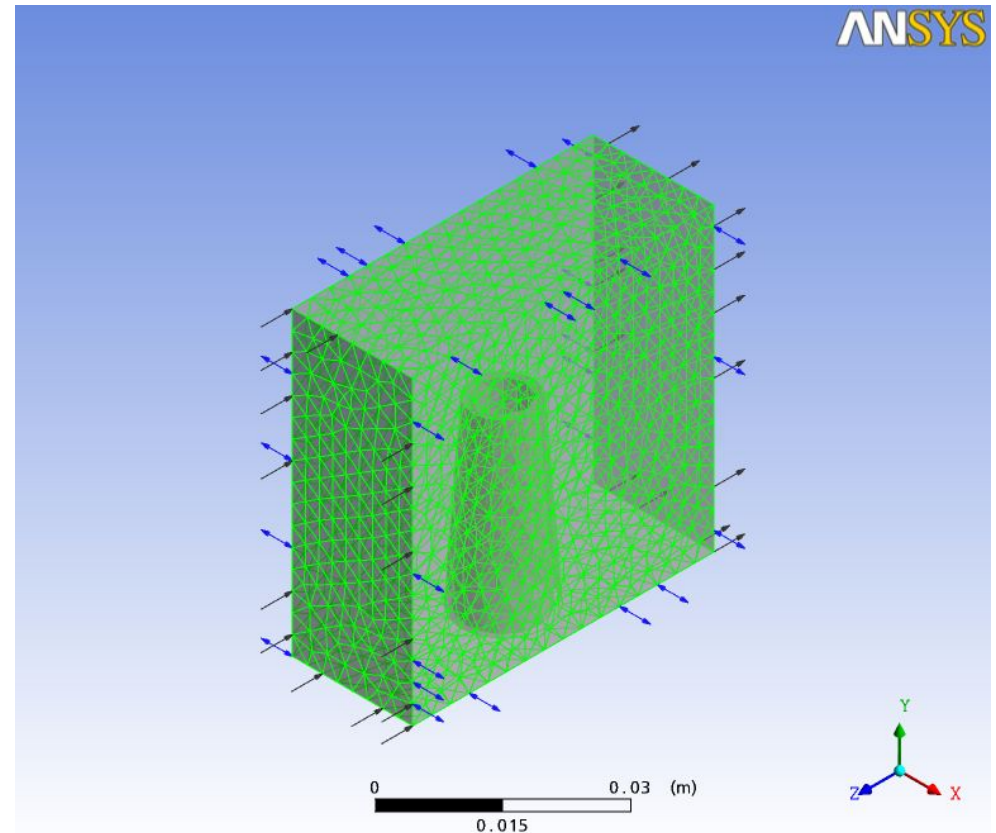
# ANSYS CFX-Pre



## ANSYS CFX-Pre

реализует процесс определения физики задачи:

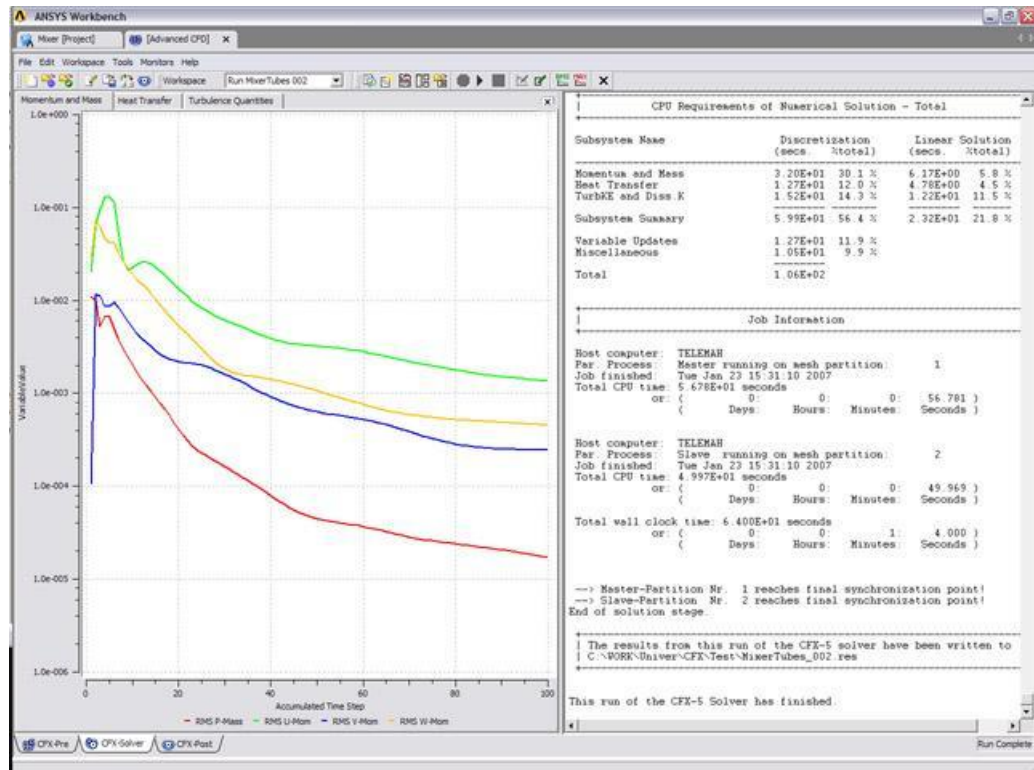
- физической модели;
- её параметров и характеристик;
- граничные условия (входные, выходные);
- модель теплообмена.



