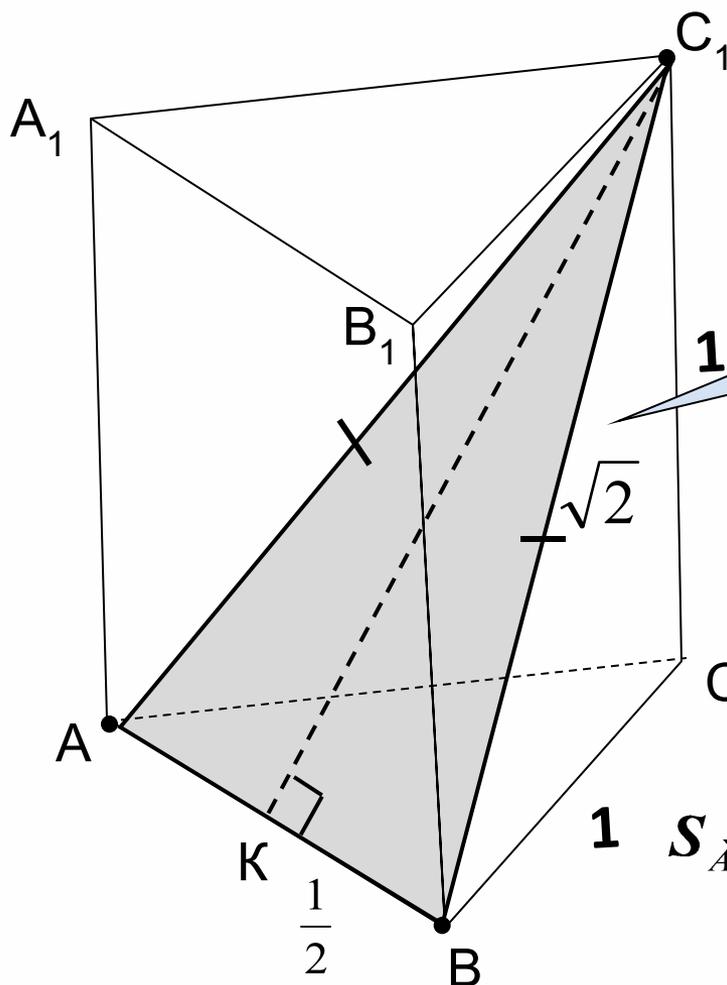


Задачи на нахождение площади сечения многогранника

Подготовка к решению задач ЕГЭ

Автор: Ингинен Ольга
Вячеславовна,
учитель математики,
МОУ «СОШ № 6» г. Луга

Найти площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , B и C_1 .



$AC = CB$; CC_1 - общая
 $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$ (по
 двум катетам)
 Значит $AC_1 = BC_1$
 ΔABC_1 -
 равнобедренный

сечения, проходящее

$\Delta \hat{A}\hat{E}\tilde{N}_1$:

$$\tilde{N}_1^2 = \hat{A}\tilde{N}_1^2 - \hat{A}\hat{E}^2;$$

$$1^2 = \tilde{N}_1^2 + \tilde{N}_1^2;$$

$$B\tilde{N}_1^2 = 1^2 + 1^2;$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$B\tilde{N}_1^2 = 2;$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1^2 = 1\frac{3}{4};$$

$$B\tilde{N}_1 = \sqrt{2}.$$

$$\hat{E}\tilde{N}_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

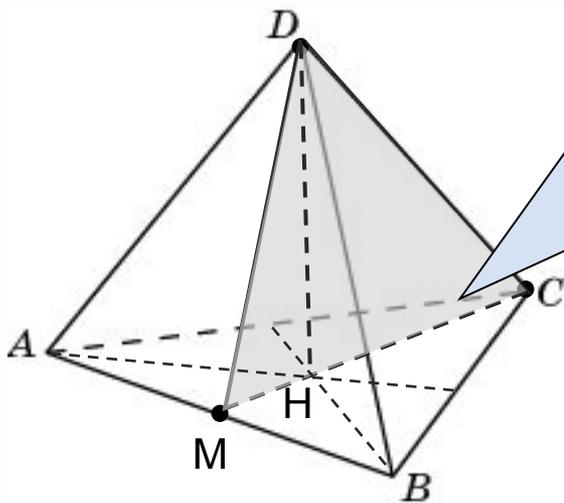
$$S_{\hat{A}\hat{A}\tilde{N}_1} = \frac{1}{2} \hat{A}\hat{A} \cdot \hat{E}\tilde{N}_1$$

$$S_{\hat{A}\hat{A}\tilde{N}_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

ABCD – правильная тетраэдр
 ребра равны 1. Найти площадь
 сечения, проходящей через точку
 АВ.

