НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекция 3

Направление обучения – «Строительство»

Способы преобразования проекций

Способы преобразования проекций применяют для получения нового изображения объекта или группы объектов, которое позволяет упростить решение поставленной задачи.

Как правило, это переход от общего положения к частному.

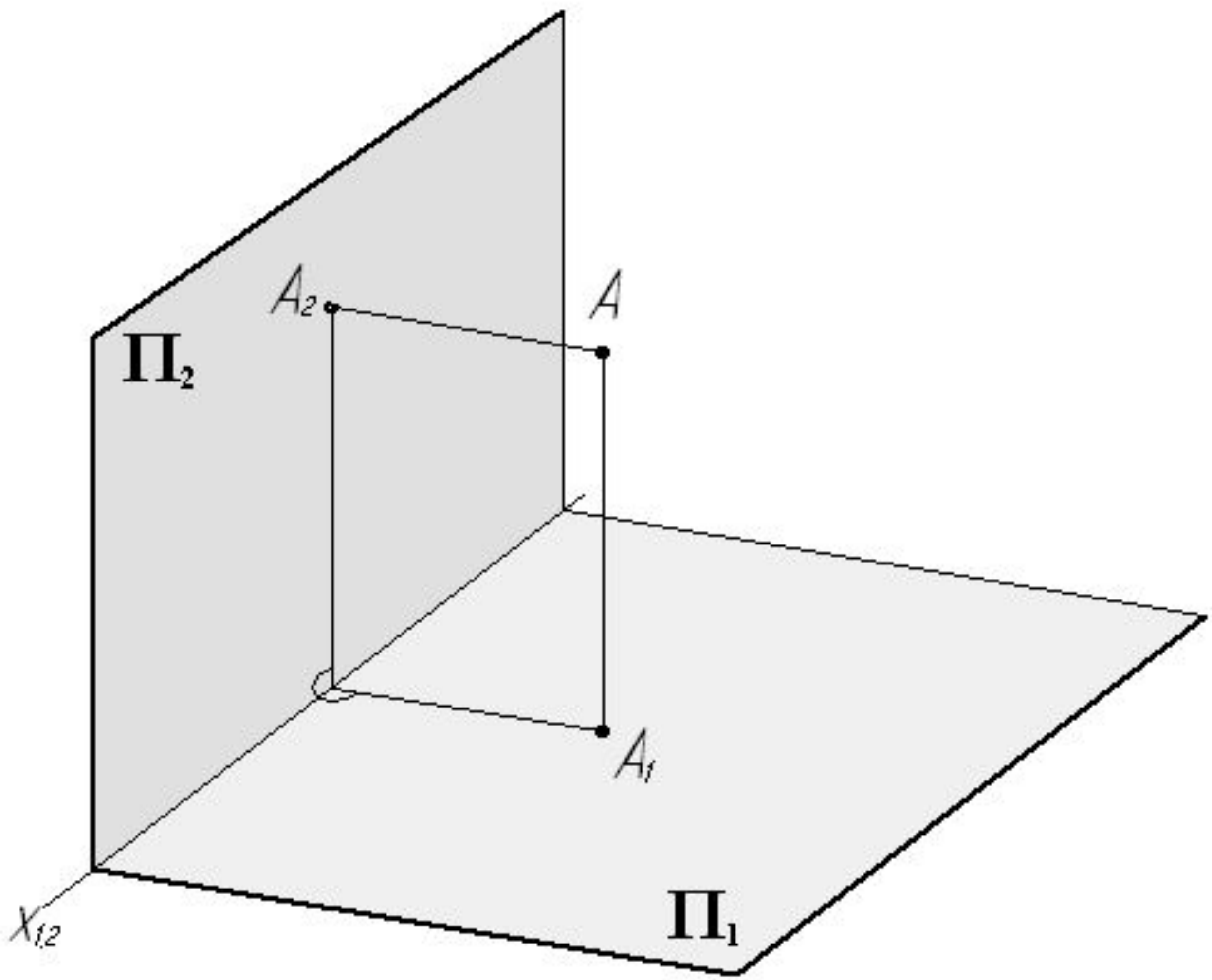
Способы преобразования проекций

- **Объект в пространстве не перемещается**
  - **Способ дополнительного проецирования**
    - Центрального
    - Параллельного косоугольного
    - Прямоугольного – перемена (замена) плоскостей проекций
- **Объект в пространстве перемещается**
  - **Плоскопараллельное перемещение**
    - **Вращение**
      - Ось вращения перпендикулярна плоскости проекций (может указываться или не указываться)
      - Ось вращения параллельна плоскости проекций

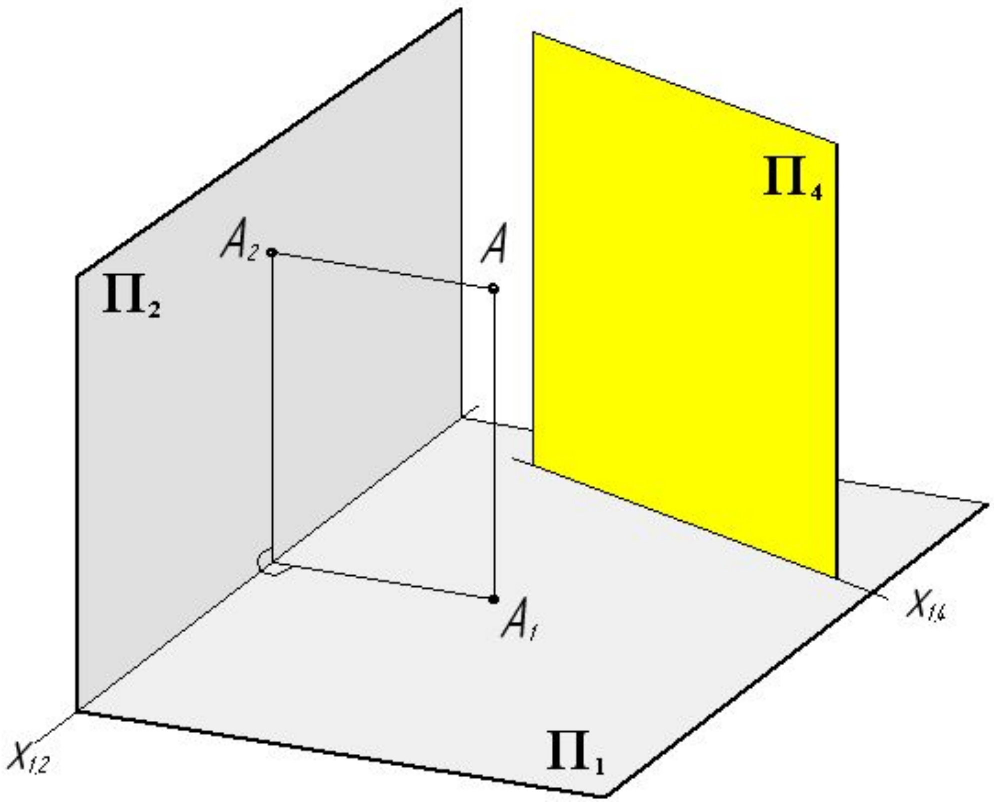
Дополнительное прямоугольное проецирование – перемена плоскостей проекций

- Подбираемая дополнительная плоскость проекций должна быть только проецирующей. Тем самым создаётся новая прямоугольная система плоскостей проекций.
- Подбираемые дополнительные плоскости проекций обозначаются $\mathbf{П}_4$, $\mathbf{П}_5$, $\mathbf{П}_6$ и т.д.

В ортогональной системе двух плоскостей проекций $П_1/П_2$ взята произвольная точка А и построены ее проекции.



Введена дополнительная горизонтально-проецирующая плоскость проекций $П_4$. Например,. Таким образом создана новая система ортогональных плоскостей проекций $П_1/П_4$ с осью $x_{1,4}$



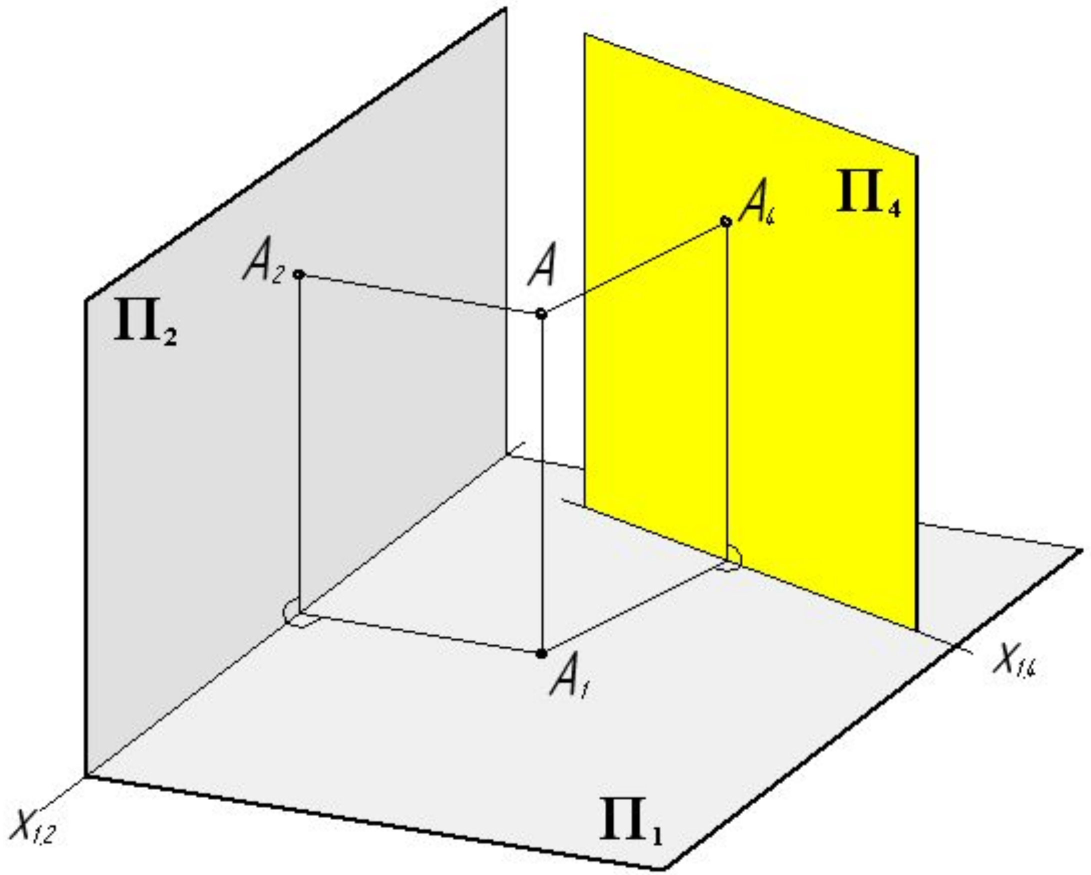
$$\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{П}_1$$

$$\mathbf{П}_1 \cap \mathbf{П}_4 = \boldsymbol{x}_{1,4}$$

$$x_{1,2}\ \mathbf{П_1/П_2} \longrightarrow x_{1,4}\ \mathbf{П_1/П_4}$$

$\mathbf{П_1}$ - const

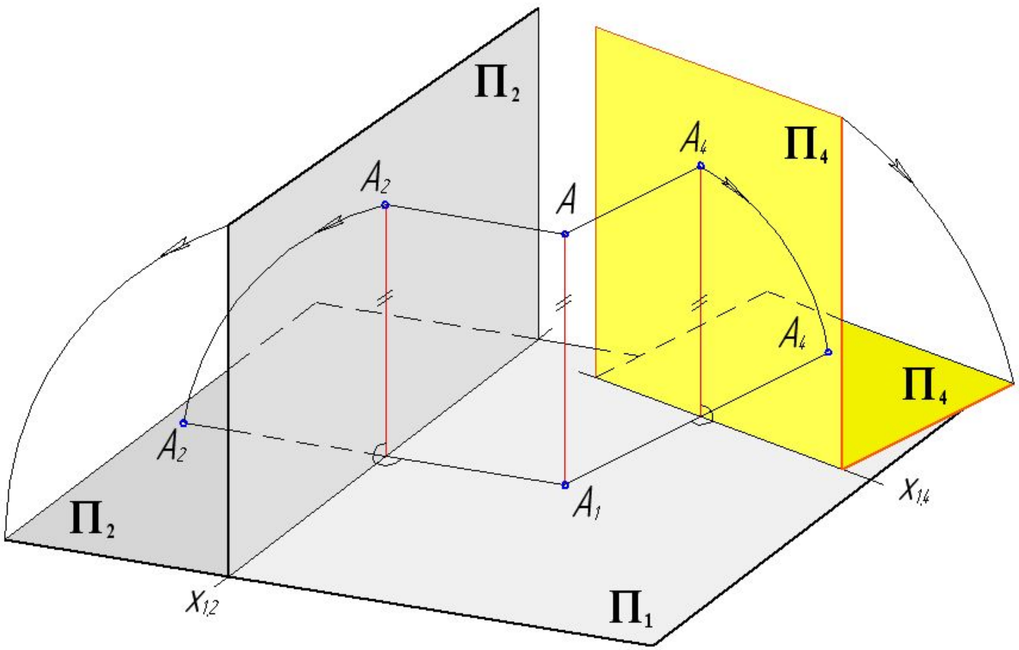
Точка А ортогонально проецируется на плоскость $П_4$

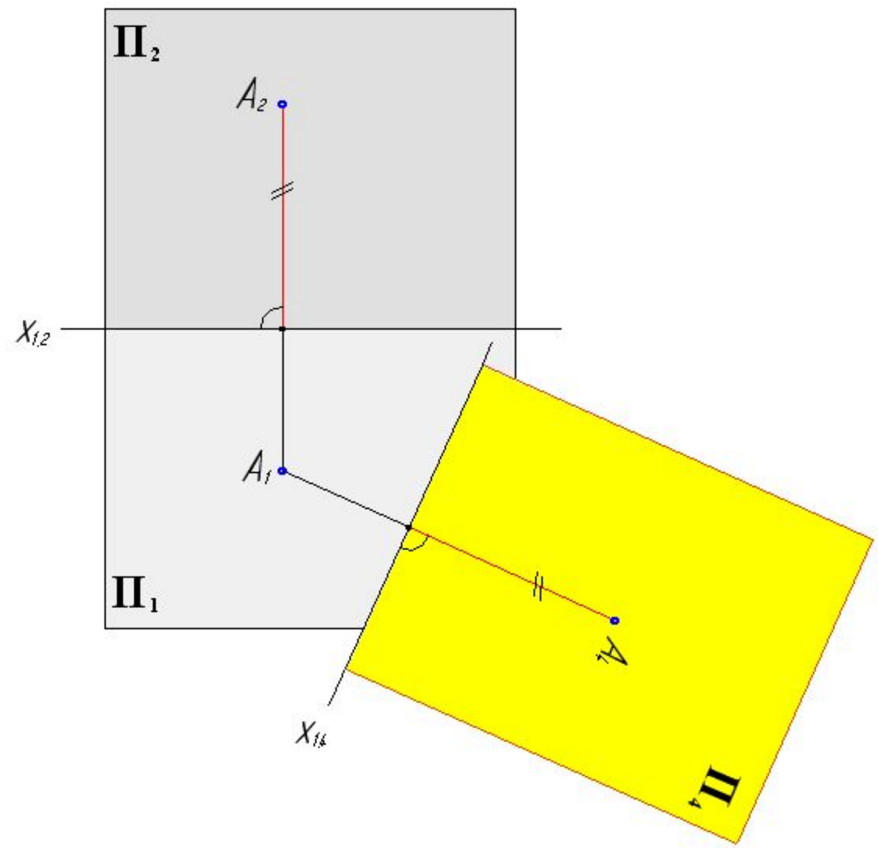


Так как точка А не изменяет своего положения относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$, то расстояние от точки А до плоскости $П_1$ остается неизменным, как в системе $П_1/П_2$, так и в системе $П_1/П_4$.

$(A, П_1) = const \Rightarrow (A, A_1) = (A_2, x_{1,2}) = (A_4, x_{1,4})$.

Принцип построения эпюра при использовании способа перемены плоскостей проекций





$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_4 = x_{1,4}$$

$$x_{1,2}\ \Pi_1/\Pi_2 \longrightarrow x_{1,4}\ \Pi_1/\Pi_4$$

$(A,\Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A,A_1) = (A_2,x_{1,2}) = (A_4,x_{1,4})$.

Π_1 - const

Вращение

Каждая точка объекта вращается вокруг выбранной оси, перемещаясь по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Осью вращения может быть ***только*** прямая частного положения – прямой уровня или проецирующей прямой.

Ось вращения – прямая уровня

Плоскость вращения точки - проецирующую плоскость.

На плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения, траектория перемещения точки имеет форму прямой, а на другой – форму эллипса, что не дает возможности ее использования.

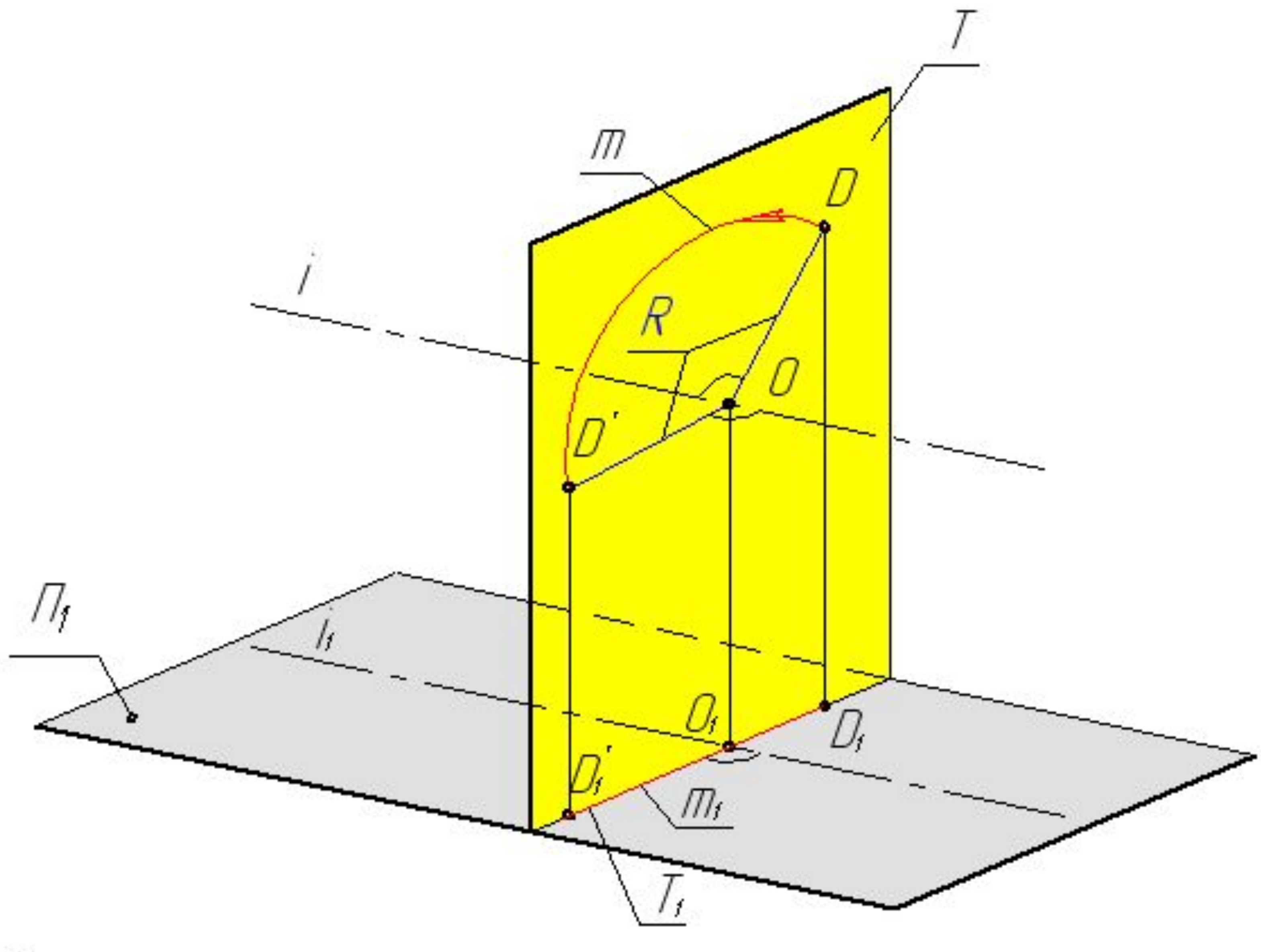
Все построения выполняются только на одной проекции.