# ANSYS CFX-Solver



Решатель **ANSYS CFX - Solver** импортирует задачу, поставленную посредством ANSYS CFX-Pre и решает систему уравнений.



**ANSYS CFX - Solver** реализует процесс решения задачи вычислительной гидро- или газодинамики, т.е. производит поиск решения всех требуемых переменных:

- уравнения в частных производных интегрируются по всему объёму задачи в области исследования, соответствует применению закона сохранения (масс или момента) к каждой исследуемой области;
- полученные интегральные уравнения преобразуются в систему алгебраических уравнений путем аппроксимирования членов в интегральных уравнениях;
- алгебраические уравнения решаются численным методом.

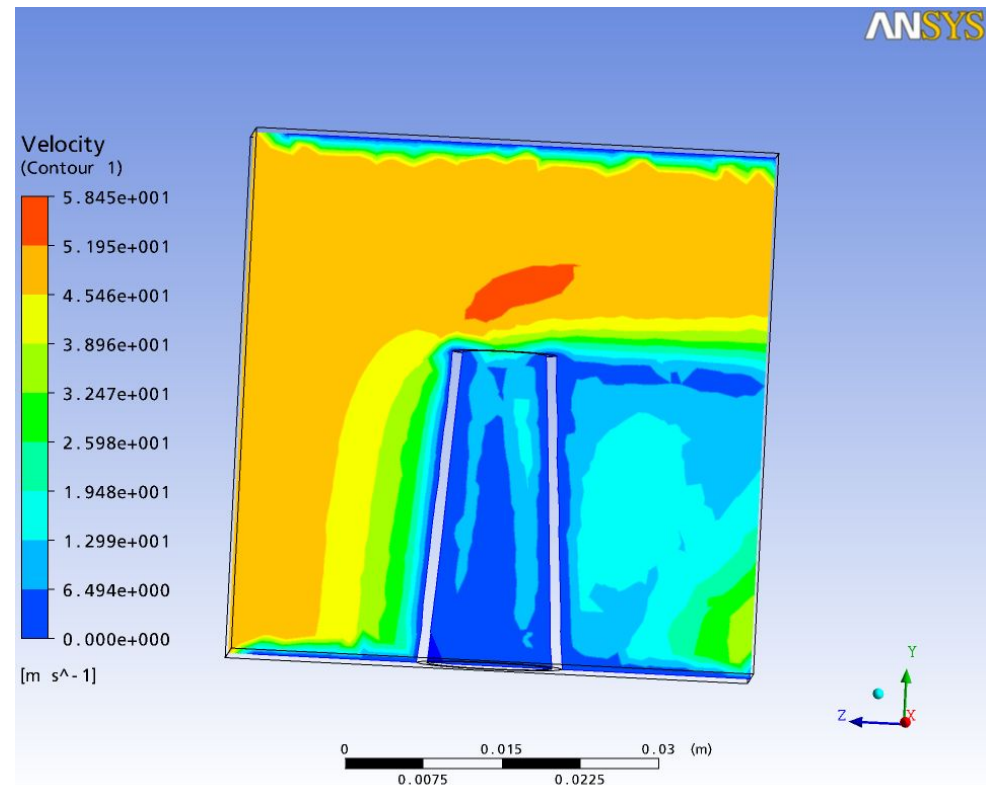


# ANSYS CFX-Post



Постпроцессор **ANSYS CFX-Post** предназначен для анализа, визуализации и представления результатов, полученных в ходе решения задачи посредством ANSYS CFX-Solver. Для этого используются следующие средства:

