

Функцияны туынды арқылы зерттеу

Орындаған: Оразханова Ж. МИ-21

Тексерген: Найманов Б.

МАҚСАТЫ: функцияны туынды
көмегімен зерттеу алгоритімін
қолдану арқылы мысалдар
қарастырып, есептер шығарып,
толық мәліметтерді жеткізу.

Функция

* x - сандық айнымалы, X - оның өзгеру облысы болсын. Егер әрбір x санына қандай да бір y саны сәйкесінше қойылса, онда X жиынында функция анықталады деп айтады да, $y = f(x)$ деп жазады. X жиынын – $f(x)$ функциясының анықталу облысы, x – тәуелсіз айнымалы (немесе функция аргументі), ал x айнымалысының мәніне сәйкес келетін y саны – функциядағы x нүктесіндегі дербес мәні деп аталады. Функцияның Y сәйкестігінің барлық дербес мәндер жиыны- $f(x)$ функциясының мәндер жиыны деп аталады.

Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ табылып, $\forall x$ үшін $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ шарттарын қанағаттандыратын $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі ($x \rightarrow a$ ұмтылғанда) шегі деп аталады

Егер $\forall \varepsilon > 0$ үшін оған тәуелді $\delta > 0$ саны табылып, $x \in X$ $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) теңсіздігін қанағаттандыратын $\forall x$ үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны a нүктесіндегі $f(x)$ функциясының оң (сол) жақты шегі деп аталады.

Функциялардың локальдік (төңіректік) экстремумдері

Егер $f: E \rightarrow R$ функциясы $x_0 \in E$ нүктесінде үзіліссіз және $f'(x_0) = 0$ немесе

$f'(x_0)$ туындысы жоқ болса, онда x_0 нүктесін $f: E \rightarrow R$ функциясының критикалық немесе күдікті нүктесі деп атайды.

Бұдан егер x_0 нүктесі f функциясының экстремум нүктесі болса (Ферма теоремасы бойынша бұл нүктеде $f'(x_0) = 0$, немесе $f'(x_0)$ туындысы жоқ), онда x_0 күдікті нүкте болатынын көреміз.

1-теорема (экстремумның жеткілікті шарты). $y = f(x)$ функциясы

$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ кесіндісінде үзіліссіз және $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ аралықтарында дифференциалданатын болсын.

Егер $(x_0 - \delta, x_0)$ және $(x_0, x_0 + \delta)$ аралықтарында $f'(x)$ туындысының

таңбалары қарама-қарсы болса, онда x_0 - экстремум нүктесі. Атап айтқанда,

а) егер $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) > 0$, ал $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) < 0$ болса, онда x_0 -

локальді қатаң максимум нүктесі;

б) егер $x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) < 0$, ал $x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) > 0$ болса, онда x_0 - локальді қатаң минимум нүктесі;

в) $(x_0 - \delta, x_0)$ және $(x_0, x_0 + \delta)$ аралықтарында $f'(x)$ таңбасы бірдей болса, онда x_0 нүктесінде локальді экстремум жоқ.

• $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциясының экстремум нүктелерін табу керек.

$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$ теңдігінен $x_0 = 0$ күдікті нүкте екенін көреміз. Функция $x_0 = 0$

нүктелерінде үзіліссіз.

Мұнда $x < 0$ болса $y' > 0$, ал $x > 0$ болса $y' < 0$, яғни $x_0 = 0$ нүктесі арқылы өткенде функция туындысының таңбасы «+»-тен «-»-ке өзгереді. Демек, 1-теорема бойынша $x_0 = 0$ - функциясының локальдік қатаң максимум нүктесі.

Функциялардың кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

$[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз f функциясының ең үлкен (ең кіші) мәнін табу керек болсын. Ондай мән $[a, b]$ кесіндісінің белгілі бір x_0 нүктесінде болатыны белгілі.

Ендеше, тек келесі үш жағдай болуы мүмкін:

1) $x_0 = a$; 2) $x_0 = b$; 3) $x_0 \in (a, b)$.

Егер $x_0 \in (a, b)$ болса, онда x_0 локальдік экстремум нүктесі екені түсінікті.

Егер күдікті нүктелер $x_1, x_2, \dots, x_m$ арқылы жиын құраса, онда

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}$$

$$(\min_{x \in [a, b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}).$$

Функцияның дөңестігі. Иілу нүктелері.