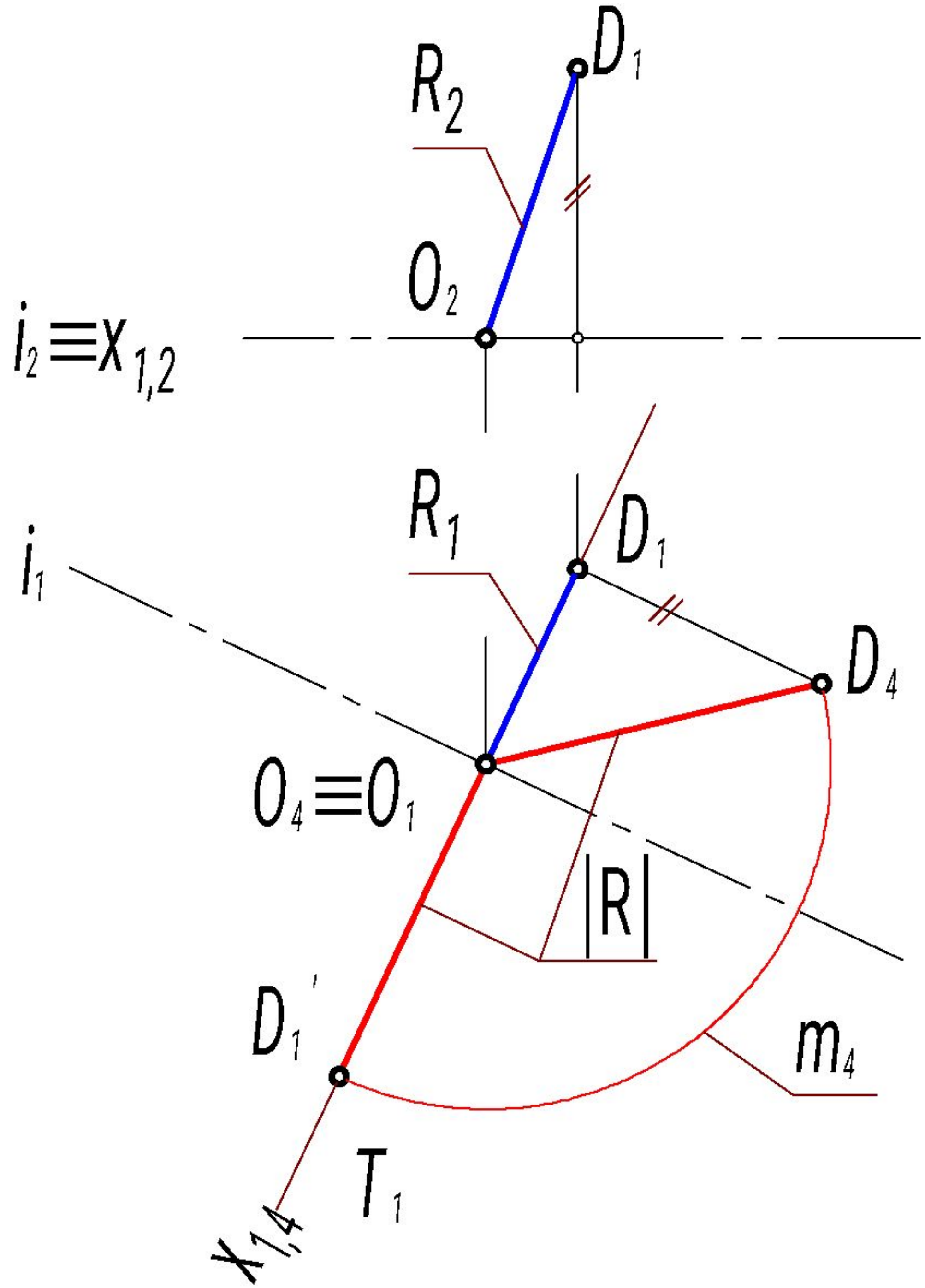
Вся задача сводится к определению истинной величины радиуса вращения точки.

Данный способ вращения имеет следующие ограничения:

- применим практически только к плоским фигурам;
- ось вращения должна лежать в плоскости поворачиваемой фигуры.

На рисунке ось вращения $\boldsymbol{i}$ является горизонталью





D_1
R_2
O_2
$i_2 \equiv x_{1,2}$
R_1
D_1
i_1
D_4
$O_4 \equiv O_1$
$|R|$
D_1'
m_4
T_1
$x_{1,4}$

Базовые преобразования проекций

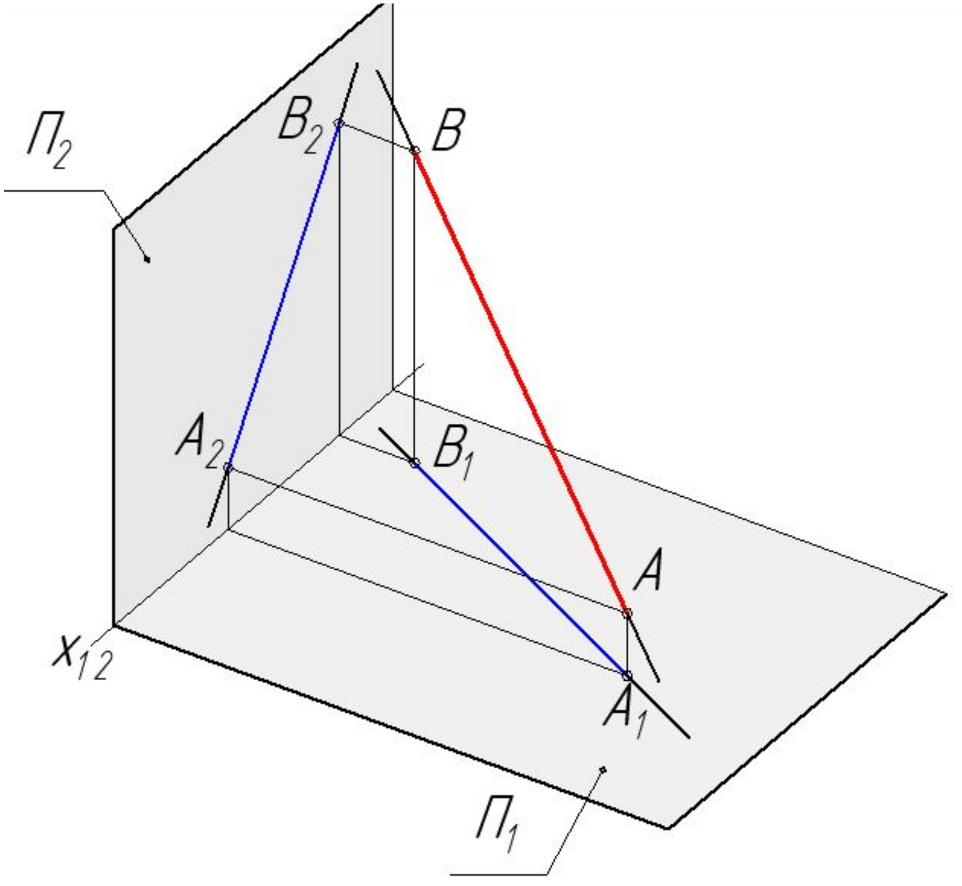
Рассматриваются два варианта преобразования.

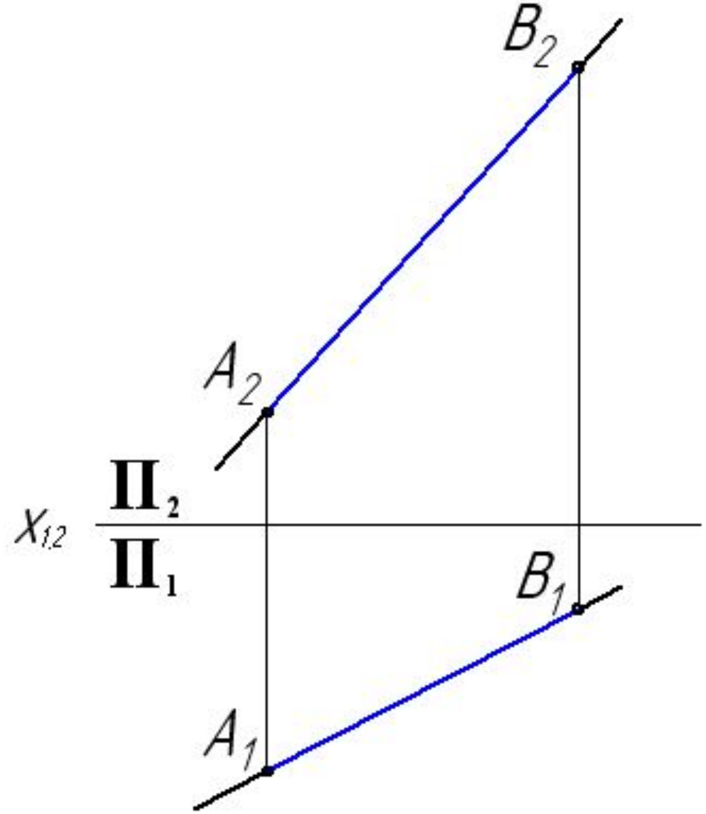
- **<u>Вариант 1</u>.** ***Переход от заданного положения объекта (прямой линии или плоской фигуры) в параллельное положение по отношению к выбранной плоскости проекций*.**
- **<u>Вариант 2</u>.** ***Переход от заданного положения объекта (прямой линии или торсовой поверхности) в проецирующее положение по отношению к выбранной плоскости проекций*.**

Базовое преобразование № 1.

Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

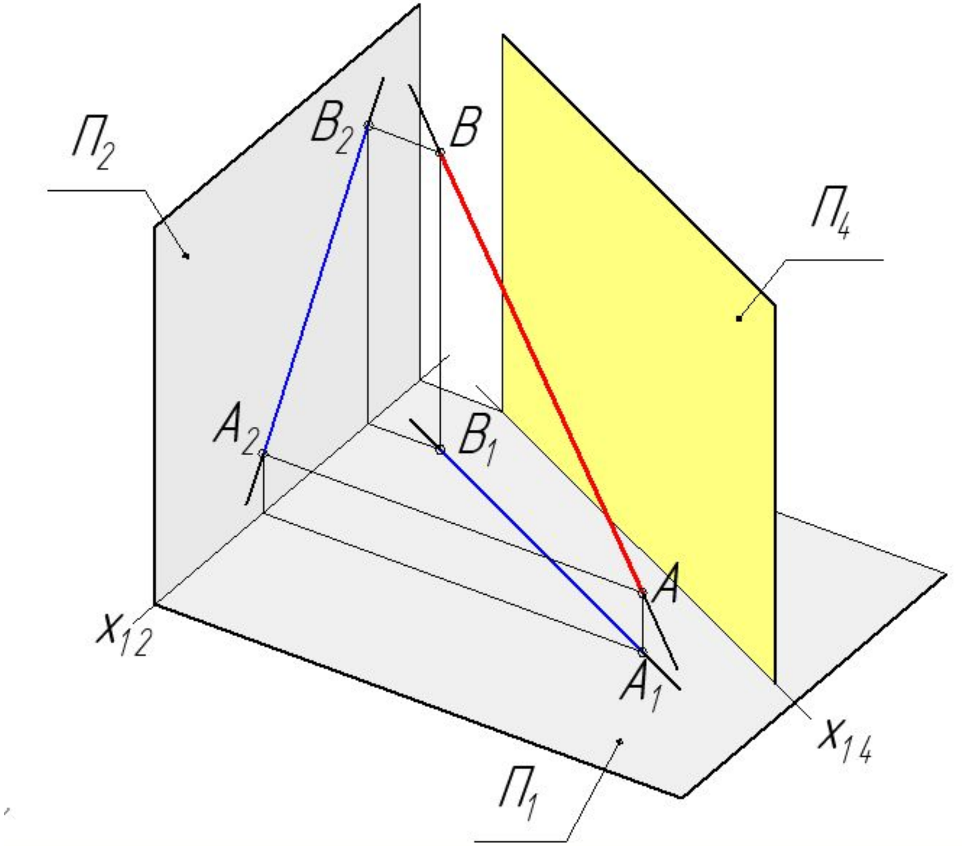
(построение дополнительной проекции прямой линии на параллельной ей плоскости проекций)

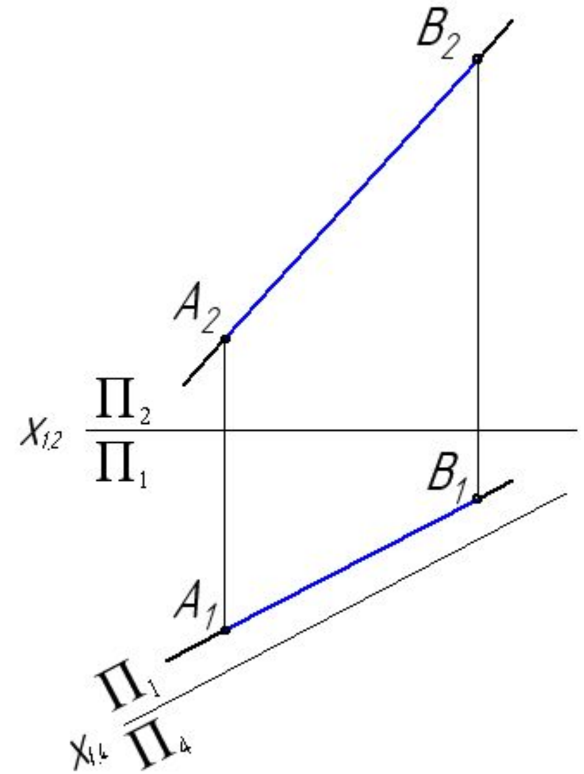




$(\Pi_2 \perp \Pi_1)$

l (***AB***) - прямая общего положения



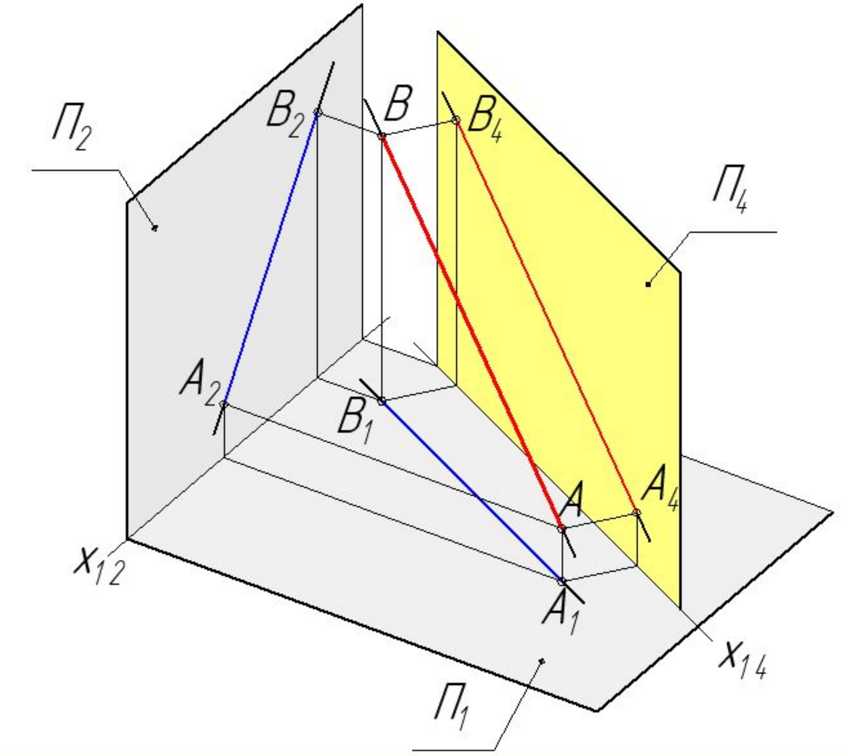


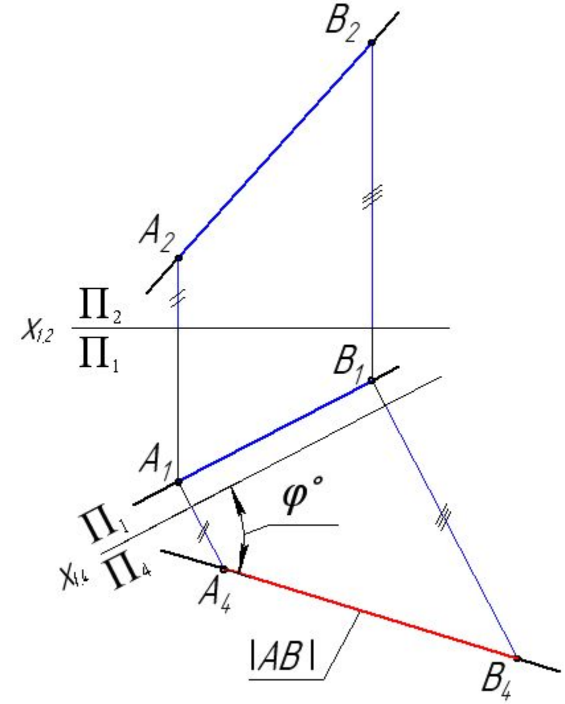
Подбирается дополнительная плоскость проекций Π_4

$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$

На эпюре $x_{14} \parallel l_1 \quad \vee \quad x_{24} \parallel l_2$

В качестве примера взята $\Pi_4 \perp \Pi_1$, следовательно, $x_{14} \parallel l_1$





Строится дополнительная проекция $\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{AB})$ на поле плоскости $\mathbf{П}_{\mathbf{4}}$.

$$\boldsymbol{A_1A_4 \perp x_{1,4}} \text{ и } \boldsymbol{B_1B_4 \perp x_{1,4}},$$

$$(\boldsymbol{A_2x_{1,2}}) = (\boldsymbol{A_4x_{1,4}}) \text{ и } (\boldsymbol{B_2x_{1,2}}) = (\boldsymbol{B_4x_{1,4}})$$

Базовое преобразование №2.

Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

(построение дополнительной проекции прямой линии в виде точки)

При прямоугольном проецировании прямая является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций. Следовательно, дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна заданной прямой

$$\Pi' \perp l,$$

Но, так как l – прямая общего положения,

то Π' – также является плоскостью общего положения

и $\Pi' \not\perp \Pi_1$ и $\Pi' \not\perp \Pi_2$,

<u>Следовательно,</u> чтобы получить проекцию прямой линии общего положения в виде точки способом перемены плоскостей проекций, нельзя сразу подобрать необходимую плоскость проекций.

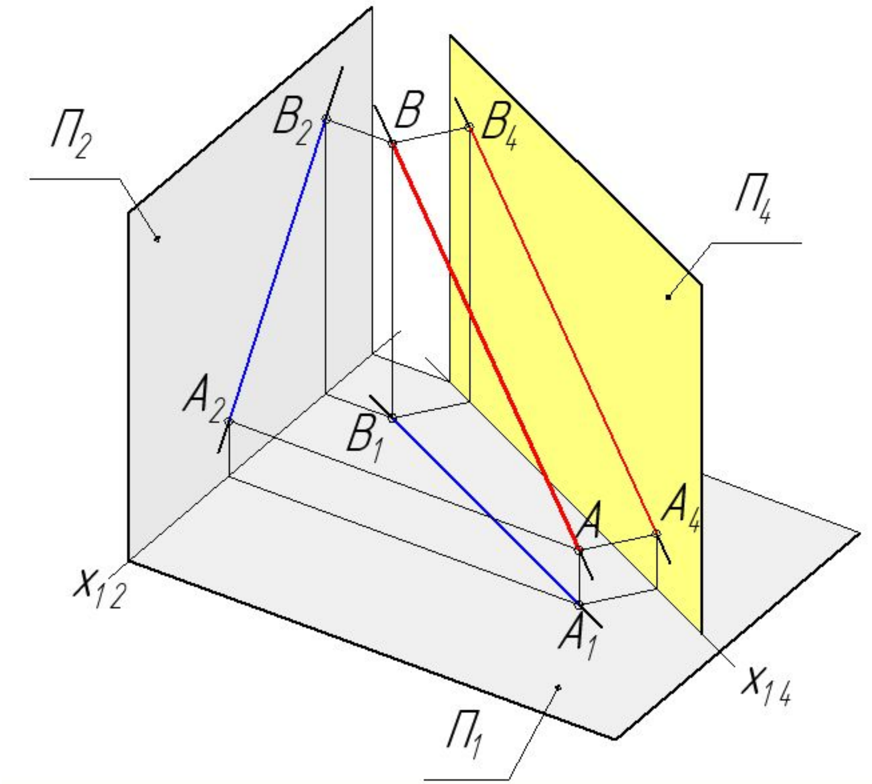
Данное преобразование выполняется в два этапа.

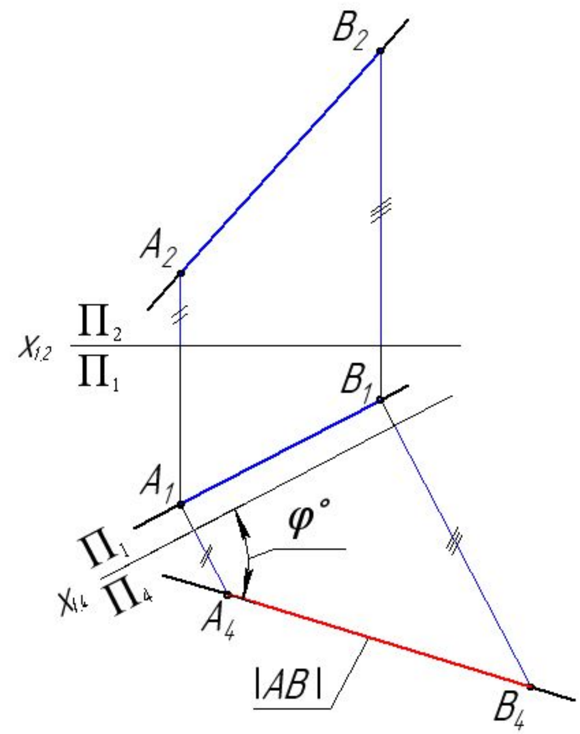
1-й этап

Прямая преобразуется в прямую уровня

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge (\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Это рассмотренная ранее базовая задача №1 на построение проекции прямой общего положения на плоскости проекций ей параллельной.

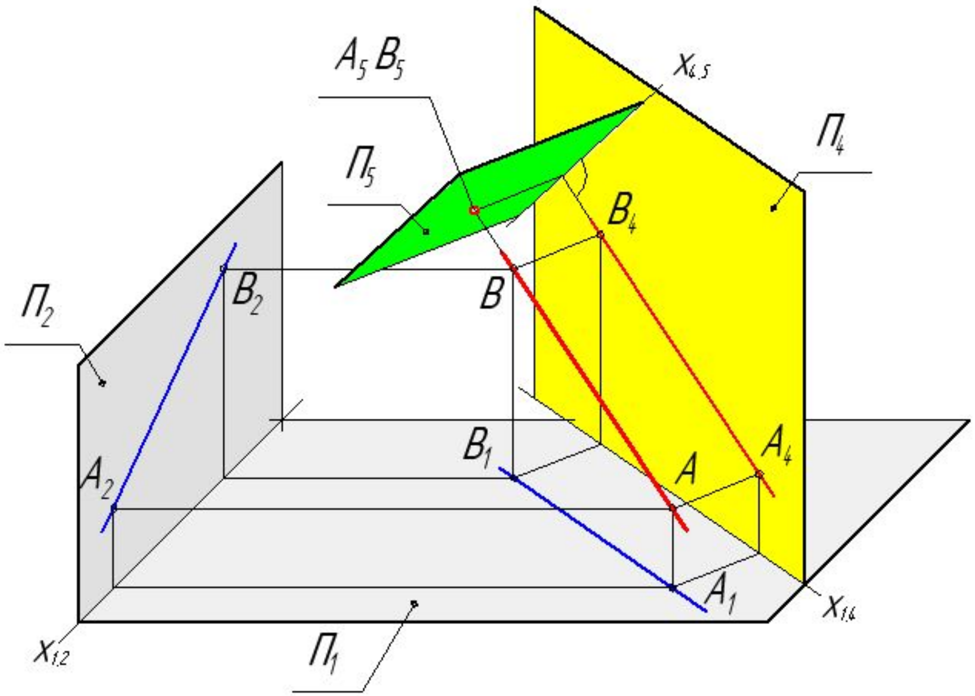


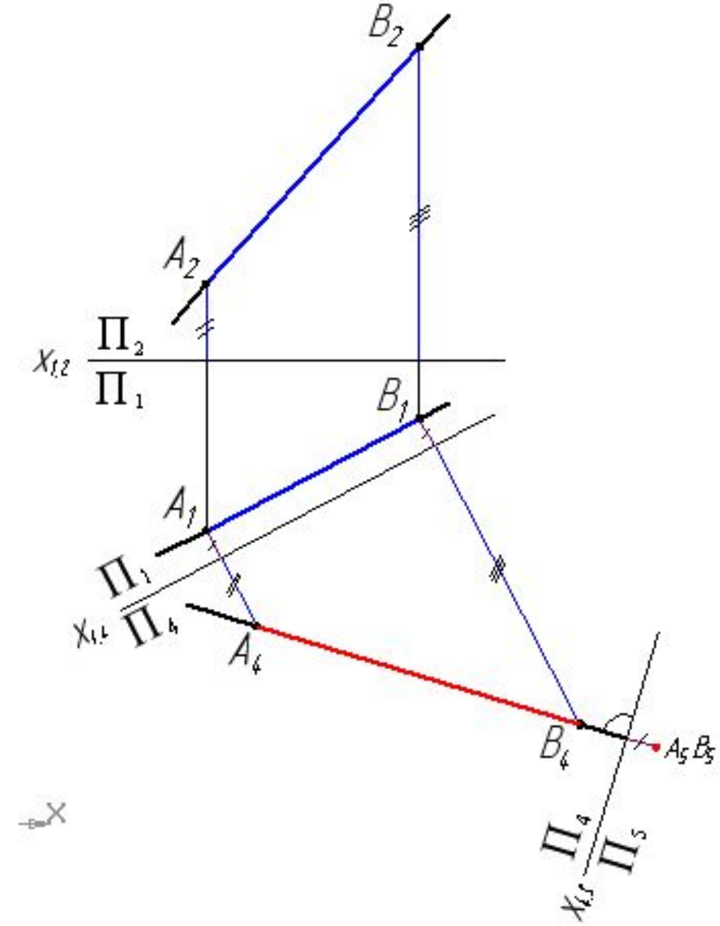


2-й этап

Из прямой уровня прямая преобразуется в проецирующую прямую

$$(\Pi_5 \perp l) \wedge (\Pi_5 \perp \Pi_4)$$



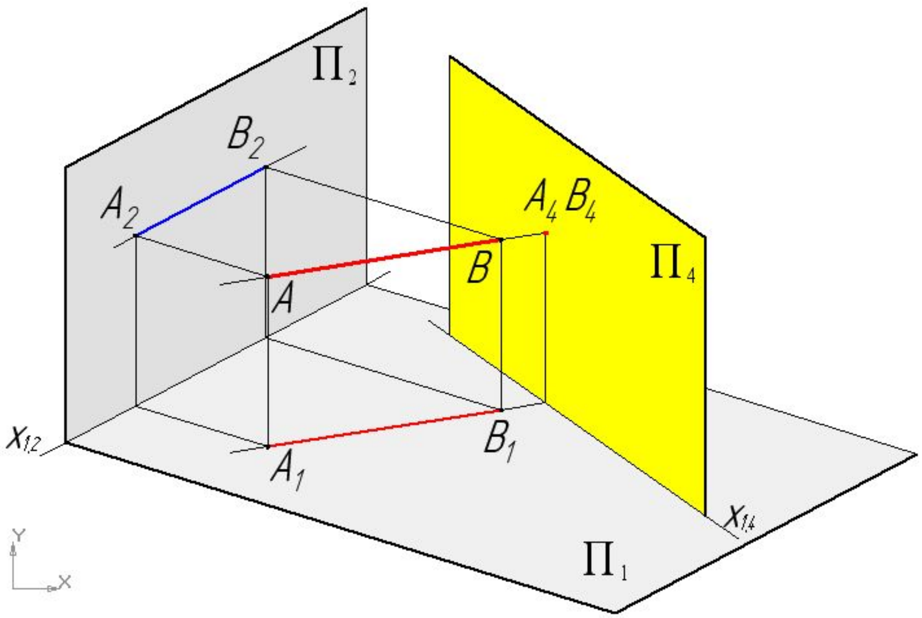


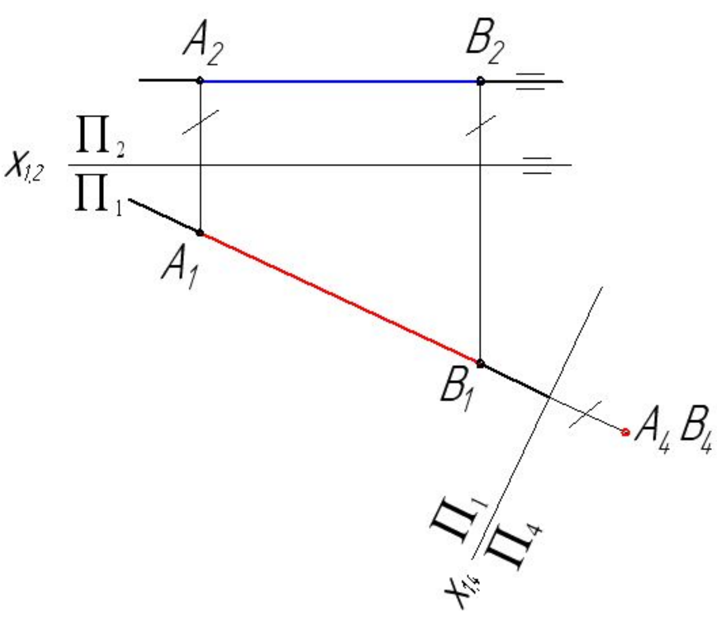
$$x_{4,5} \perp A_4B_4$$

$$(A_1B_1, x_{1,4}) = (A_5B_5, x_{4,5})$$

Для прямой уровня данное преобразование выполняется за один этап

Прямая уровня (h или f) параллельна плоскости проекций. Следовательно, если $\Pi' \perp$ (h или f), то $\Pi' \perp$ (Π_1 или Π_2), что удовлетворяет требования способа перемены плоскостей проекций.





Базовое преобразование № 3.

Преобразование плоскости (торсовой поверхности) общего положения в проецирующую поверхность

(построение проекции плоскости в виде прямой линии)

- Плоскость является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций.
- Следовательно, подбираемая новая плоскость проекций $\mathbf{П_4}$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости, например $\mathbf{T}$.
- $$(\mathbf{П_4} \perp \mathbf{T})$$
- Если плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них должна содержать хотя бы одну прямую, перпендикулярную другой плоскости.
- $$(\mathbf{П_4} \perp \mathbf{T}) \Rightarrow (\mathbf{П_4} \perp \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \subset \mathbf{T})$$

$$(\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Если $(l \perp \Pi_4)$ и $(\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$

то $(l \parallel \Pi_1 \vee l \parallel \Pi_2)$

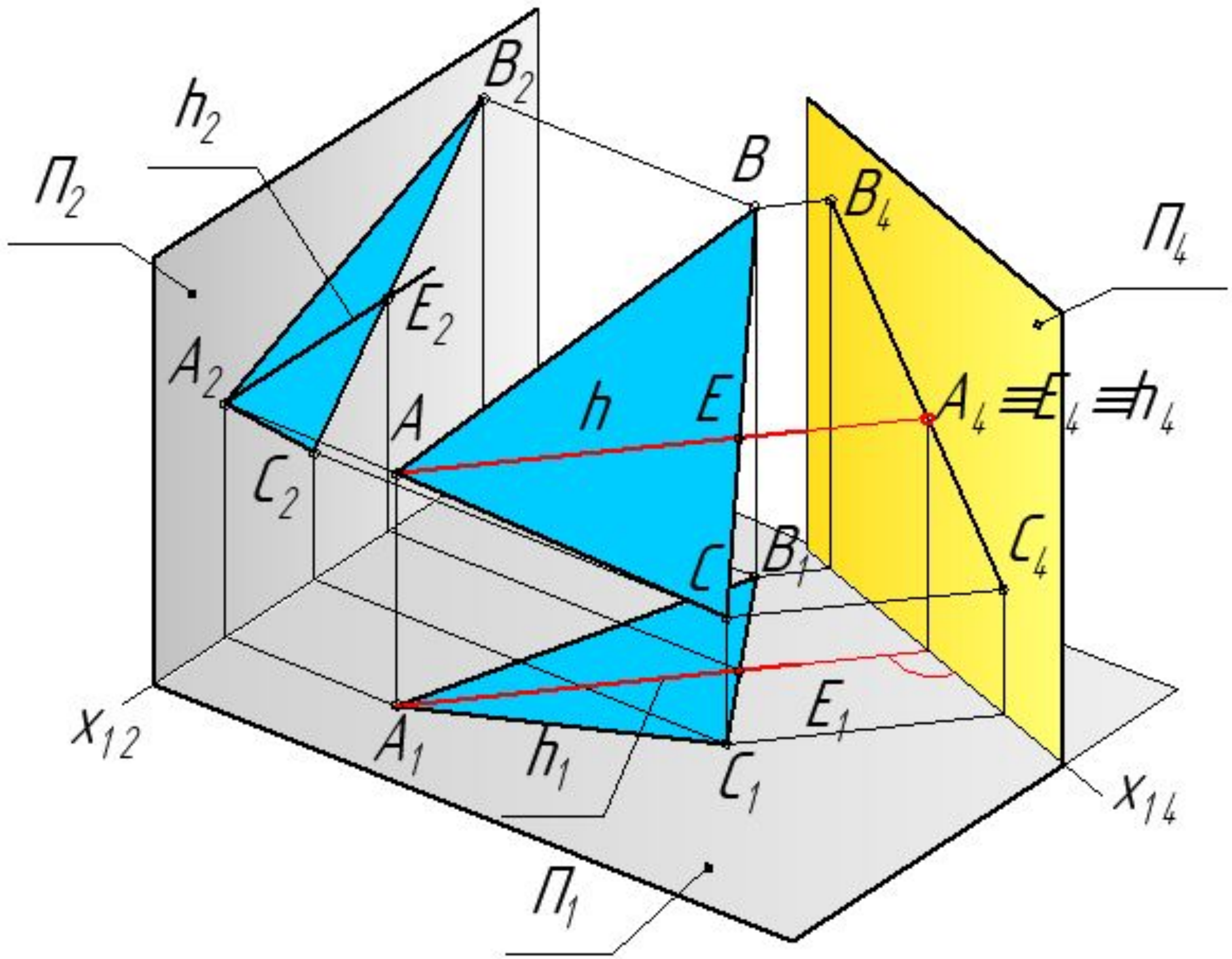
$$\Rightarrow (l \equiv h) \vee (l \equiv f)$$