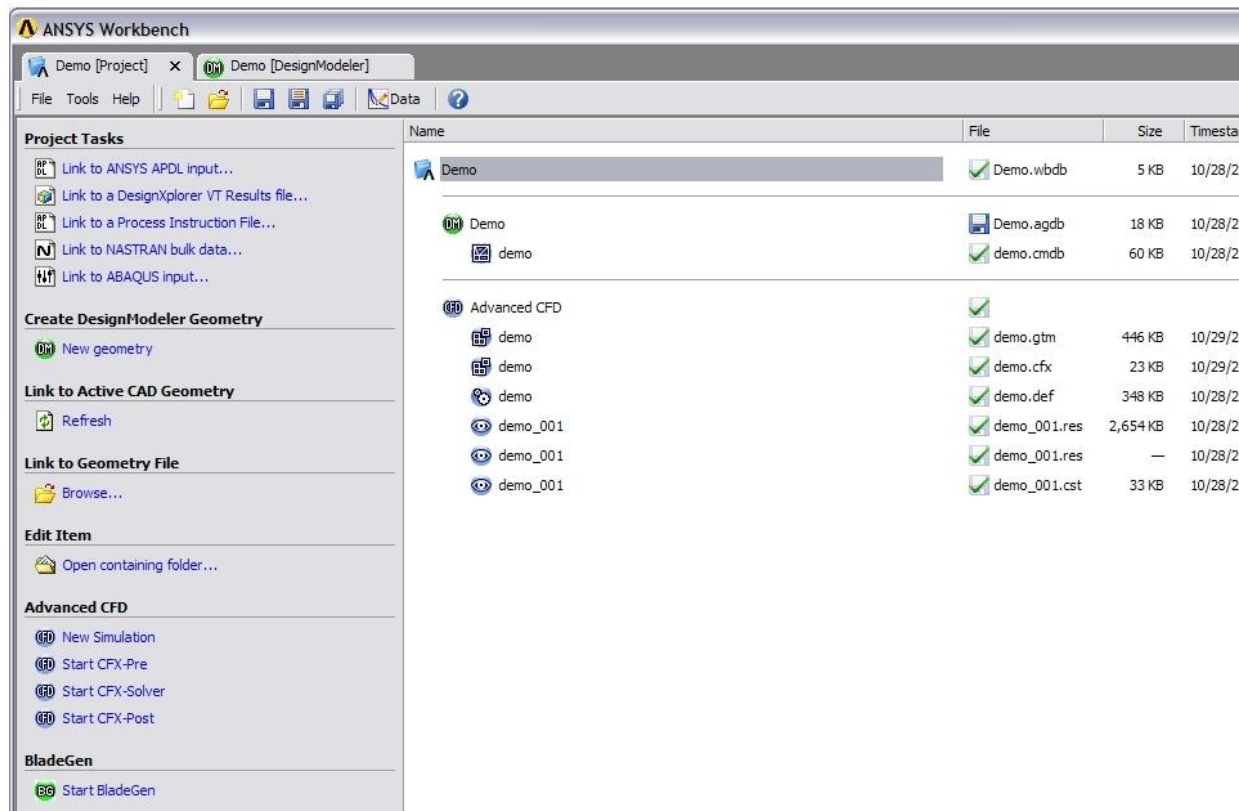
- визуализация геометрии и исследуемых областей;
- векторные графики для визуализации направления и величины потоков;
- визуализация изменения скалярных величин (такие как температура, давление) внутри исследуемой области.



# ANSYS Workbench



**ANSYS Workbench** входит в состав комплекса ANSYS и обеспечивает унифицированную инструментальную среду для разработки и управления разнообразной CAE-информацией.