Построим плоскость



H – точка пересечения медиан.
 Применим свойство медиан:
 медианы треугольника
 пересекаются в отношении 2 к 1,
 считая от вершины $CH : HM = 2 : 1$.
 Вся медиана CM – это 3 части.

$$CH = \frac{2}{3} CM \text{ (2 части)}$$

$$HM = \frac{1}{3} CM \text{ (1 часть)}$$

$$DH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2;$$

$$DH^2 = \frac{2}{3};$$

$$DH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{DMN} = \frac{1}{2} MN \cdot DH$$

$$S_{DMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

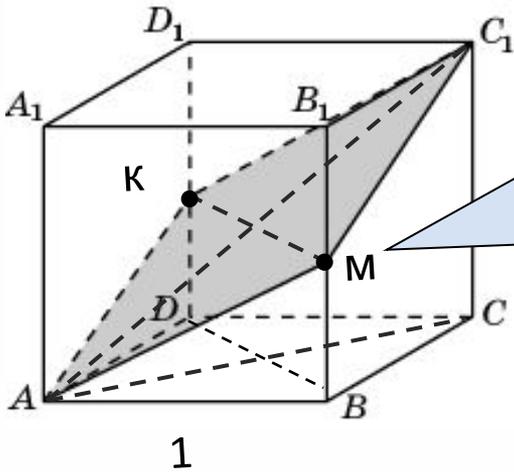
Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

орой
 ны
 С и М.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BB_1 и DD_1 .

Построим плоскость сечения



AKC_1M – параллелограмм

К и М.

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (ACC_1) \Rightarrow BD \perp AC_1$$

$$KM \parallel BD \Rightarrow KM \perp AC_1$$

Следовательно AN_1I – высота

EI

$$AN_1^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2;$$

$$AN_1^2 = 5;$$

$$AN_1 = \sqrt{5}.$$

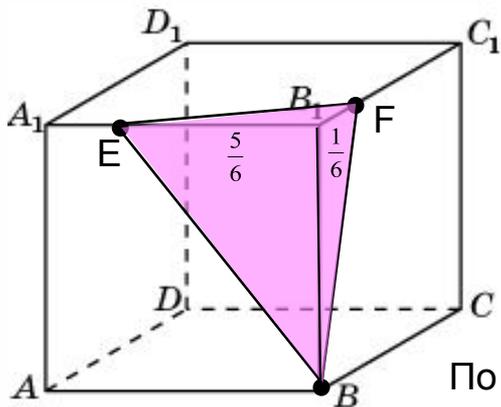
$$S_{AN_1I} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки E и F на ребрах $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно, если $B_1 E = 5 A_1 E$ и $C_1 F = 5 B_1 F$.

Построим плоскость сечения, проходящую через вершины B , E и F .

$\triangle BEF$ - произвольный



$$\text{в } \triangle B_1 E F : EF^2 = EB_1^2 + B_1 F^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{26}{36} \quad EF = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\text{в } \triangle B A_1 F : BF^2 = BB_1^2 + B_1 F^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{37}{36} \quad BF = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$\text{в } \triangle B A_1 E : BE^2 = BB_1^2 + B_1 E^2 = 1^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{61}{36} \quad BE = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

По теореме косинусов: $BE^2 = BF^2 + EF^2 - 2BF \cdot FE \cdot \cos BFE$

$$\cos BFE = \frac{BF^2 + EF^2 - BE^2}{2BF \cdot EF} = \frac{1}{\sqrt{962}}$$

$$\sin BFE = \sqrt{1 - \cos^2 BFE} = \sqrt{1 - \frac{1}{962}} = \frac{31}{\sqrt{962}}$$