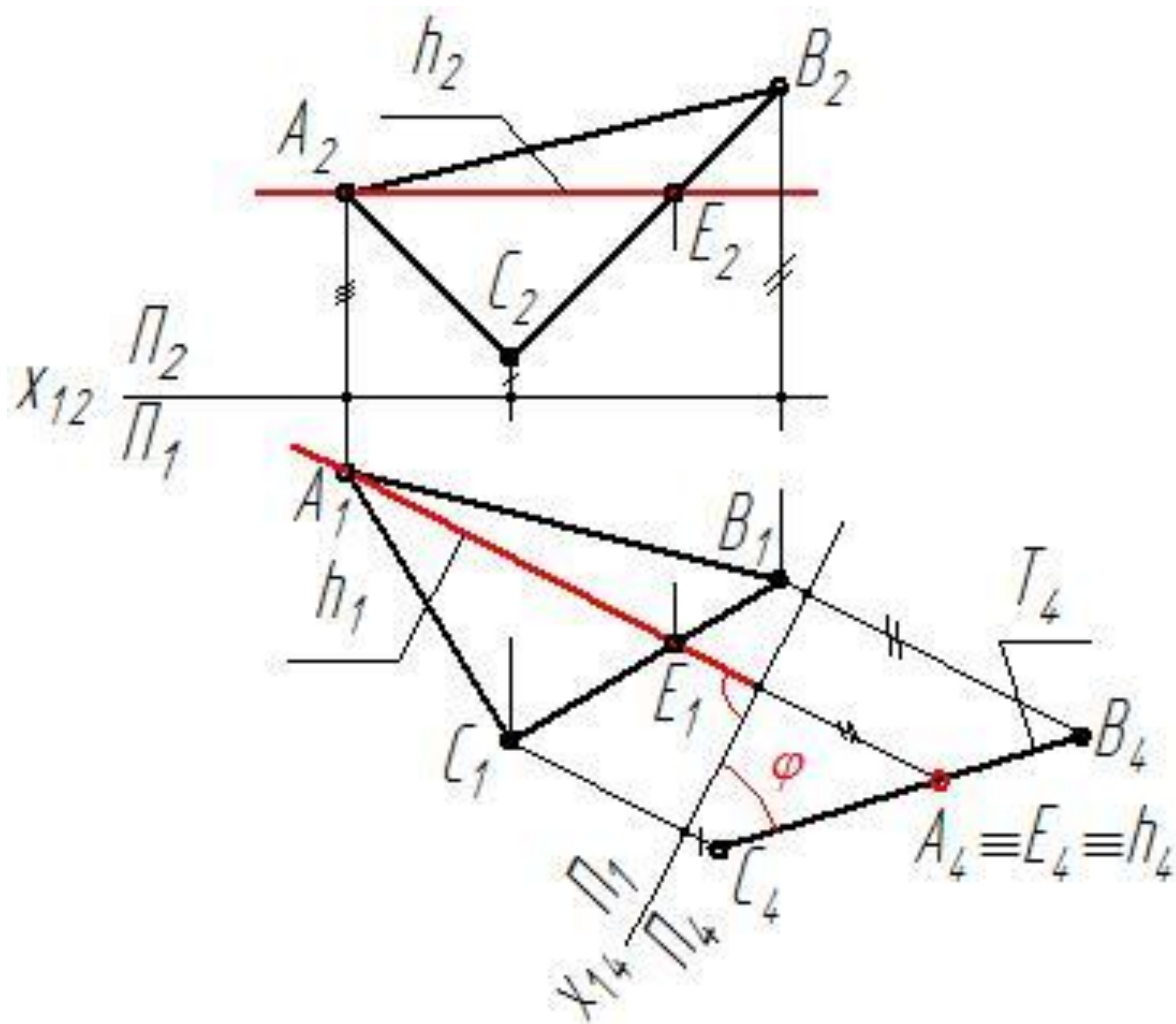
Следовательно,

если $(\Pi_4 \perp \Pi_1)$, ***то*** $(\Pi_4 \perp h, h \subset T)$ ***и*** $(x_{1,4} \perp h_1)$

если $(\Pi_4 \perp \Pi_2)$, ***то*** $(\Pi 4 \perp f, f \subset T)$ ***и*** $(x_{2,4} \perp f_2)$

В качестве примера $\Pi_4 \perp \Pi_1$





h_2
B_2
A_2
E_2
C_2
x_{12}
Π_2
Π_1
A_1
B_1
h_1
T_4
E_1
B_4
C_1
φ
$A_4 \equiv E_4 \equiv h_4$
C_4
Π_1
Π_4
x_{14}

Базовое преобразование № 4.

Построение проекции плоской фигуры на параллельной ей плоскости проекций

Решение задачи способом замены плоскостей проекций

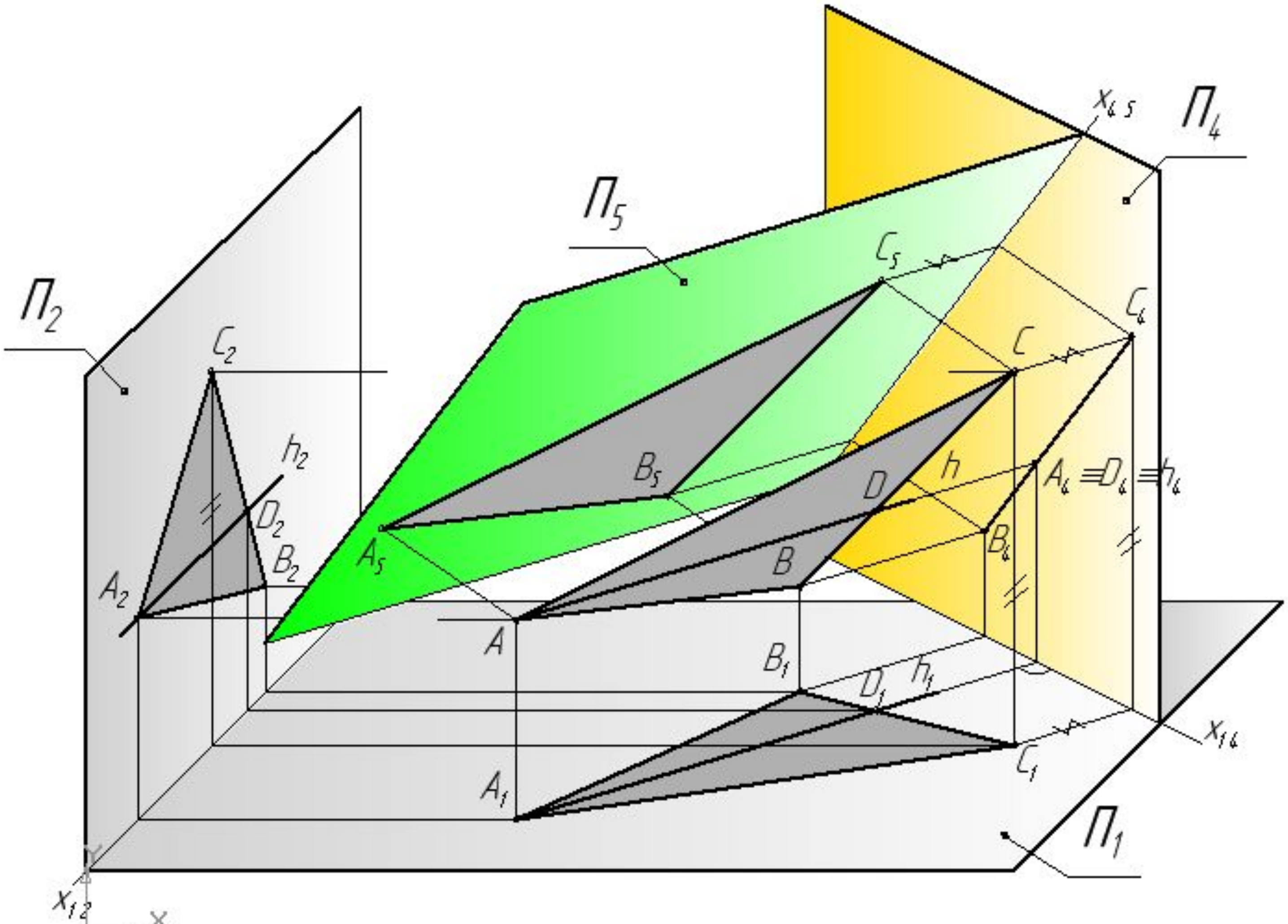
$\Pi' \parallel T$

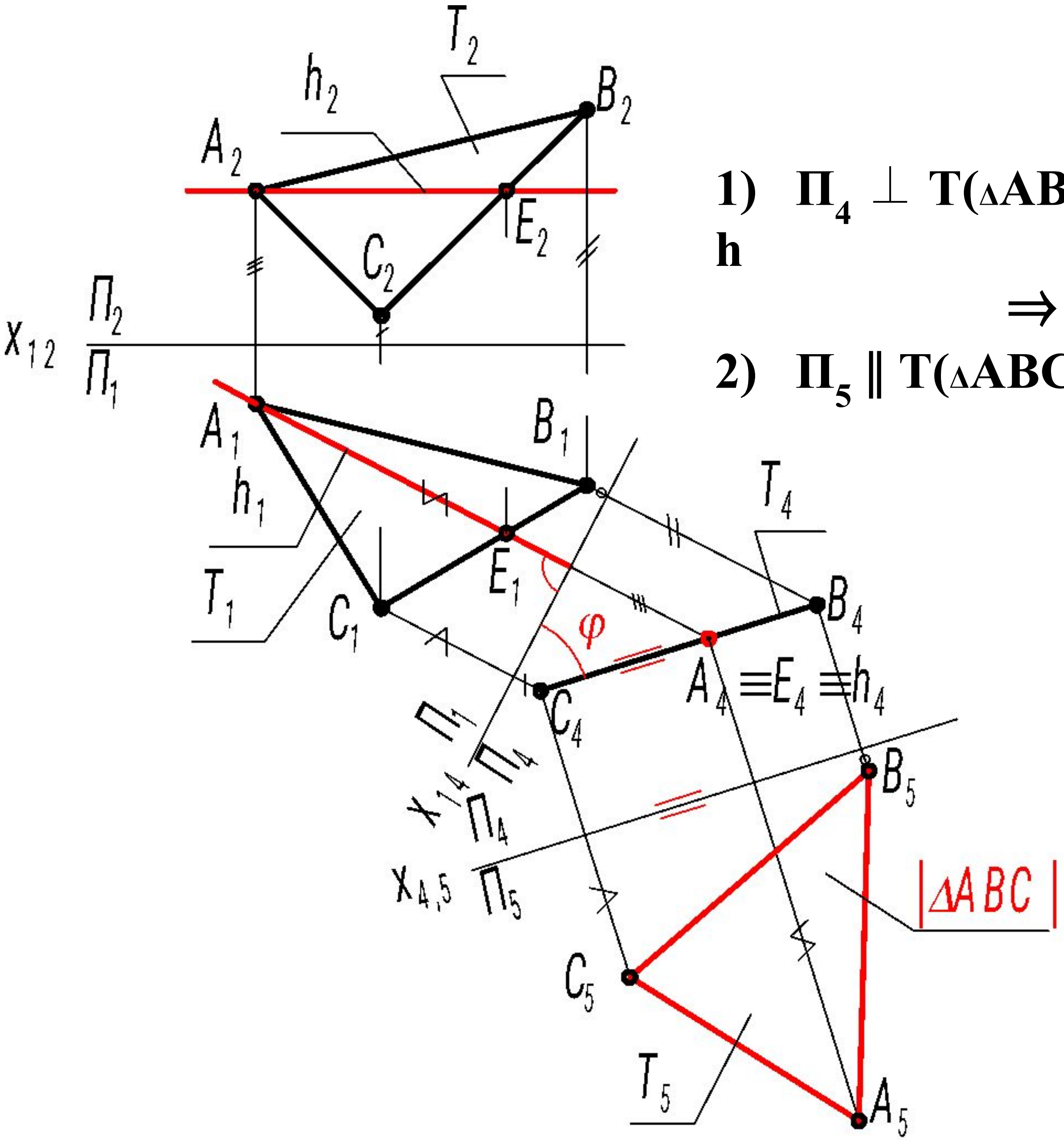
Так как плоскость T – плоскость общего положения, то и любая плоскость ей параллельная, в том числе и проекций Π', также будет плоскостью общего положения, т.е. $\Pi' \perp \Pi_1$ и $\Pi' \perp \Pi_2$, что противоречит способу замены плоскостей проекций. Следовательно, задача должна решаться в два этапа.

<u>1-й этап</u>. $\Pi_4 \perp T$ (базовая задача №3).

<u>2-й этап</u>. $\Pi_5 \parallel T$.

1). $\Pi_4 \perp T(_\Delta ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$
2). $\Pi_5 \parallel T(_\Delta ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4$



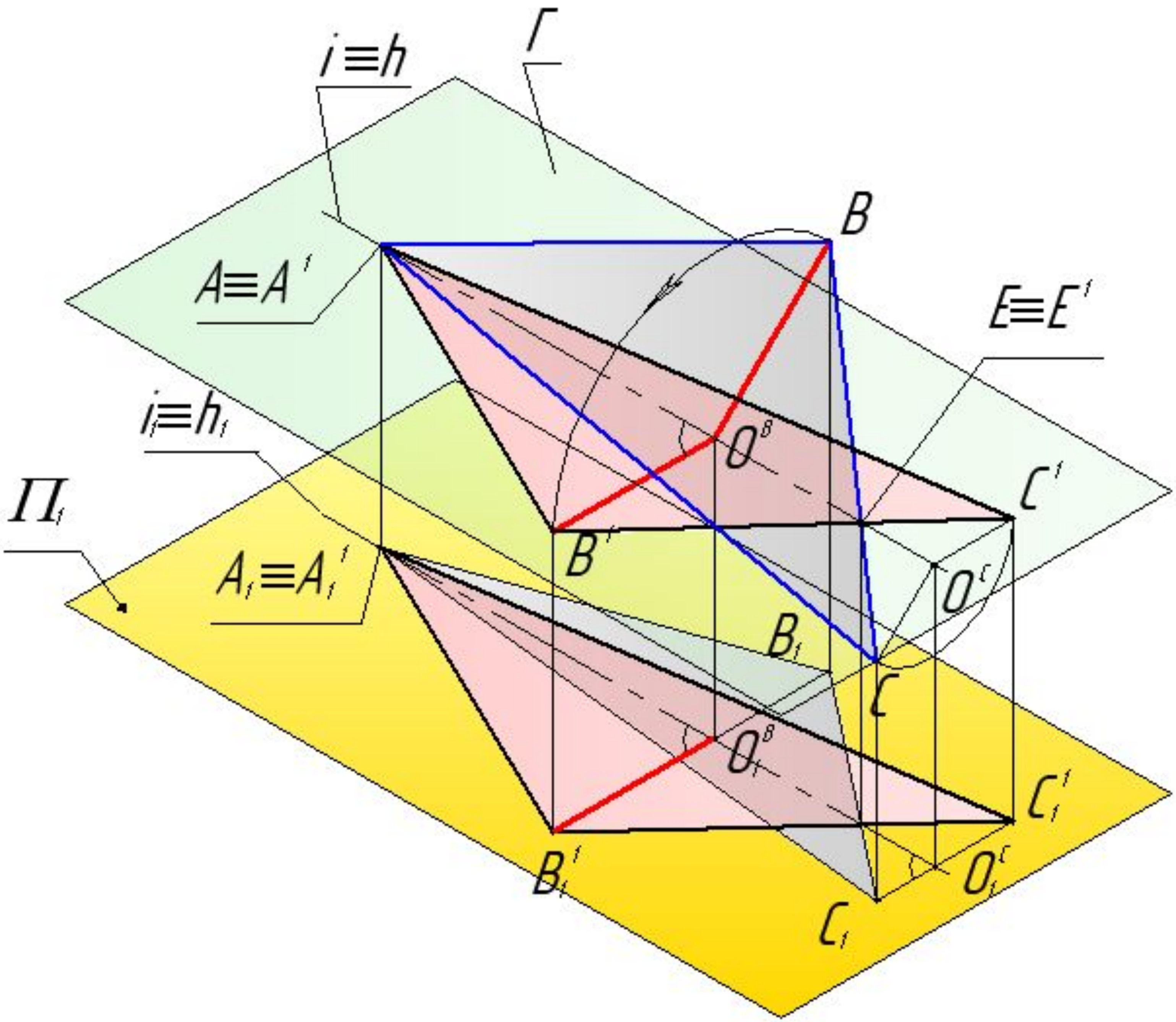


1) $П_4 \perp T(\Delta ABC)$, $П_4 \perp П_1 \Rightarrow П_4 \perp h$

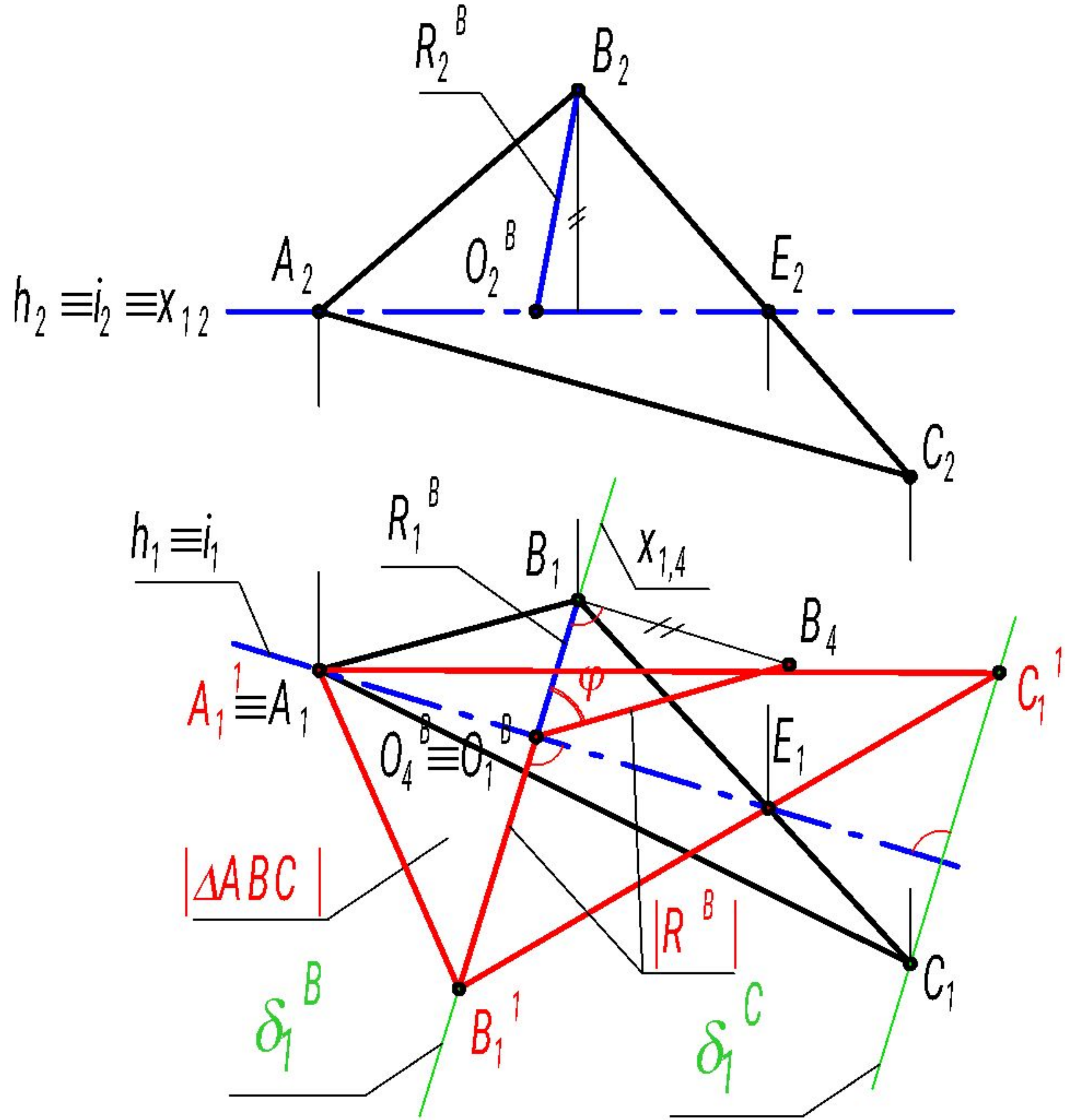
$\Rightarrow x_{1,4} \perp h_1$

2) $П_5 \parallel T(\Delta ABC)$, $П_5 \perp П_4 \Rightarrow x_{4,5} \parallel T_4$