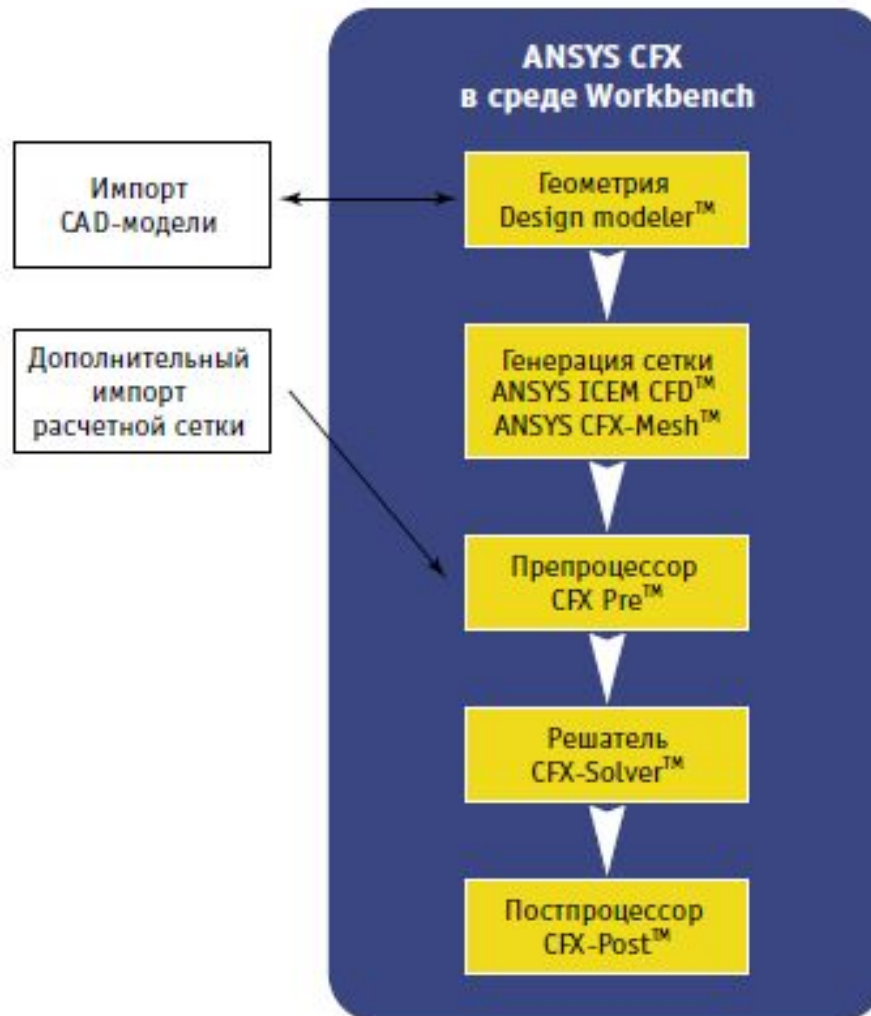
# ANSYS Workbench



ANSYS Workbench включает следующие приложения:

- DesignModeler;
- CFX-Mesh;
- Simulation;
- FE Modeler;
- DesignXplorer;
- Engineering Data;
- Customization and the Workbench SDK.

# ANSYS CFX в среде Workbench



# Области применения



- **Аэрокосмическая промышленность:** процессы обтекания тел, химические процессы горения в ДВС, реактивное движение, турбулентные потоки в жидких и газообразных средах, смеси газов
- **Турбомашиностроение:** потоки в турбинах, процессы вращения турбин
- **Нефтегазовая и химическая промышленность:** химические процессы горения, процессы течения
- **Автомобилестроение:** обтекание тел, процессы вентиляции, процессы горения в ДВС, процессы теплообмена
- **Судостроение и морская техника:** процессы обтекания
- **Теплоэнергетика**
- **Вентиляция и кондиционирование**
- **Биомедицинские приложения:** моделирование течения жидкостей организма; моделирование процессов теплообмена
- **Микроэлектромеханические системы MEMS:** моделирование процессов теплообмена

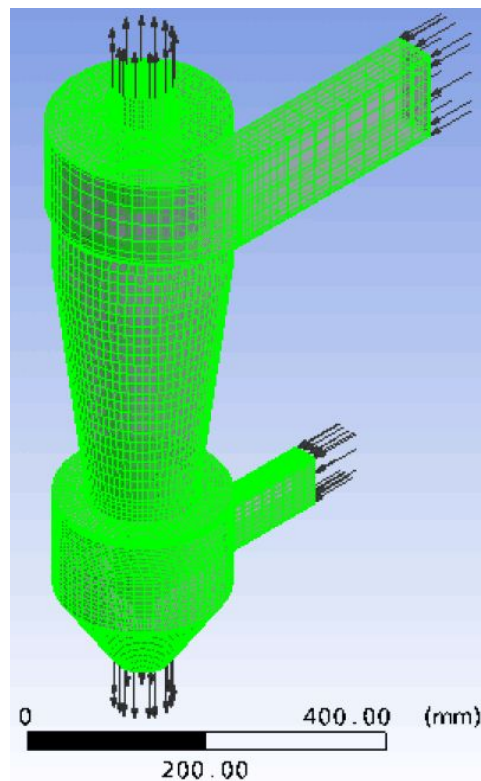
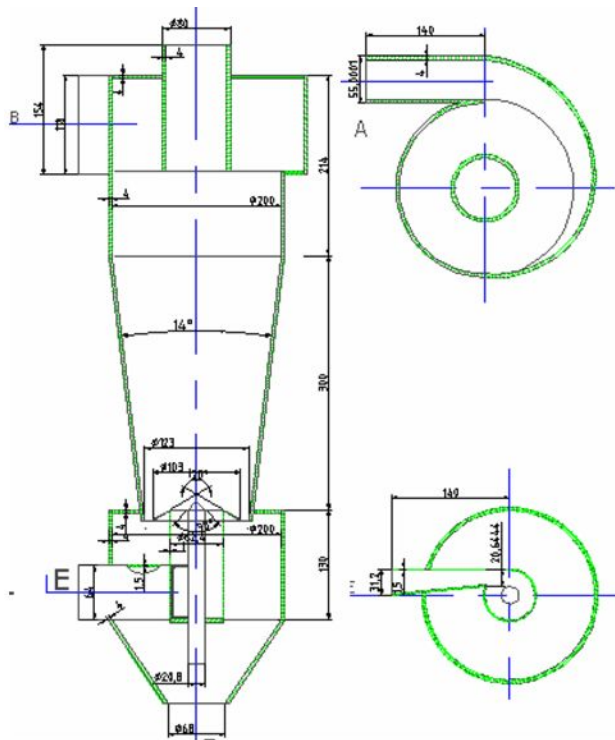
# Список источников