$f(x)$ функциясы I аралығында анықталған болсын, яғни $f: I \rightarrow R$.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы графигінің кез келген

$A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2))$ екі нүктесінің арасындағы доға оны керетін хордадан жоғары (төмен) жатпаса, онда $f(x)$ функциясы I аралығында дөңестігі төмен (жоғары) бағытталған, немесе қысқаша ойыс (дөңес) функция деп аталады (суретте ойыс, суретте дөңес қисықтар көрсетілген).

Егер $f(x)$ ойыс функция болса, онда $f(x)$ дөңес болады. Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады:

$f(x)$ ойыс функциясы үшін айтылған тұжырымды дөңес функция жағдайына келтіру үшін, оны $f(x)$ функциясына қолдану жеткілікті. Сол себептен төмендегі теоремалар дәлелдеулерін тек ойыс функциялар жағдайы үшін ғана келтіреміз.

суреттен $A_1(x_1, f(x_1))$ және $A_2(x_2, f(x_2))$ нүктелерін қосатын хорда теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \text{ немесе}$$

$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

болатынын көреміз.

Енді жоғарыдағы ойыс функция анықтамасын келесі түрде беруге болады.

Анықтама. Егер кез келген $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ нүктелері үшін

$$f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \geq f(x), x_1 < x < x_2 \quad (2)$$

шарты орындалса, онда $f(x)$ функциясы I аралығында ойыс функция деп аталады.

Функцияны зерттеу және оның сұлбесін салу

- * Функцияны зерттеп, оның графигін салу жұмысын келесі ретпен жүргізуге болады.
- * 1) Функцияның анықталу аймағын анықтау. Оны жұп, тақ, периодтылыққа зерттеу. Графиктің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу;
- * 2) Функцияны үзіліссіздікке зерттеу.
- * 3) Функцияның асимптоталарын табу.
- * 4) Өсу, кему аралықтарын, экстремумдерді табу.
- * 5) Ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
- * 6) Табылған үзіліс нүктелерін, күдікті нүктелерді олардың арасындағы аралықтарды көрсетіп, кесте салу. Әрбір аралықта функцияның сипаты кескінделеді.
- * 7) Қажет болған жағдайда, график дәлірек болуы үшін, функцияның аралық мәндерін таба отырып, функция графигінің эскизін салу.

*

Қорытынды

- * **Функция аса маңызды математикалық ұғымдардың бірі және де ол заттар мен құбылыстардың өзара байланысын бейнелейді. Бүгінде функцияны анықтаудың әр түрлі жолдары белгілі. Солардың бірінде функция ұғымы бастапқы ұғым ретінде алынады.**
- * **Біз функция қарастыра отырып, функция деп бір X жиынын екінші Y жиынына бейнелеуді түсінеді. Бұл жайдайда $x \in X$ элементпен $y \in Y$ болатын, бір және тек бір ғана элемент жұп түзей алынатына ерекшеленеді. Сонда функцияны белгілеп көрсету үшін f, φ, ψ және т.с. с. символдар пайдаланады. Ал X жиыны функцияның анықталу облысы және Y жиынын функцияның мәндерінің облысы деп атайды.**

- * Анықталу облысы X және мәндерінің облысы Y болатын (x) функцияны символдар арқылы мына түрде $X \rightarrow Y$ немесе айнымалылардың көмегімен $x \in X \rightarrow y \in Y$ деп белгілейді, сонда функция мәнінің белгісі y -тің орнына символын жиі қолданады. Кейде X жиыны элементтерін функцияның аргументі деп атады да, y -ті аргумент x -тің немесе айнымалы x -тің функциясы дейді.
- * Функция ұғымы математика ғылымында өзіндік орны бар, күрделі әрі кең ауқымды тараулардың бірі. Ұлы математиктердің, ғалымдардың (Г.В.Лейбниц, И. Бернулли, Л.Эйлер т.б.) еңбектері жаңа бағыттағы зерттеулер үшін, тың бастамашыл тұжырымдарымен маңызды. Зерттеушілеріміздің тұжырымдарын жалғастыра зерделеу – уақытымыздың өзекті мәселесі. Әдістемелік көмекші құралда функцияның шегін есептеу, функцияның анықталу облысын, туындысын және интегралын табу қарастырылған. Бұларды табудағы негізгі қағидалар, ережелер, заңдылықтар қамтылған. Көрсетілген тақырыптарға қатысты көптеген есептердің шығарудың жолдары көрсетілген.