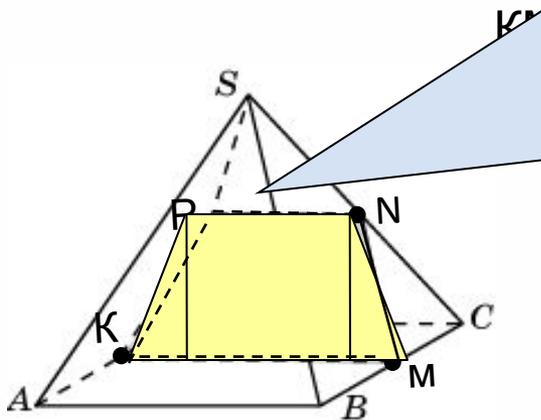
$$S_{BEF} = \frac{1}{2} BF \cdot EF \cdot \sin BFE$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{6} \cdot \frac{\sqrt{26}}{6} \cdot \frac{31}{\sqrt{962}} = \frac{31}{72}$$

Ответ. $\frac{31}{72}$

Найти площадь сечения пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер AD , BC и SC .

Построим плоскость сечения



$$KM \parallel CD \Rightarrow KM \parallel (SCD) \Rightarrow KM \parallel PN$$

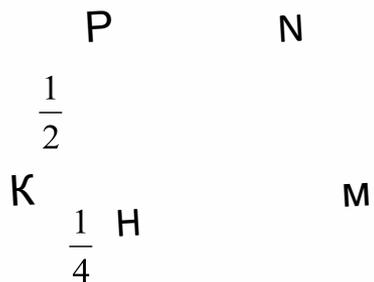
$$\left. \begin{array}{l} PN \parallel CD \\ CN = NS \end{array} \right\} \Rightarrow PN - \text{середина гипотенузы } \Delta SCD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DP = PS$$

$$\Delta KDP = \Delta MCN \text{ (и } \angle KDP = \angle MCN \text{ и } \angle DKP = \angle CMN \text{)} \Rightarrow KP = MN$$

$$\Rightarrow KP = MN$$

$KPSM$ – равнобедренная трапеция



$$DI^2 = \frac{3}{16};$$

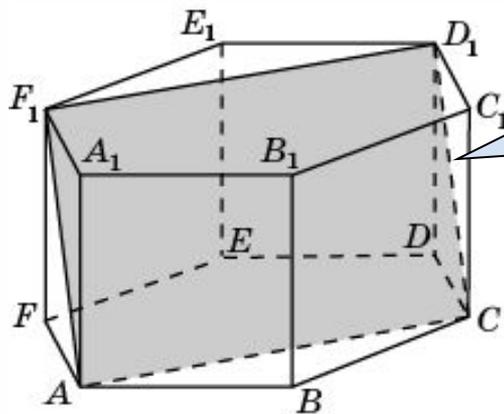
$$S_{KPNM} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$DI = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Найти площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , C и D_1 .

Построим плоскость сечения, проходящую через точки A , C и D_1 .



$\triangle ACD_1$ – равнобедренный

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp AF \\ AC \perp AA_1 \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (AA_1 F) \Rightarrow AC \perp AF$$

Следовательно $\triangle ACD_1$ – равнобедренный

$$AD_1 = 1, \quad AC = 1,$$

$$AD_1^2 = 2;$$

$$AD_1 = \sqrt{2}.$$

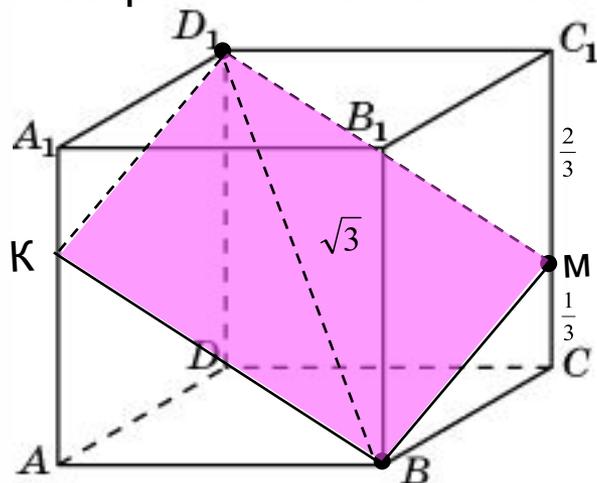
$$S_{\triangle ACD_1} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD_1$$

$$S_{\triangle ACD_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 и D и точку M на ребре CC_1 , если $C_1 M = 2CM$.