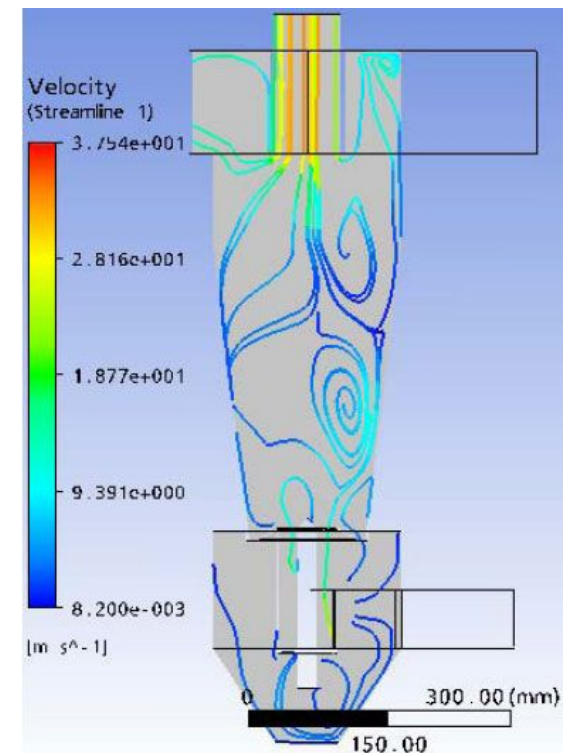
1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М. 1953. 788 с.
2. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D3%F0%E0%E2%ED%E5%ED%E8%FF\\_%C D%E0%E2%FC%E5\\_%97\\_%D1%F2%EE%EA%F1%E0](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D3%F0%E0%E2%ED%E5%ED%E8%FF_%C D%E0%E2%FC%E5_%97_%D1%F2%EE%EA%F1%E0)
3. Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений: Уч. пос. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. – 108 с., ил.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с, ил.
5. ANSYS CFX v.10. Release. Theory Reference.
6. Антипина Н.А. Математические модели рабочих процессов устройств для защиты нефтяного насоса от засорения // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Пермь, 2012

# Примеры расчета

- Аппарат со встречно-закрученными потоками



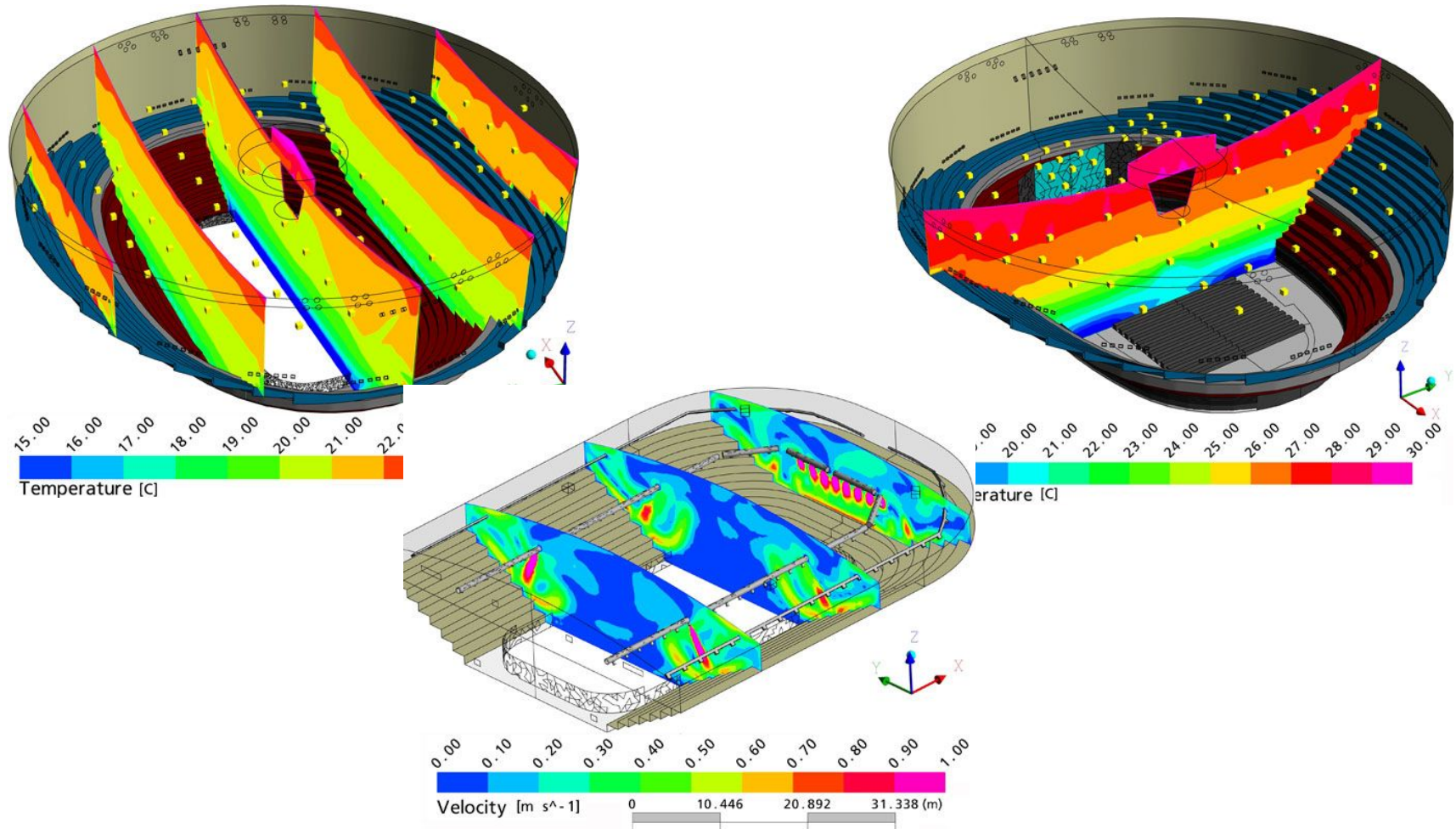
Общий вид расчетной области.