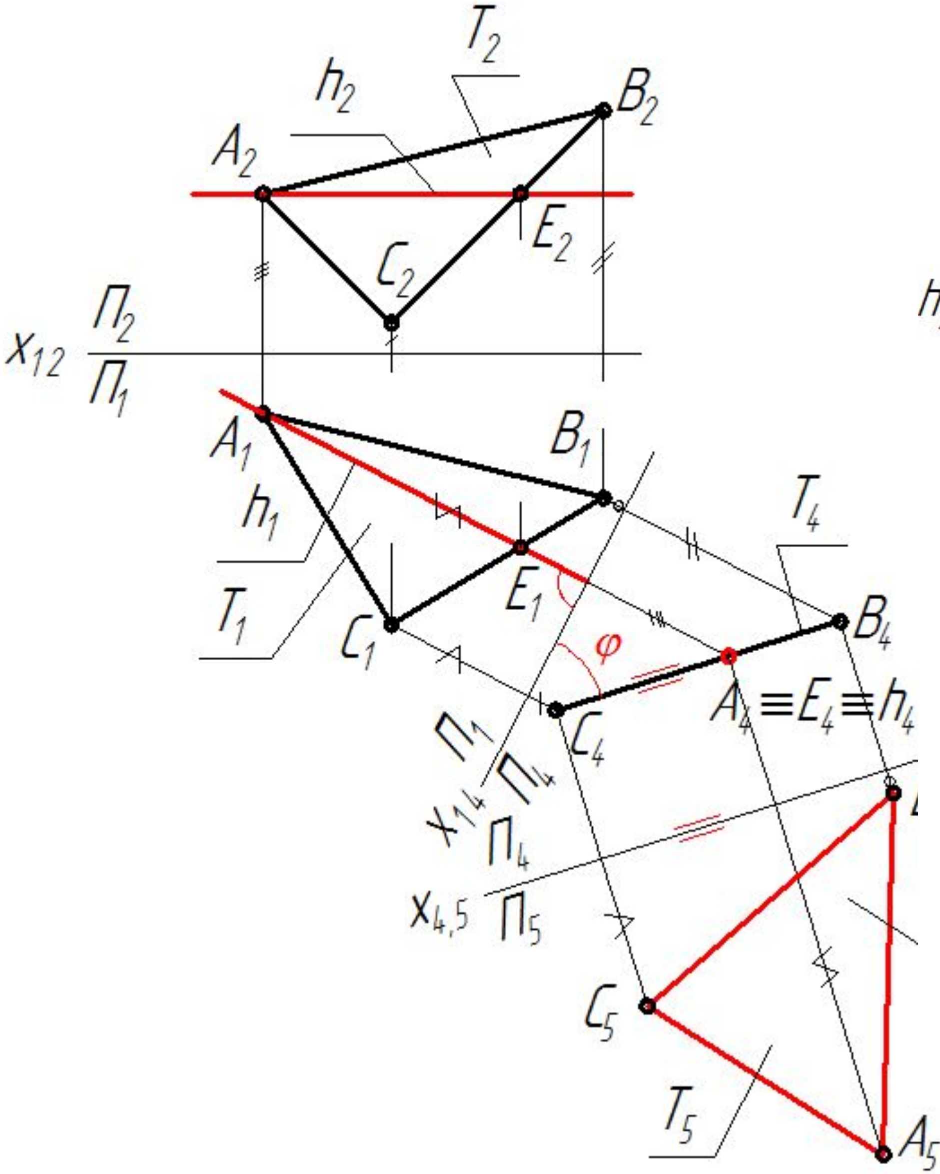
Решение задачи способом вращения вокруг прямой уровня



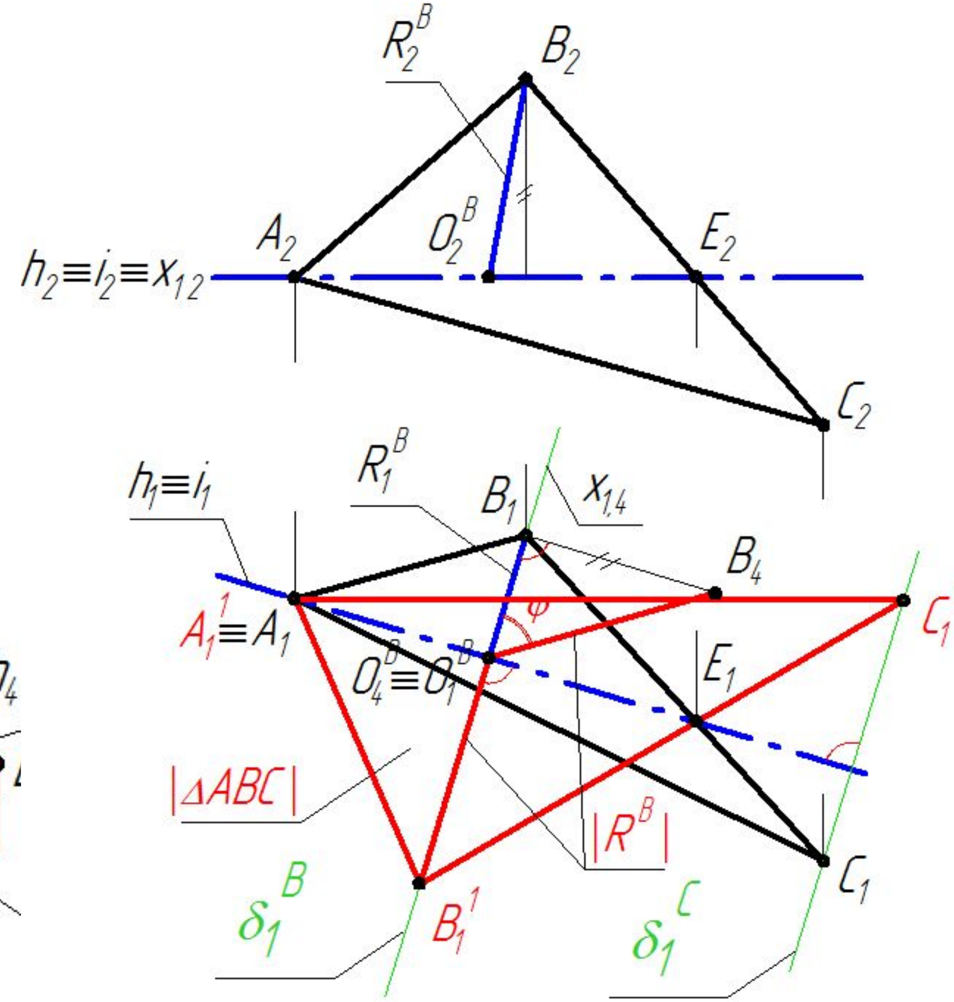
Γ
i≡h
A≡A'
B
E≡E'
O^B
C'
i₁≡h₁
Π₁
B'
A₁≡A₁'
O^C
B₁
C
O₁^B
C₁'
B₁'
O₁^C
C₁



R_2^B
B_2
O_2^B
A_2
E_2
$h_2 \equiv i_2 \equiv x_{12}$
C_2
R_1^B
$h_1 \equiv i_1$
B_1
$x_{1,4}$
B_4
φ
$A_1^1 \equiv A_1$
C_1^1
$O_4^B \equiv O_1^B$
E_1
$|\Delta ABC|$
$|R^B|$
C_1
δ_1^B
B_1^1
δ_1^C



T_2
h_2
A_2
B_2
E_2
C_2
x_{12}
Π_2
Π_1
A_1
B_1
h_1
T_1
C_1
E_1
φ
T_4
B_4
$A_4 \equiv E_4 \equiv h_4$
C_4
Π_1
Π_4
$x_{1,4}$
Π_4
$x_{4,5}$
Π_5
C_5
T_5
A_5



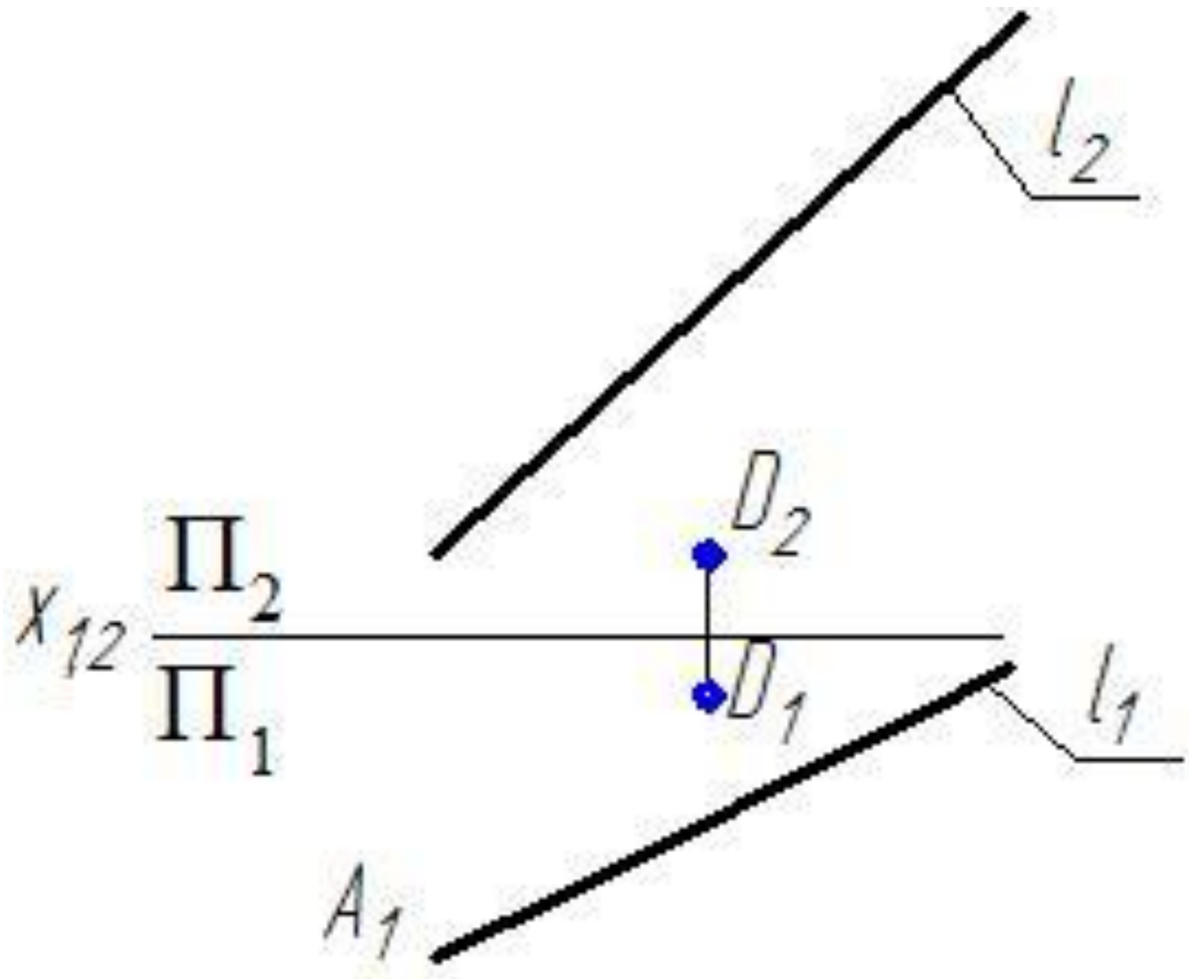
R_2^B
B_2
A_2
O_2^B
E_2
$h_2 \equiv i_2 \equiv x_{12}$
C_2
R_1^B
$h_1 \equiv i_1$
B_1
$x_{1,4}$
B_4
$A_1^1 \equiv A_1$
C_1^1
φ
$O_4^B \equiv O_1^B$
E_1
$|\Delta ABC|$
$|R^B|$
C_1
δ_1^B
B_1^1
δ_1^C

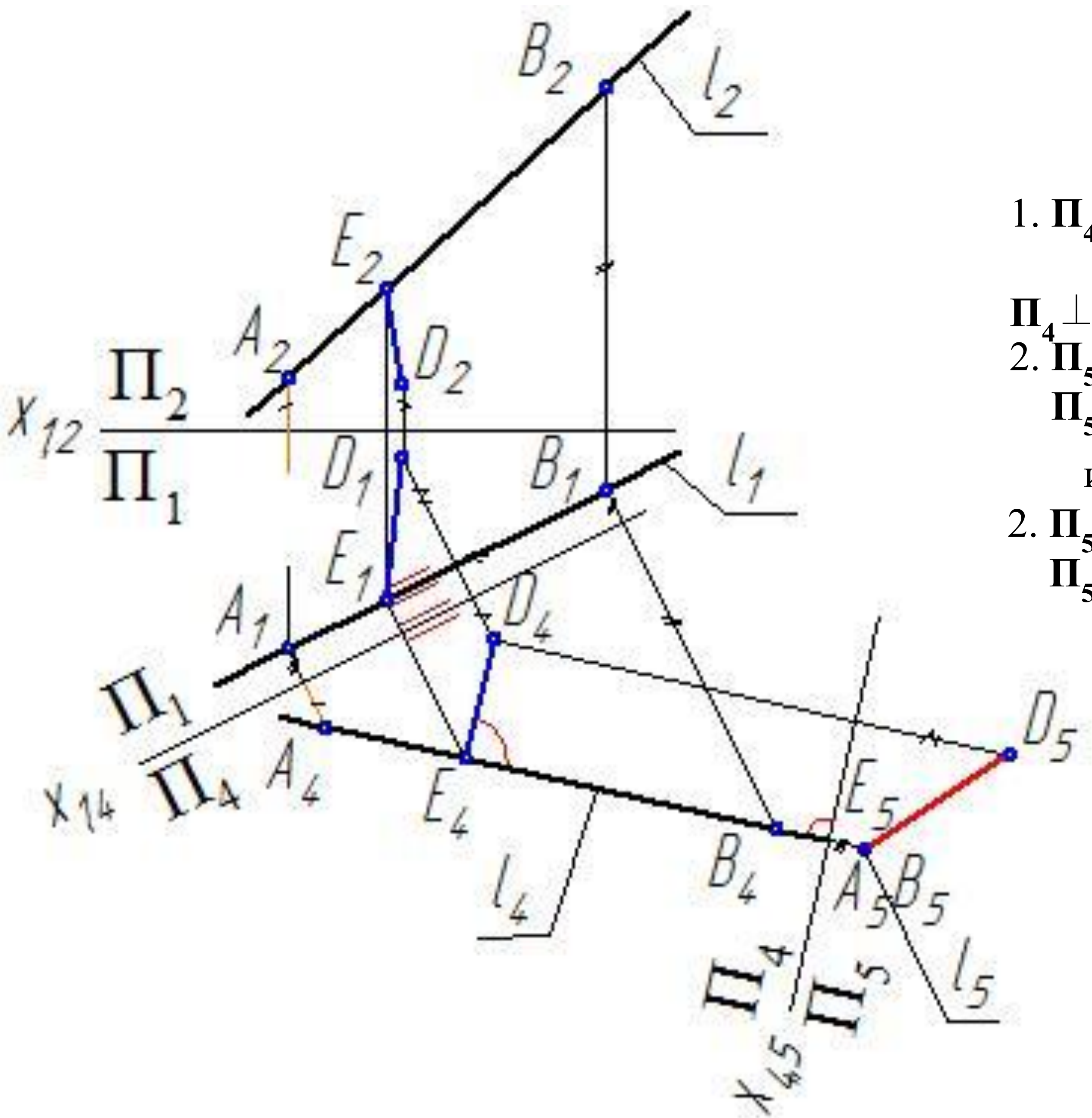
МЕТРИЧЕСКИЕ И КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

- Метрическими называются задачи, в ходе решения которых определяется значение измеряемой величины – расстояния между двумя точками (длина отрезка), величины линейного угла или истинной формы и размеров плоской фигуры.
- Конструктивными называются задачи, в ходе решения которых создается геометрический объект по наперед заданным параметрам. В определенном смысле конструктивную задачу можно рассматривать как обратную метрической задаче.

Базовая задача	Метрическая задача
№1	Определение истинной величины расстояния между двумя точками (длины отрезка прямой). Определение истинной величины угла наклона прямой к плоскости проекций. Определение истинной величины расстояния между параллельными прямыми.
№2	Определение истинной величины расстояния от точки до прямой. Определение истинной величины расстояния между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины двугранного угла, если задана линия пересечения плоскостей.
№3	Определение истинной величины расстояния от точки до плоскости. Определение истинной величины расстояния между параллельными плоскостями. Определение истинной величины угла наклона плоскости к плоскости проекций.
№4	Определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми или истинной величины плоской фигуры. Определение истинной величины угла между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины угла между прямой и плоскостью. Определение истинной величины угла между двумя плоскостями, если линия пересечения плоскостей не задана.