Построим плоскость сечения, проходящее через вершины B , D_1 и M .



Сечением является параллелограмм BMD_1K .

$$\text{В } \triangle BMC : \hat{A}I^2 = B\hat{N}^2 + MC^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} \quad BM = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{В } \triangle MC_1D_1 : \hat{D}I^2 = C_1D_1^2 + M\hat{N}_1^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9} \quad MD_1 = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

По теореме косинусов: $BD_1^2 = BM^2 + MD_1^2 - 2BM \cdot MD_1 \cdot \cos BMD_1$

$$\cos BMD_1 = -\frac{2}{\sqrt{130}}$$

$$\sin BMD_1 = \sqrt{1 - \cos^2 BMD_1} = \sqrt{1 - \frac{4}{130}} = \sqrt{\frac{63}{65}}$$

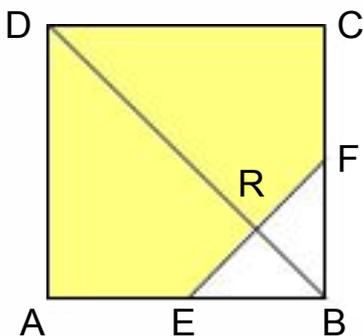
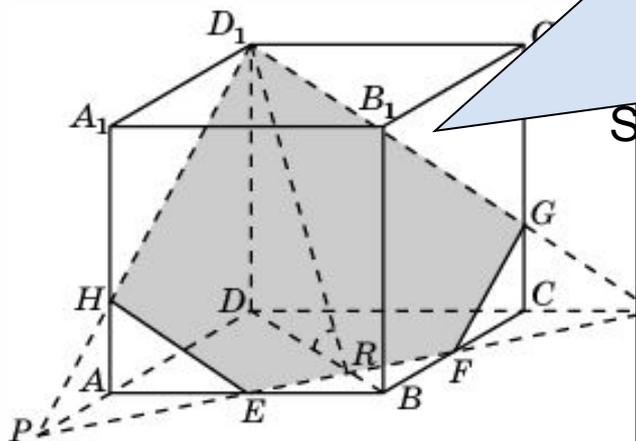
$$S_{BMD_1K} = BM \cdot MD_1 \cdot \sin BMD_1$$

$$S_{BMD_1K} = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{\frac{63}{65}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB , BC .

Построим плоскость сечения.
Сечением является пятиугольник $EFGD_1H$.



Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника:

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и

плоскостью проекции.

$S_{пр} = S \cdot \cos \alpha$

$$RD_1 = \left(\frac{4}{1} \right)^{1/2},$$

$$RD_1^2 = \frac{34}{16};$$

$$RD_1 = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

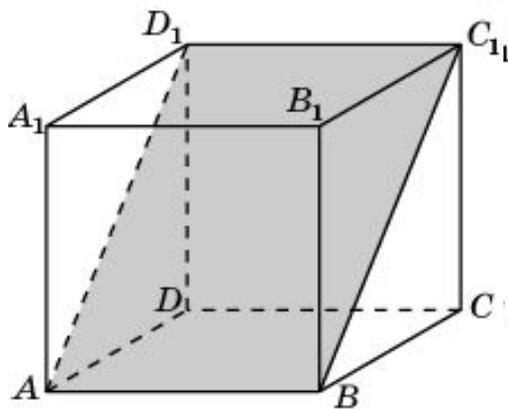
По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника

$$S_{EFGD_1H} = \frac{S_{ADCFE}}{\cos \angle DRD_1} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$

Ответ. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

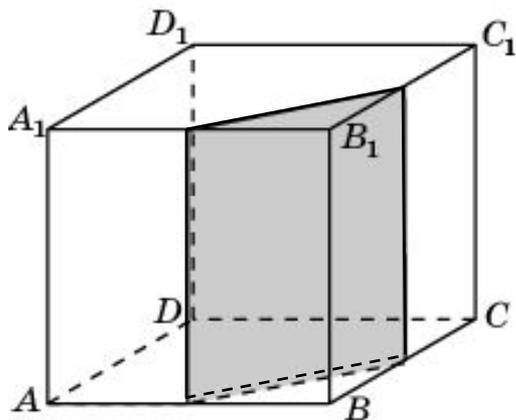
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершины A, B, C_1 .