Картина течения в осевом сечении аппарата.

# Примеры расчета

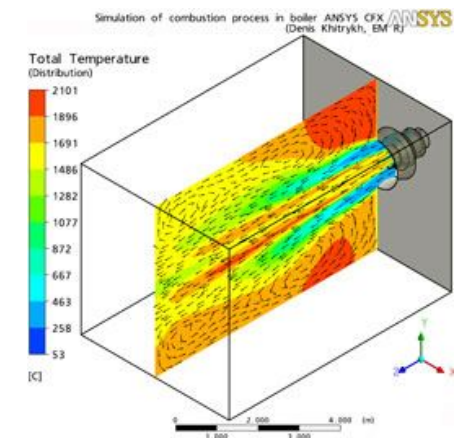
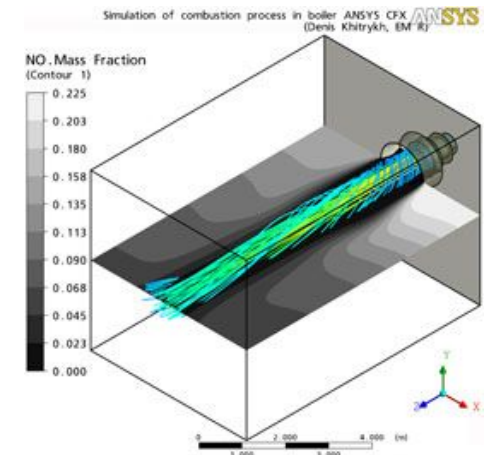
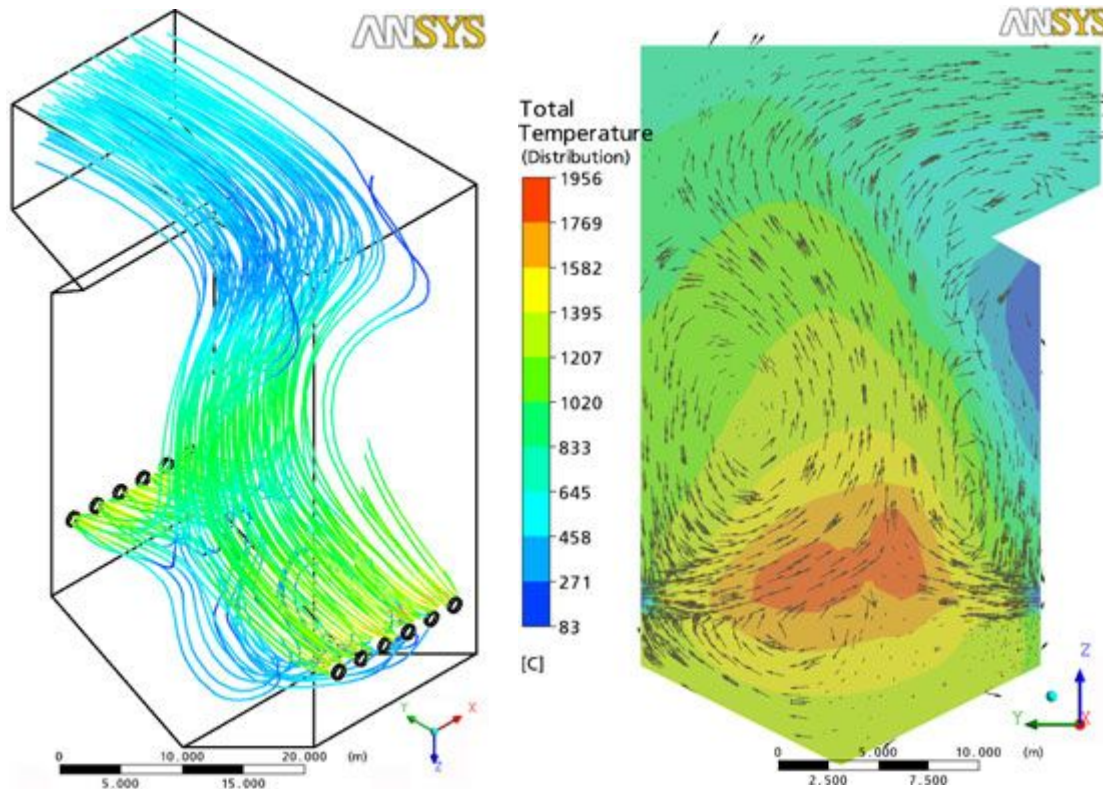
- Расчет системы вентиляции стадиона «Арена «Ходынка»