Расстояние от точки до прямой





1. $\Pi_4 \parallel l$ $\Rightarrow x_{14} \parallel l_1$

$\Pi_4 \perp \Pi_1$

2. $\Pi_5 \parallel DE$ $\Rightarrow x_{45} \parallel D_4E_4$

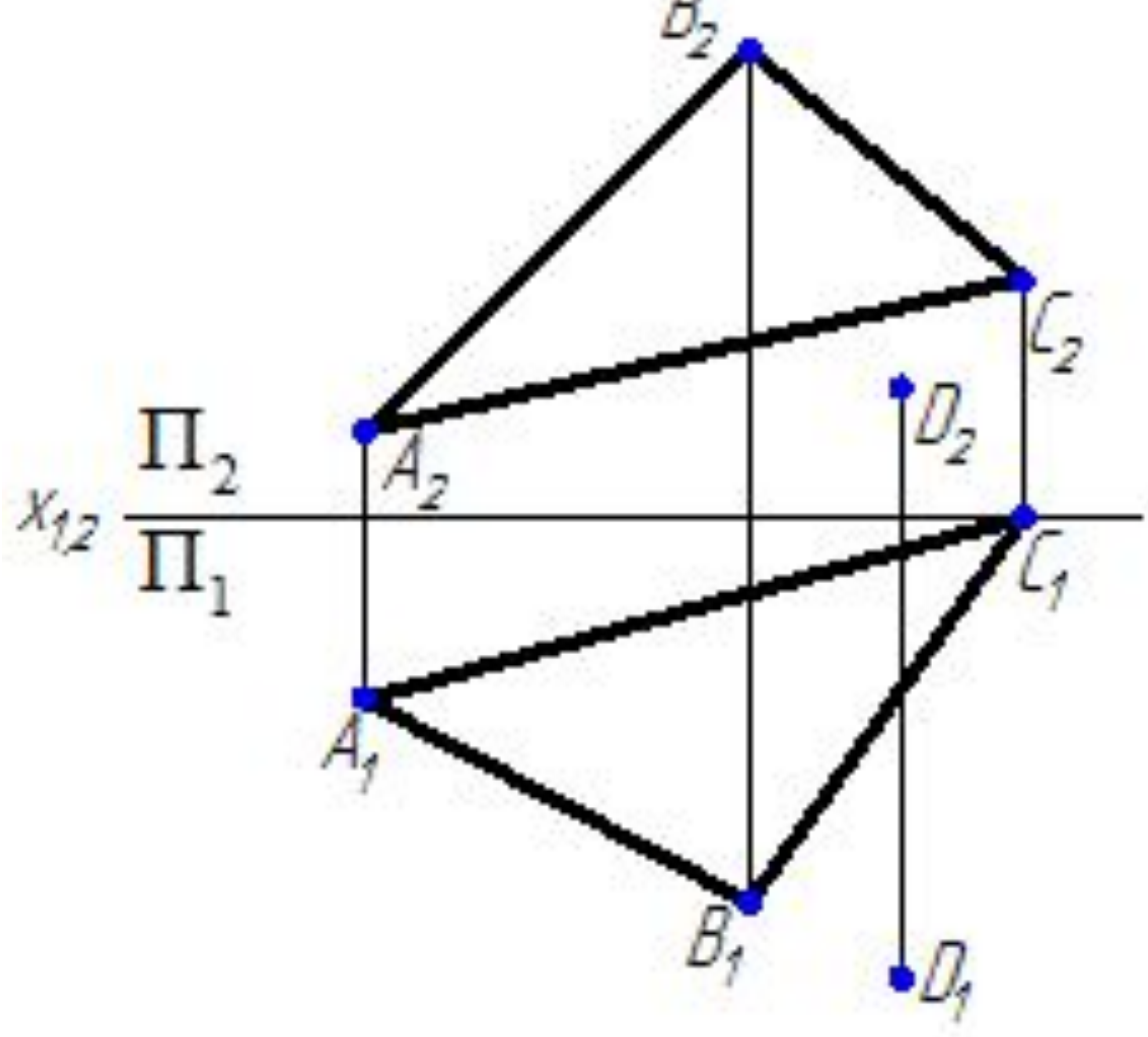
$\Pi_5 \perp \Pi_4$

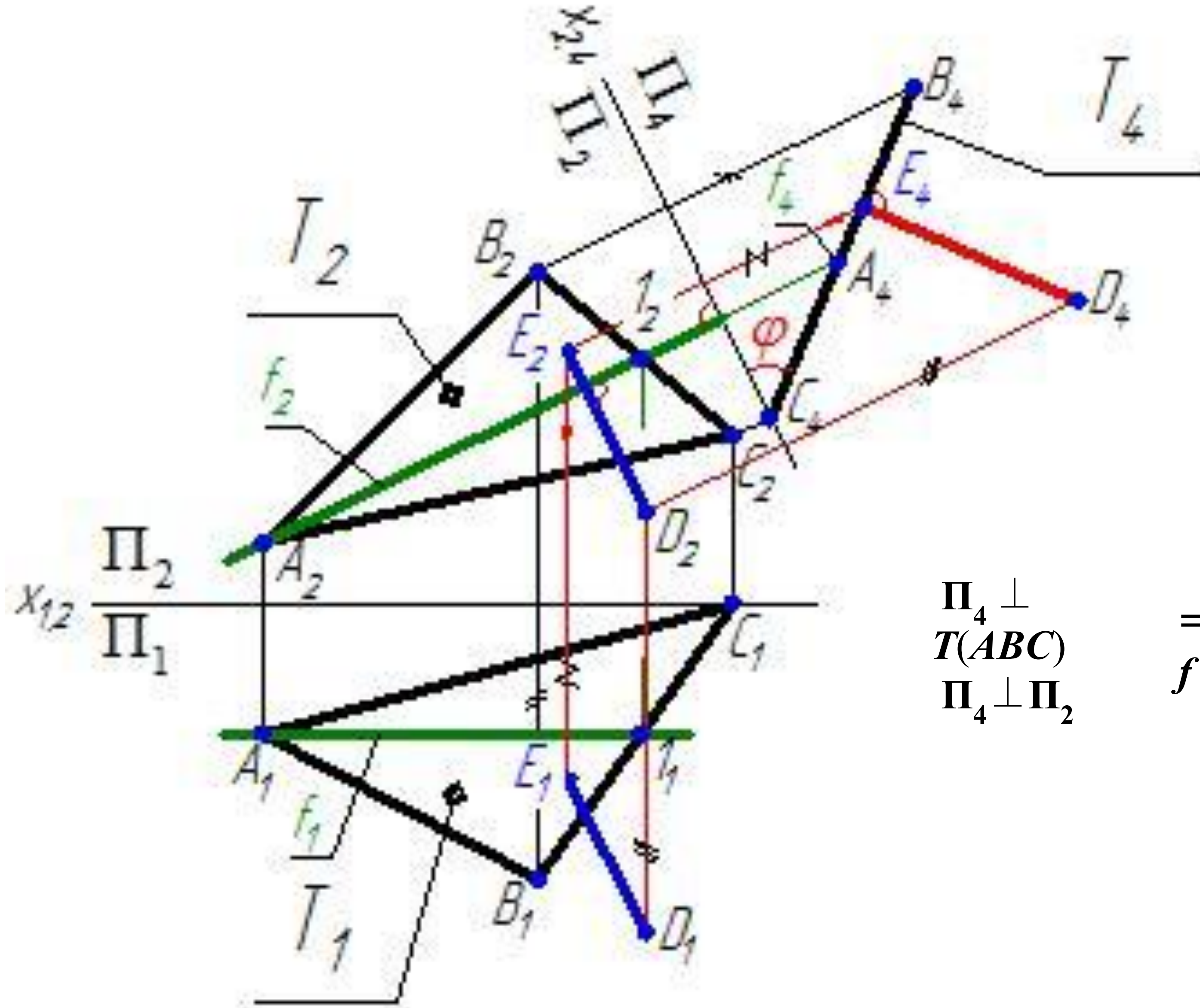
или

2. $\Pi_5 \perp l$ $\Rightarrow x_{45} \perp l_4$

$\Pi_5 \perp \Pi_4$

Расстояние от точки до плоскости





$\Pi_4 \perp T(ABC)$ $\Rightarrow \Pi_4 \perp f$ $\Rightarrow x_{24} \perp f_2$

$\Pi_4 \perp \Pi_2$

Угол между прямой и плоскостью

$\angle \varphi = l \wedge \alpha$

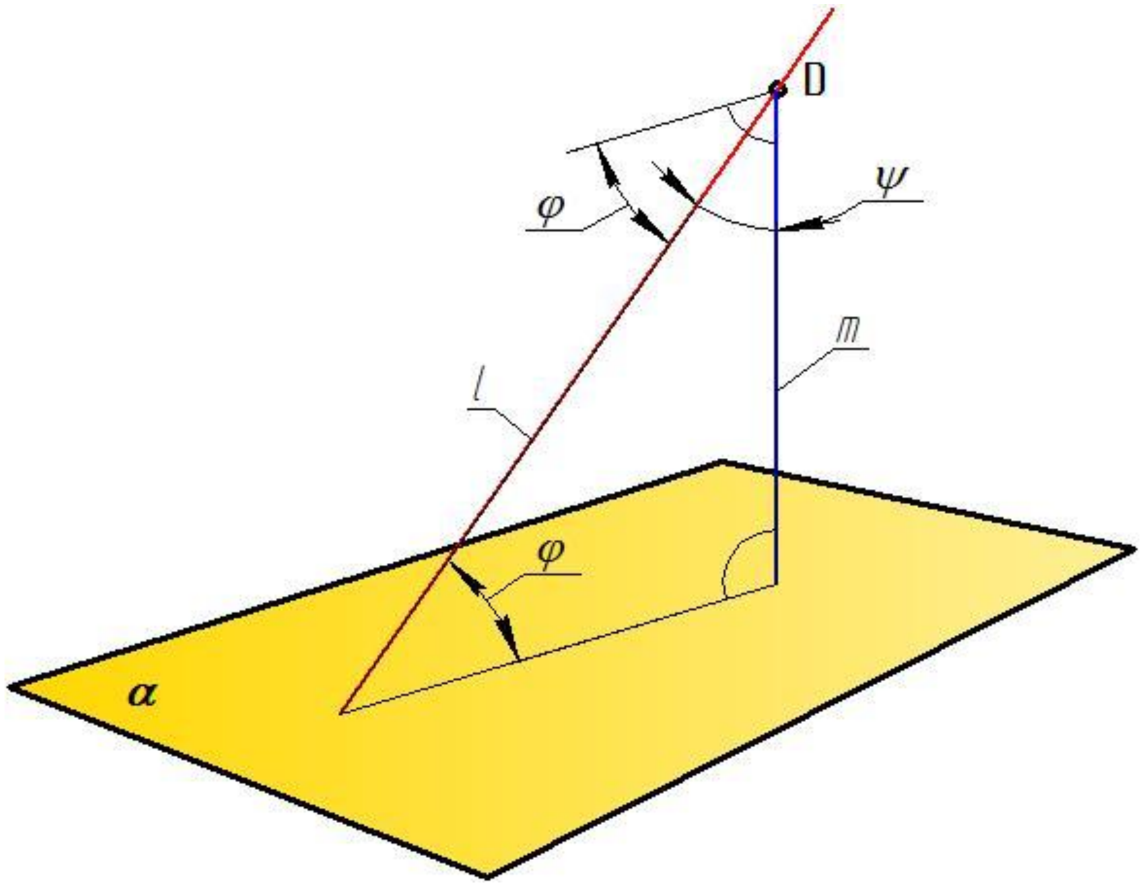
D – произвольная точка

$D \in l$

$m \perp \alpha$

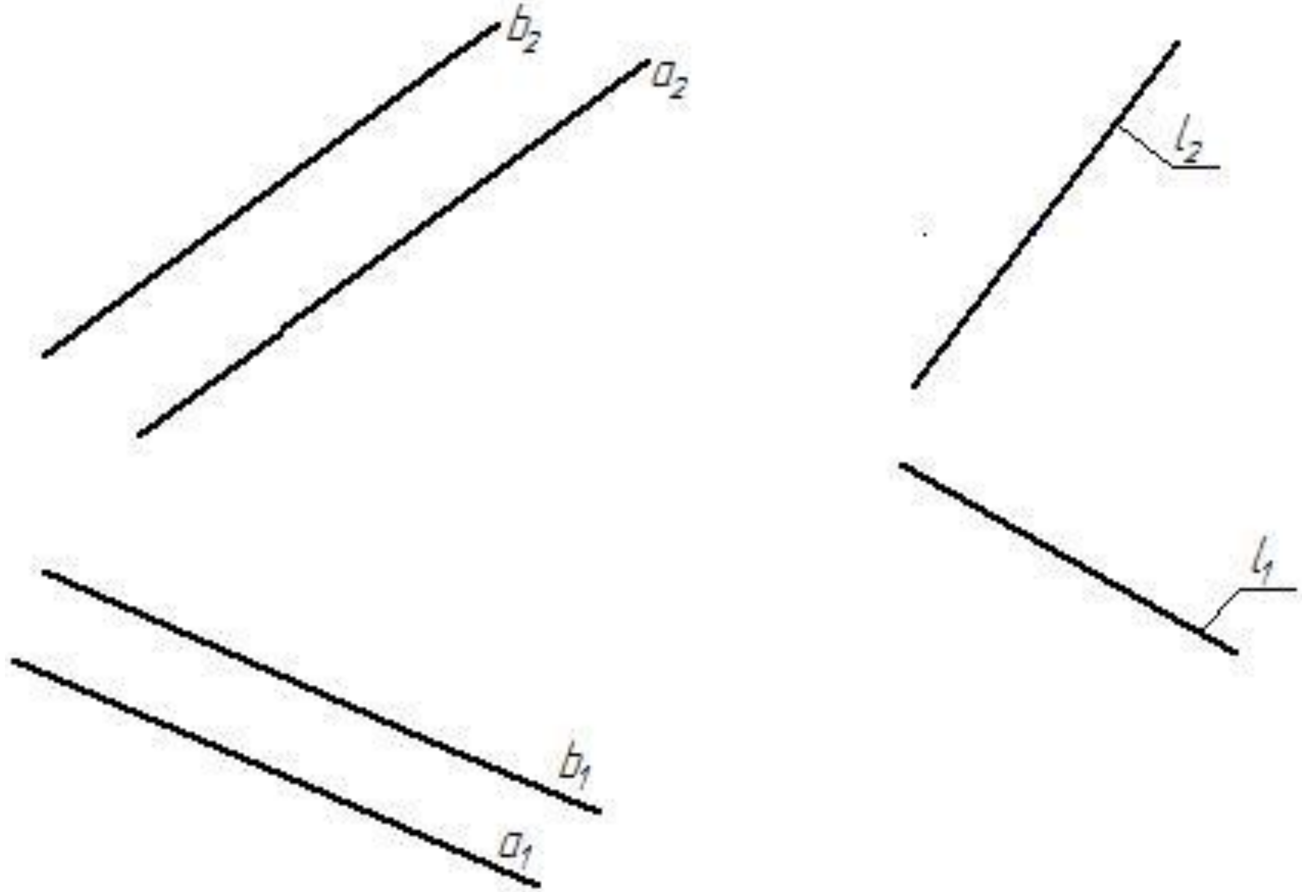
$\angle \psi = m \wedge l$

$\varphi = 90° - \psi$



Угол между прямой и плоскостью
Исходные данные

Заданы прямая $\boldsymbol{l}$ и плоскость $\boldsymbol{\alpha(a,b)}$

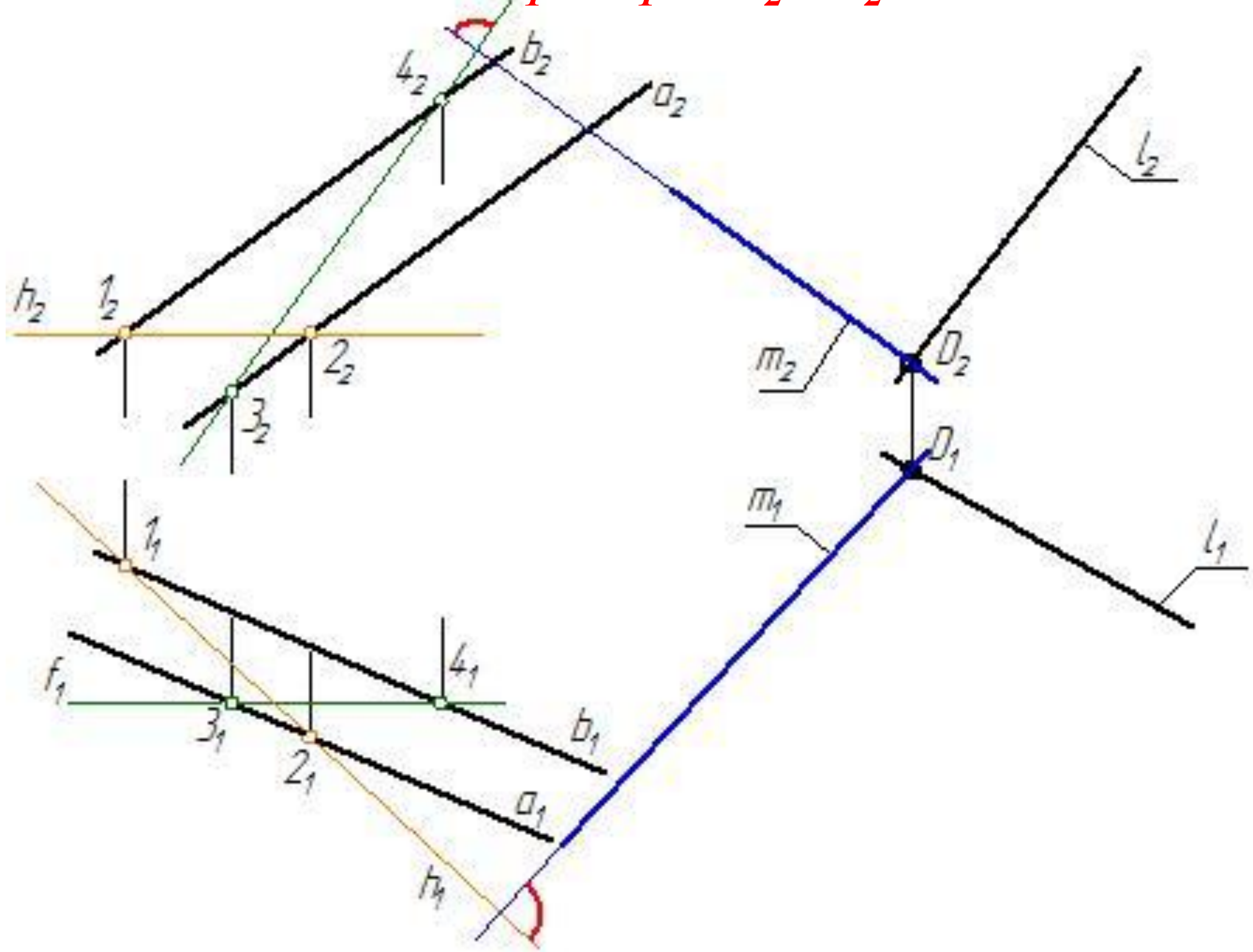


1. На прямой l выбирается произвольная точка D.

2. Через точку D проводят перпендикуляр к заданной плоскости.