# Примеры расчета

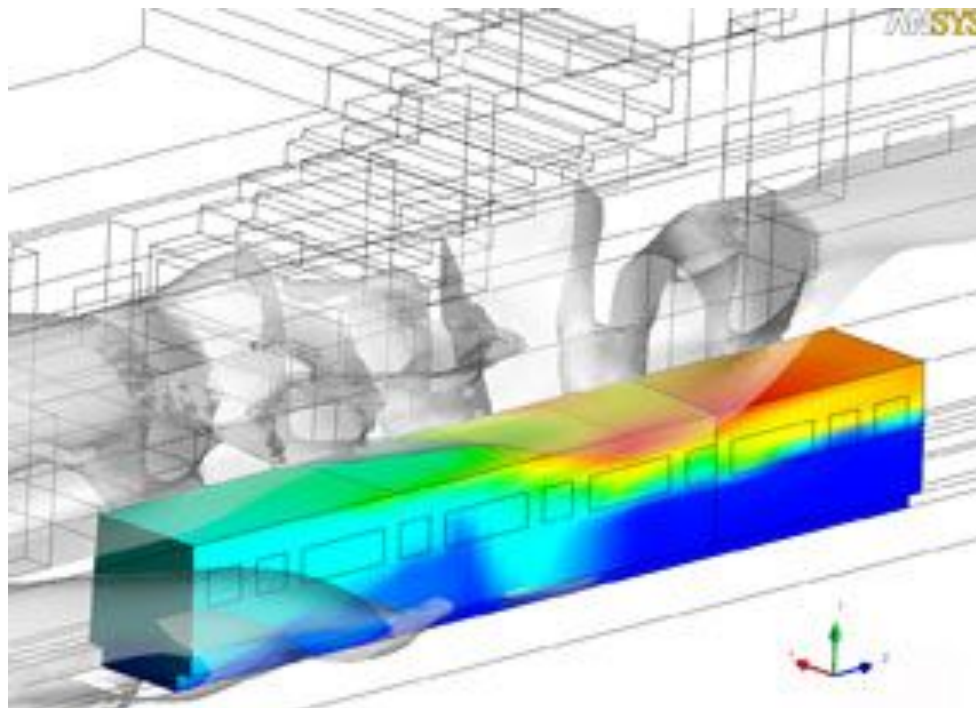
- Моделирование процессов горения, тепло и массообмена в топках котлов на пылевидном топливе



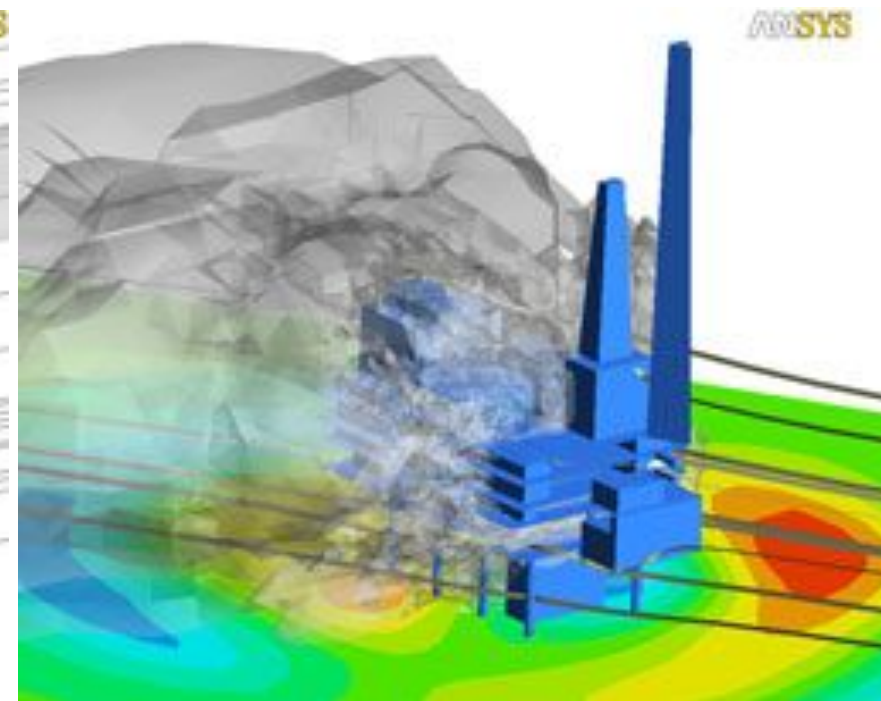
Общая структура течения в топочной камере и распределение температуры в топке 120 МВт котла