$m \perp \alpha$

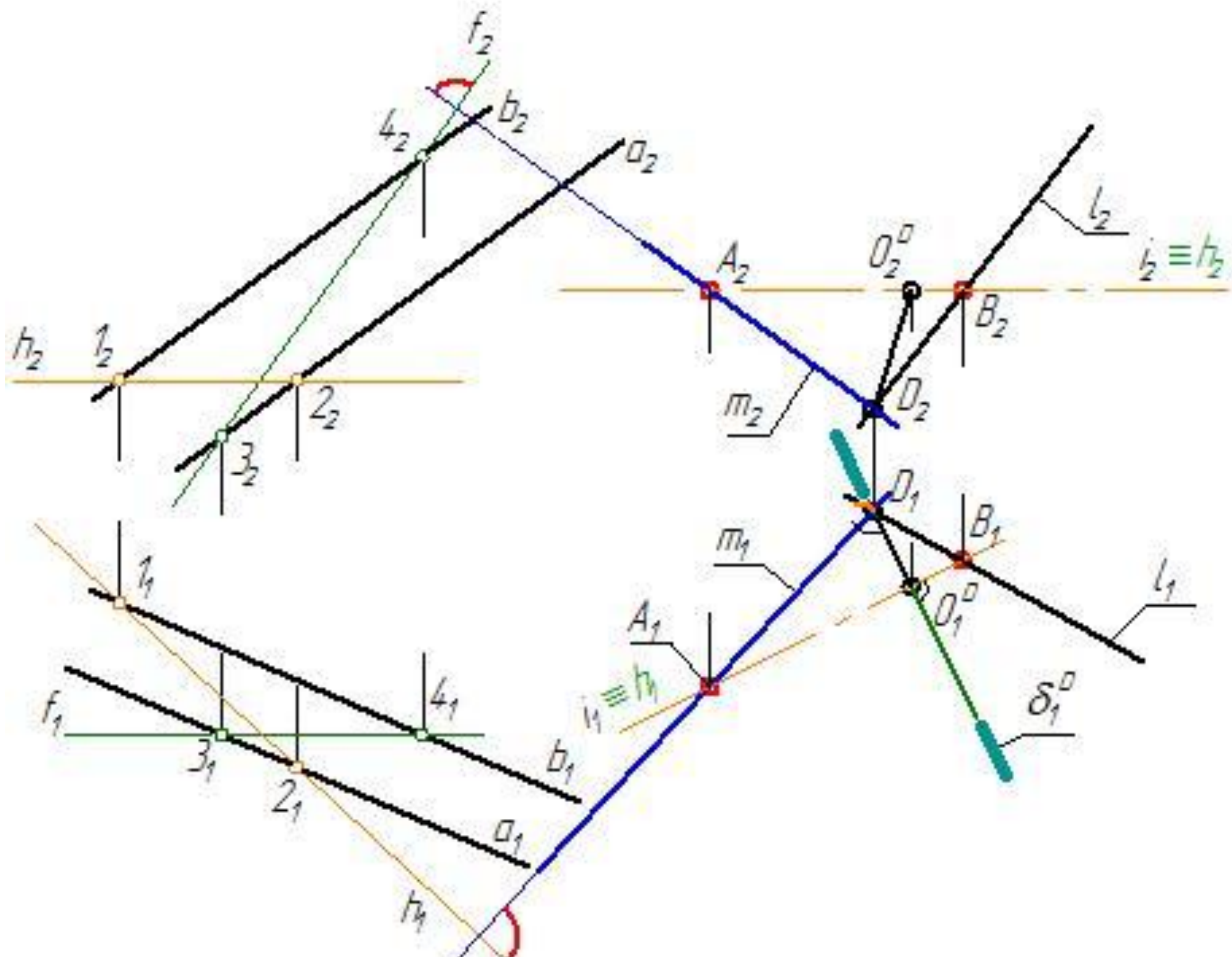
$(m_1 \perp h_1 \quad m_2 \perp f_2)$



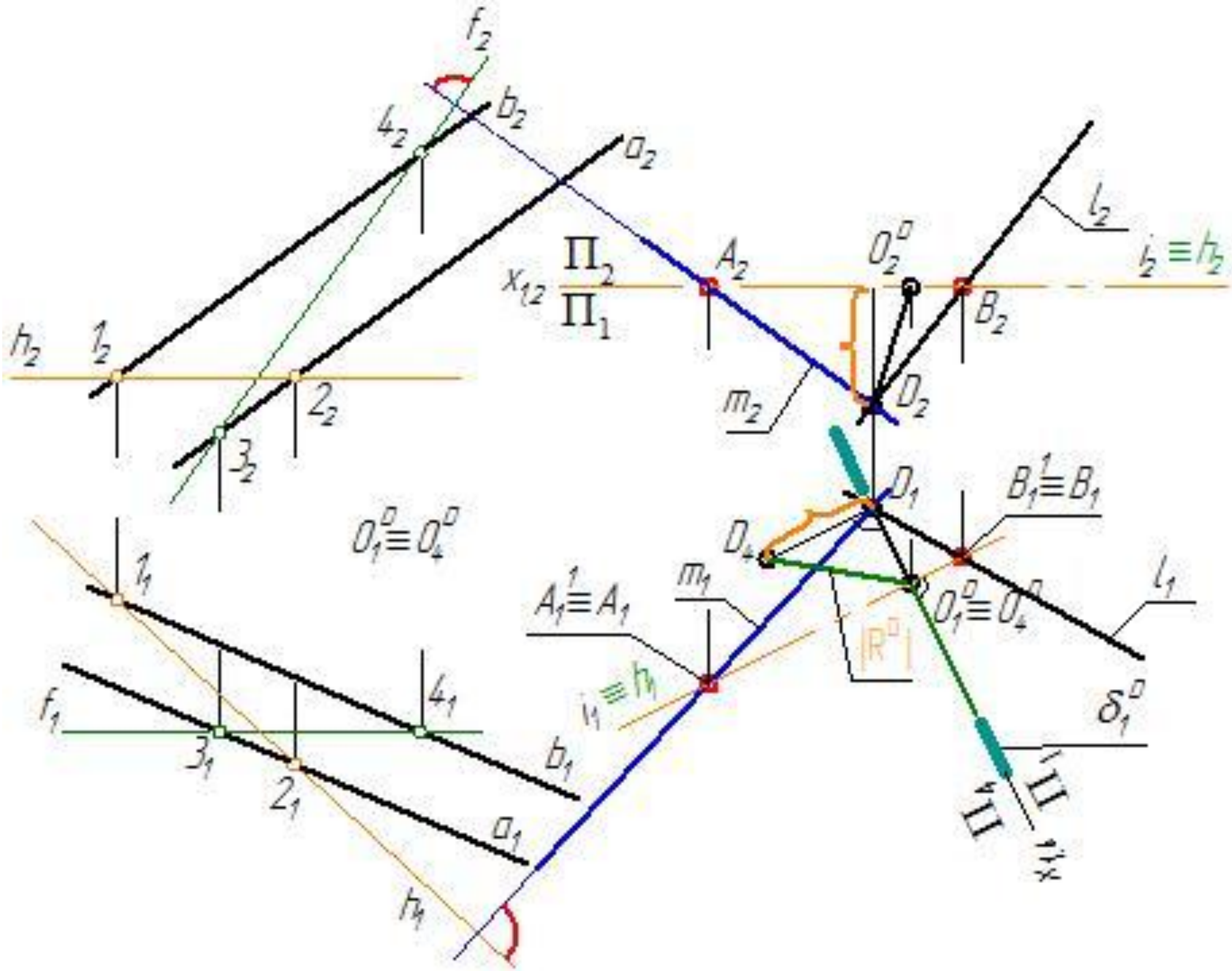
3. В плоскости, образованной прямыми m и l, проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($h \equiv i$).

4. Задают плоскость вращения δ точки D вокруг оси i. $\delta_1 \perp i_1$

5. Отмечают центр вращения точки D – точку O.



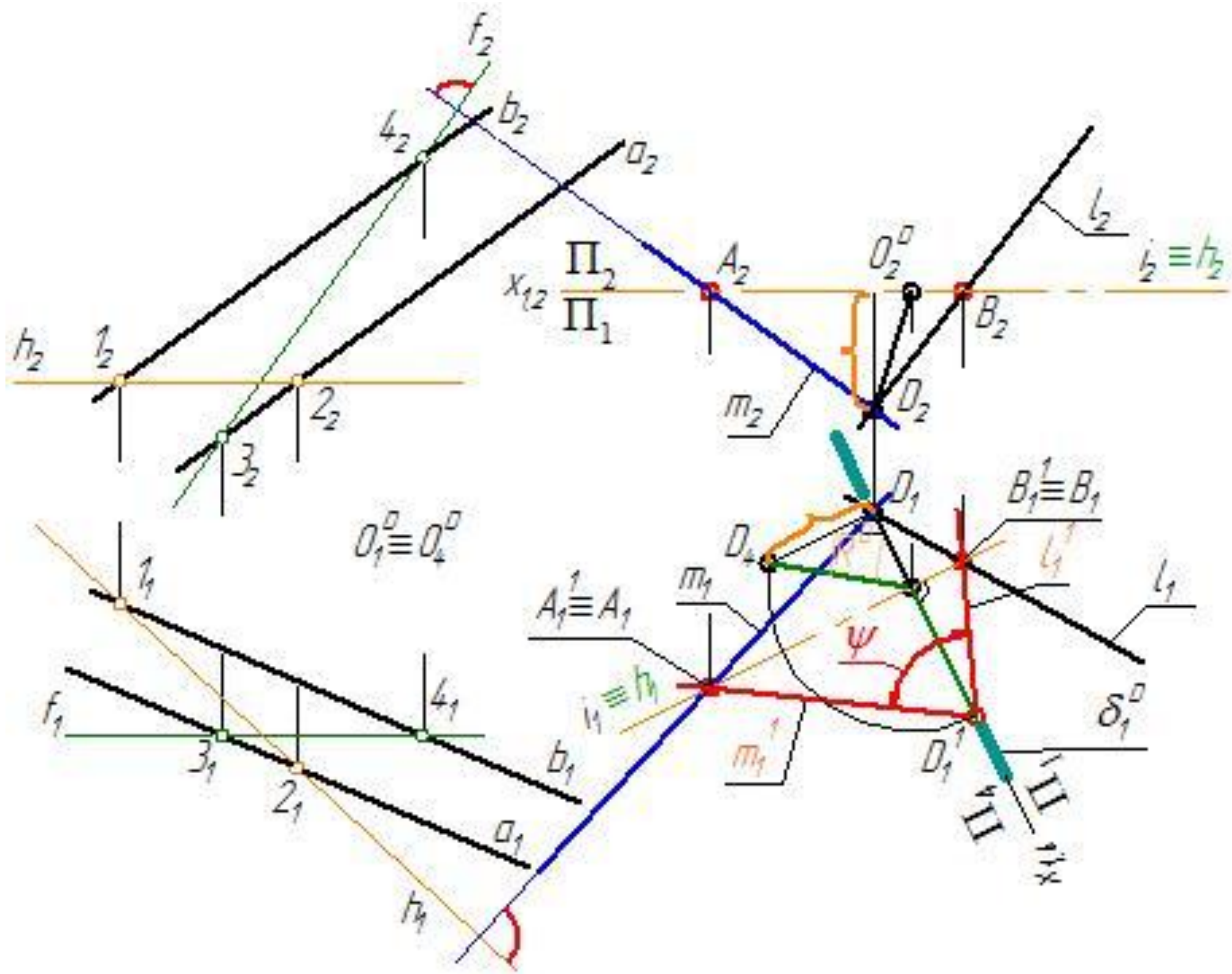
6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D*.**



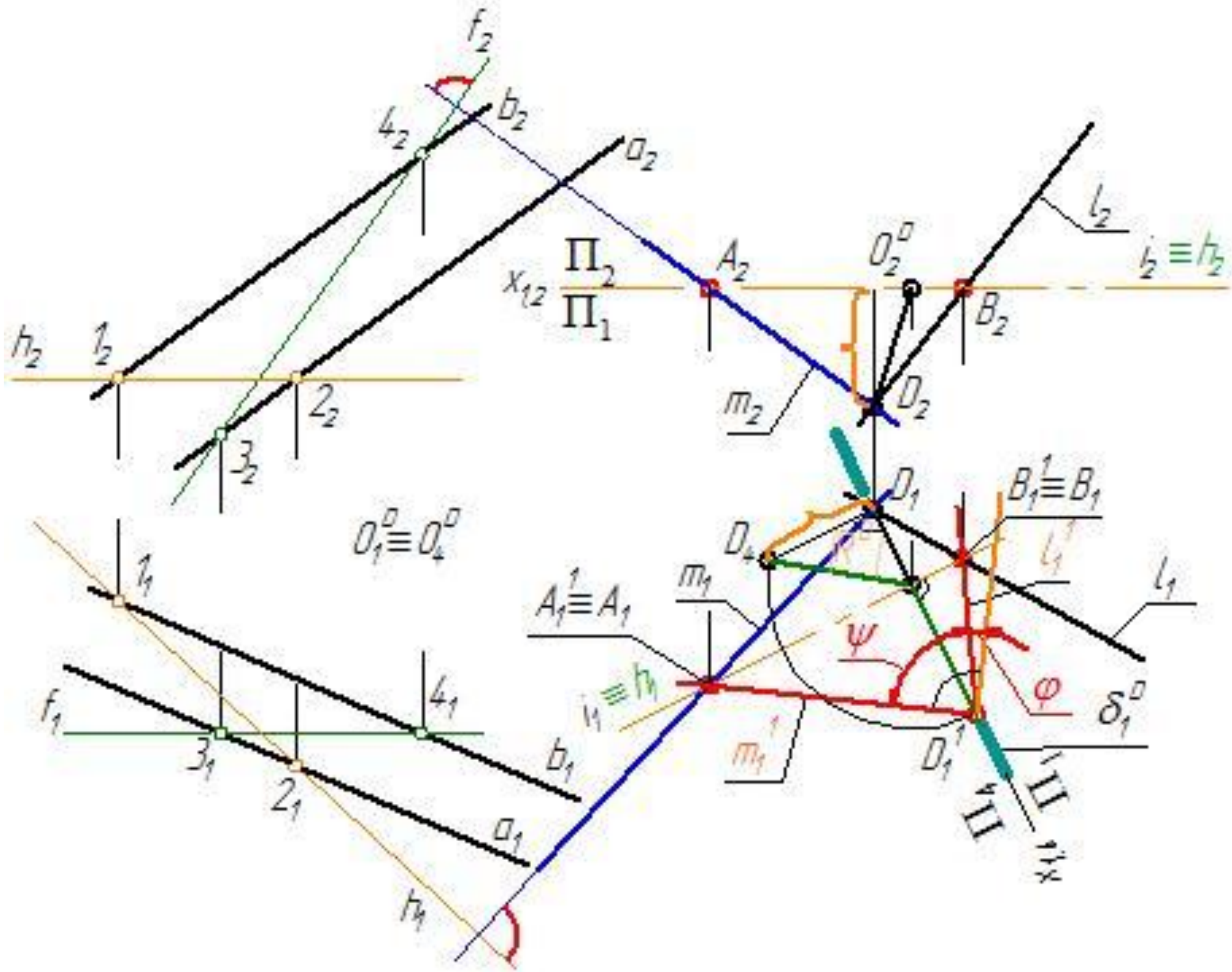
7. Выполняют поворот точки $\boldsymbol{D}$ до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.

8. Проводят новые проекции $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{l^1}$ прямых $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{l}$.

9. Отмечают угол $\boldsymbol{\psi}$, образованный прямыми $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{l^1}$.

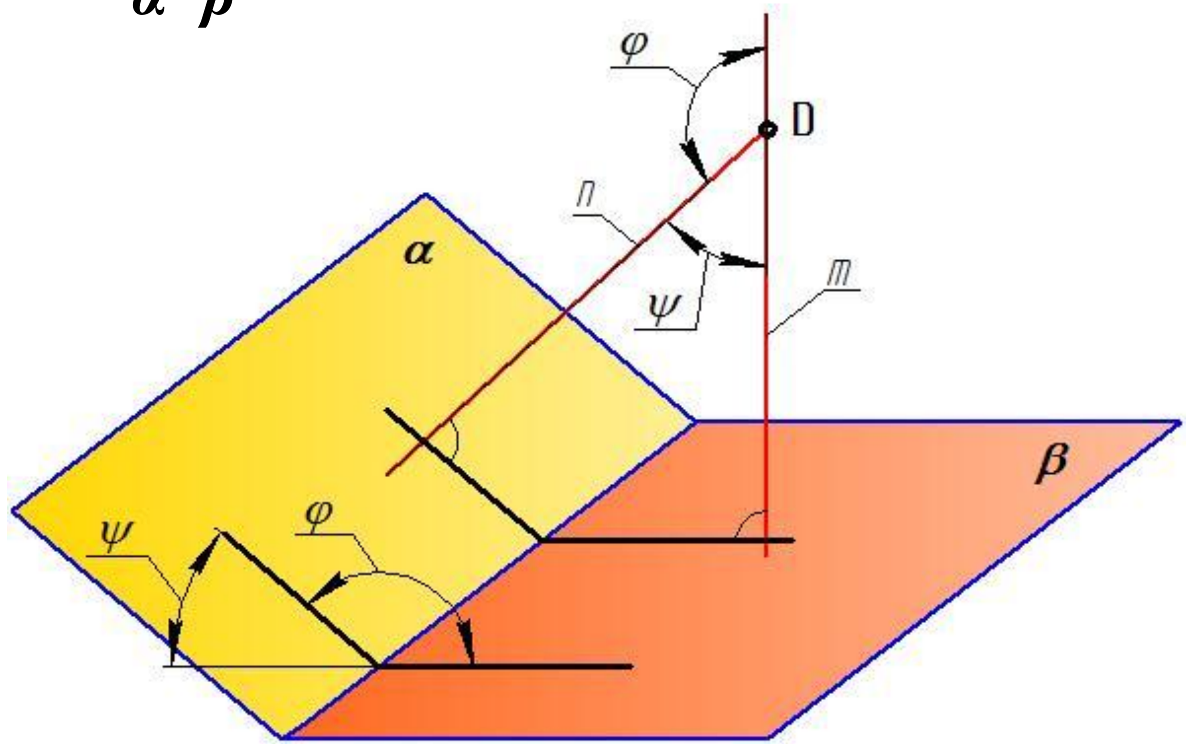


10. Достраивают угол $\boldsymbol{\psi}$ до прямого и отмечают угол $\boldsymbol{\varphi}$.



Угол между плоскостями

$\angle \varphi = \alpha \wedge \beta$



$\psi = 180° - \varphi$

D – произвольная точка

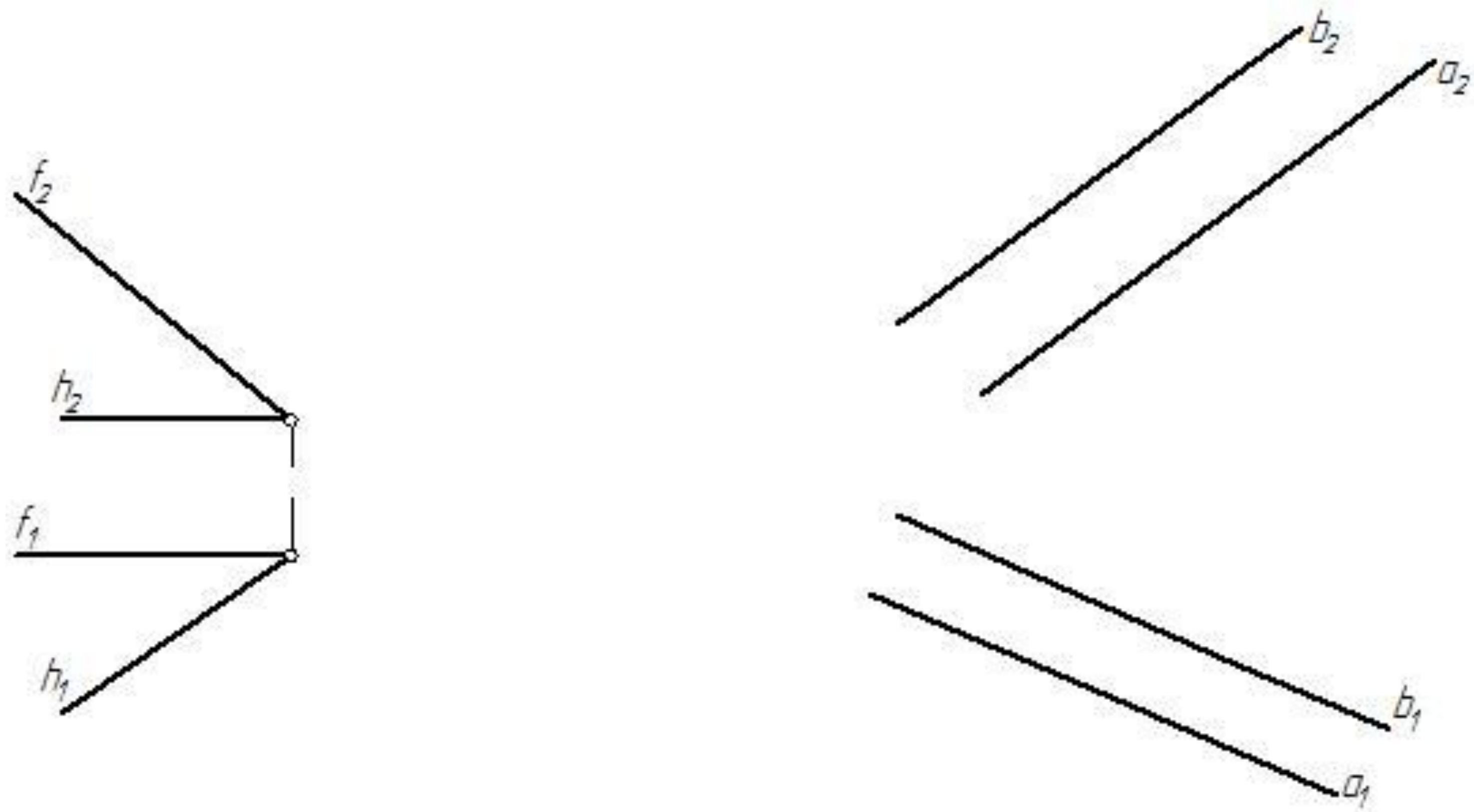
$n \perp \alpha$; $m \perp \beta$

$\angle \psi = m \wedge n$

$\varphi = 180° - \psi$

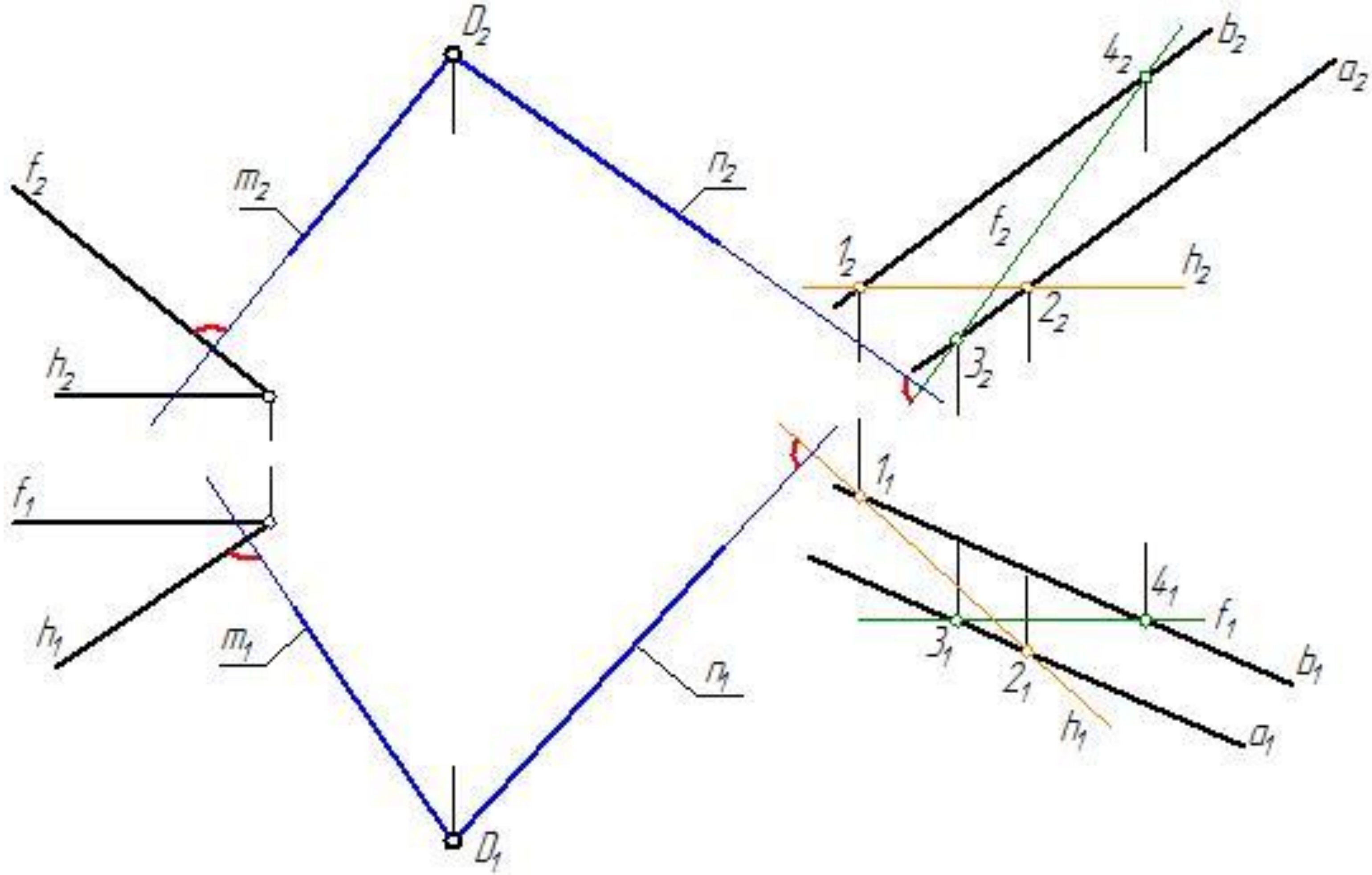
Угол между плоскостями
Исходные данные

Заданы плоскости $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f})$ и $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$



1. Вводится произвольная точка D.
2. Через точку D проводят перпендикуляры к каждой из заданных плоскостей. $m \perp \alpha \quad n \perp \beta$

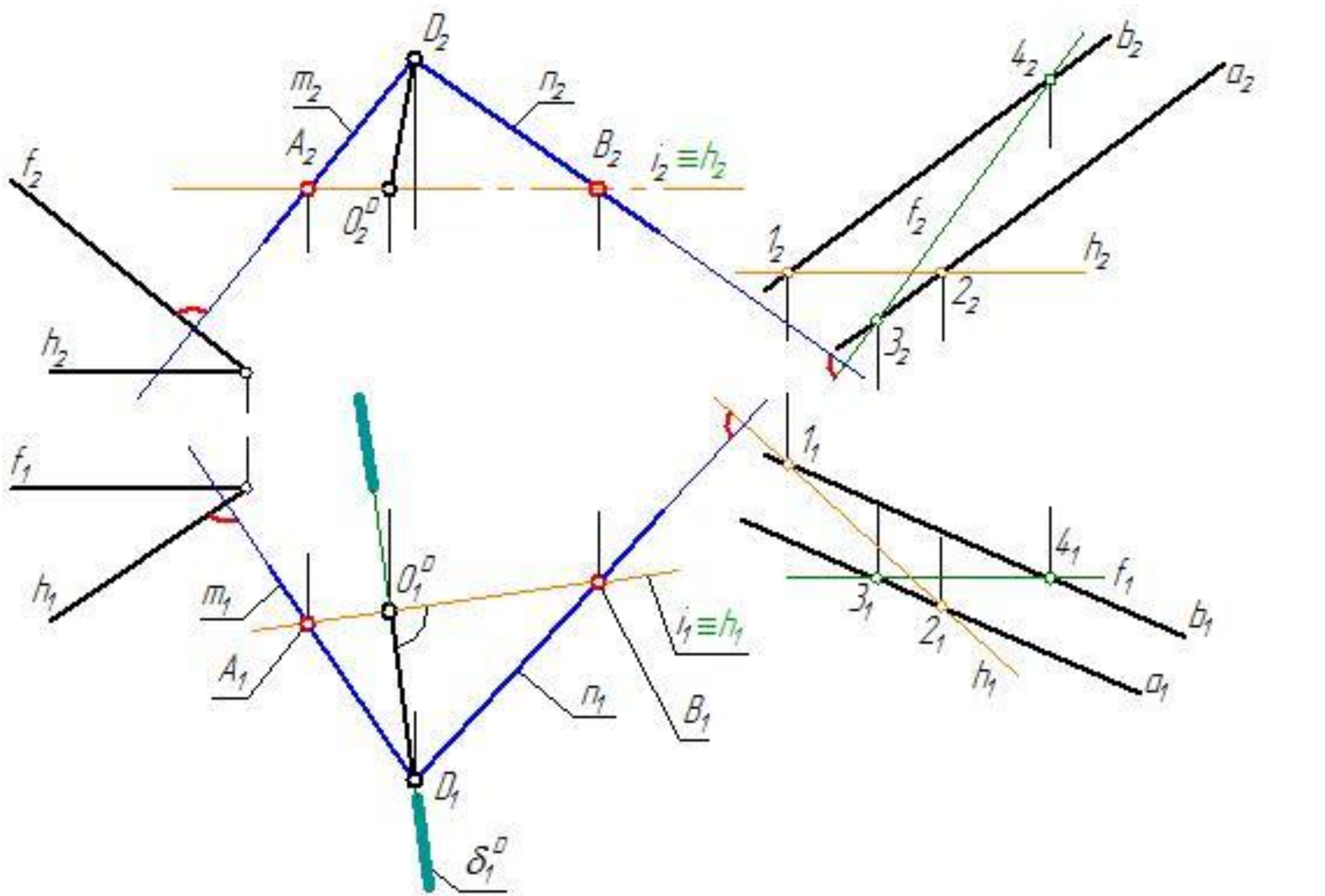
$(\, l_1 \perp h_1 \quad l_2 \perp f_2 \,)$



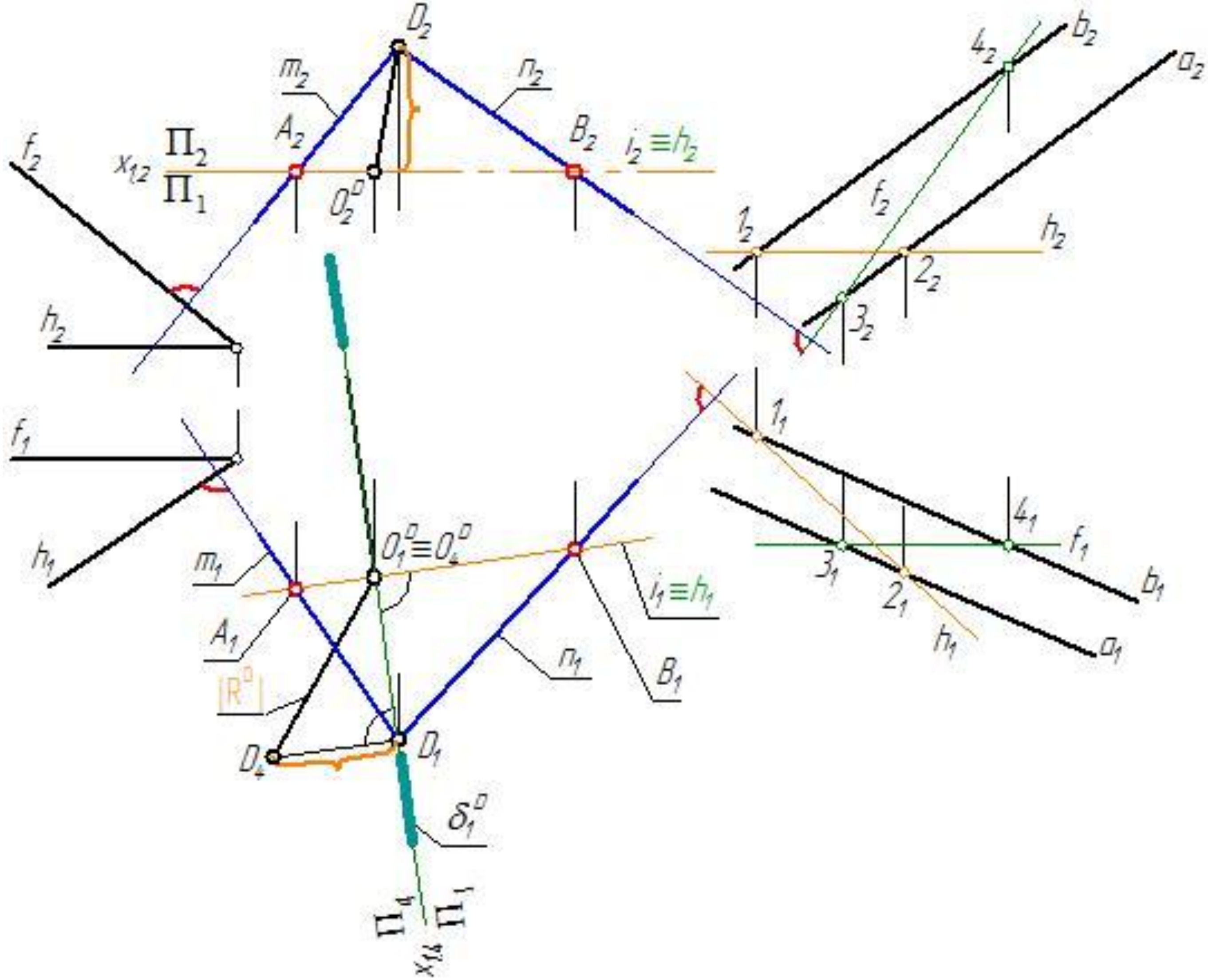
3. В плоскости, образованной прямыми $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$, проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{i}$).

4. Задают плоскость вращения $\boldsymbol{\delta}$ точки $\boldsymbol{D}$ вокруг оси $\boldsymbol{i}$. $\delta_1 \perp i_1$

5. Отмечают центр вращения точки $\boldsymbol{D}$ – точку $\boldsymbol{O}$.



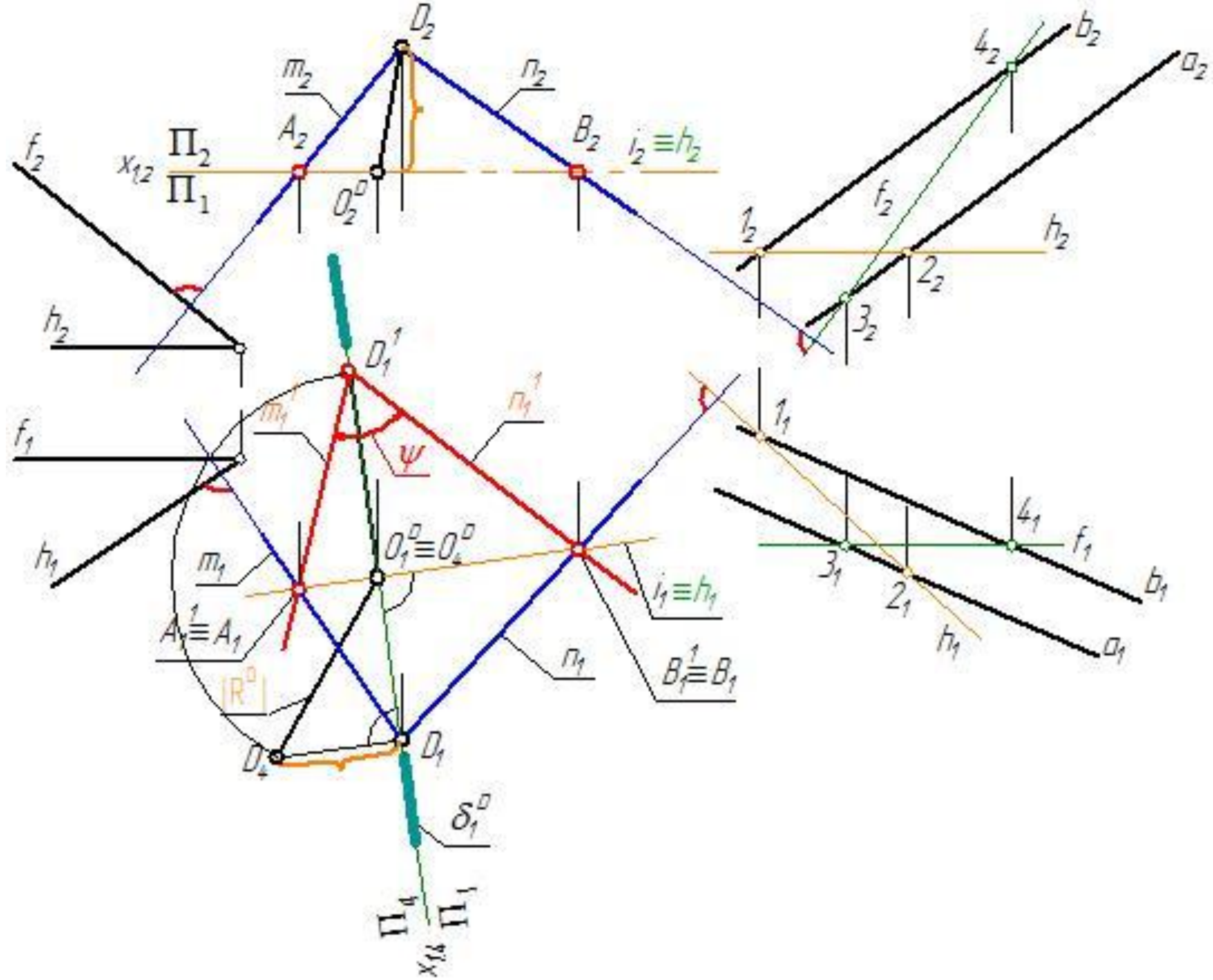
6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D***.



7. Выполняют поворот точки D до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.

8. Проводят новые проекции m^1 и n^1 прямых m и n.

9. Отмечают угол ψ, образованный прямыми m^1 и n^1.



10. Достраивают угол $\boldsymbol{\psi}$ до развернутого и отмечают угол $\boldsymbol{\varphi}$.