# Примеры расчета

- Численный анализ пожаровзрывоопасности объектов нефтегазовой отрасли, промышленности и строительства



Изоповерхность концентрации углерода в момент времени  $t = 120$  сек (CFX-Post)



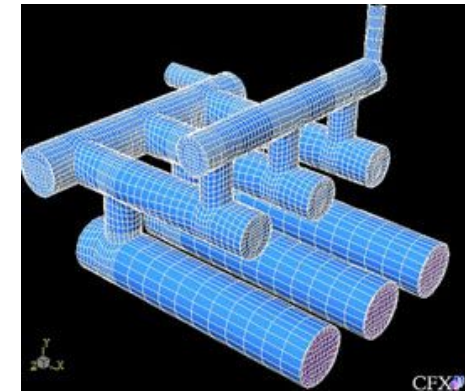
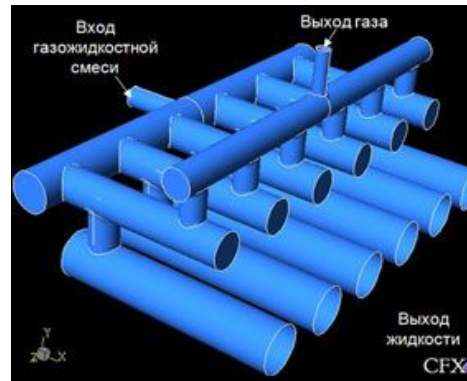
Моделирование утечки газа и образования взрывоопасной смеси на морской нефтяной платформе

# Примеры расчета

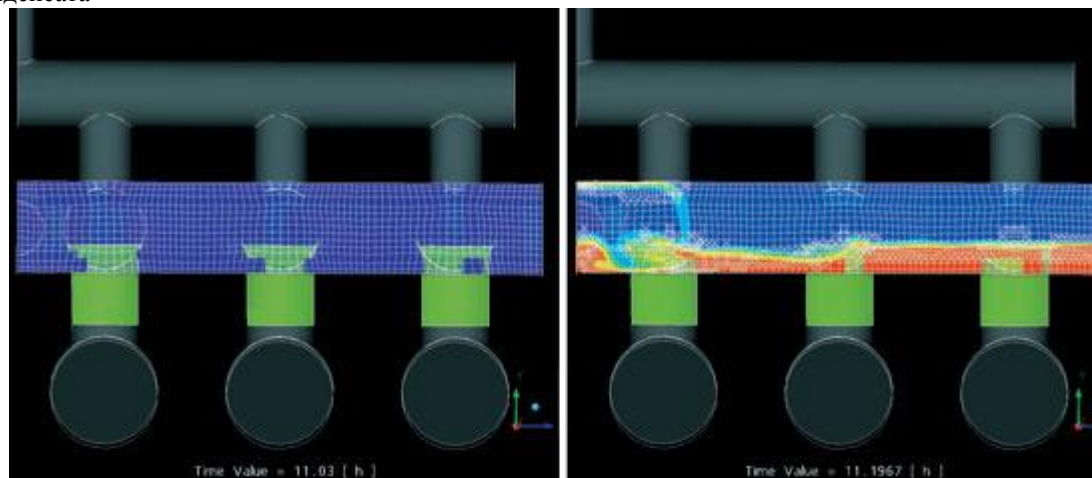
- Моделирование течения многофазного потока в трубопроводе с ловушкой для конденсата



На фотографии ловушки для конденсата



Внешний вид расчетной сетки до адаптации



Пример нестационарной адаптации сетки на границе раздела газ-жидкость: синий цвет отображает газ, красный - жидкость.

# Как решать задачи



Бесплатно лицензионную версию на 5 месяцев можно скачать  
здесь:

<http://www.ansys.com/products/academic/ansys-student>

Лыкова Наталья Анатольевна

[crym@yandex.ru](mailto:crym@yandex.ru)

8-908-26-000-27