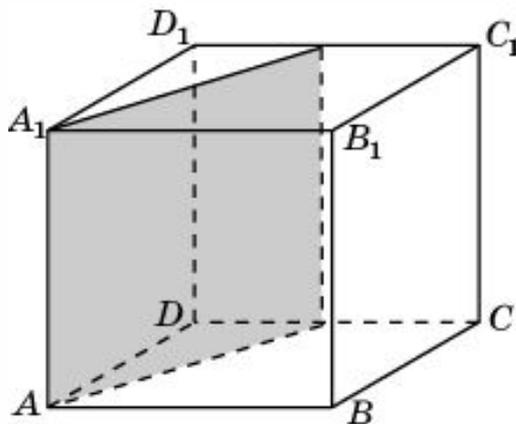
Ответ. $\sqrt{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через середины ребер AB , BC , $A_1 B_1$.



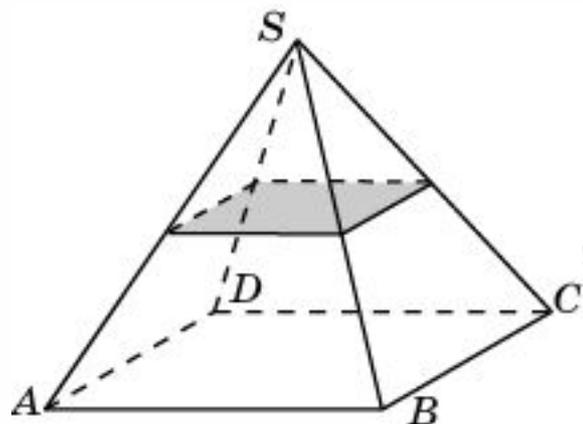
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер CD , C_1D_1 .



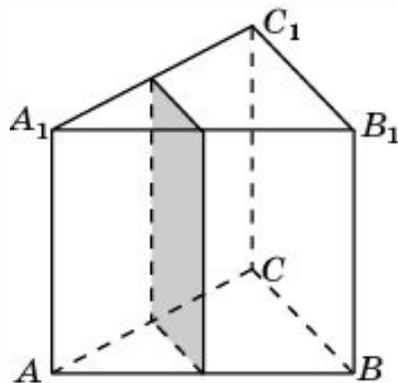
Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер SA , SB и SC .



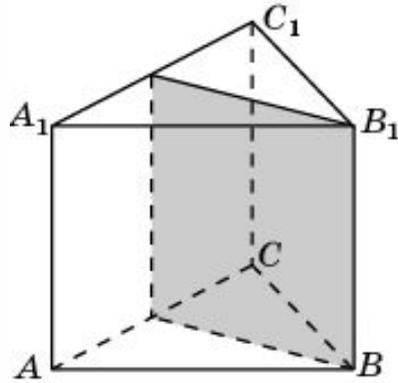
Ответ. 0,25.

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер AA_1 , BB_1 , CC_1 .



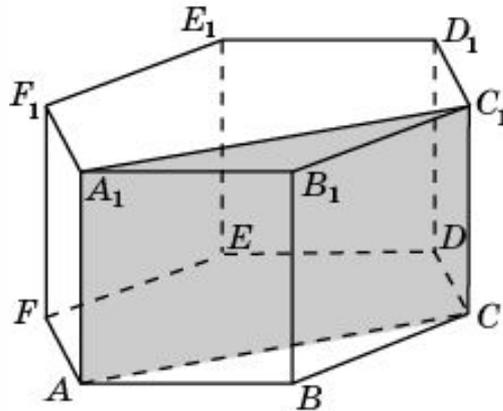
Ответ. 0,5.

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины B , B_1 и середину ребра AC .



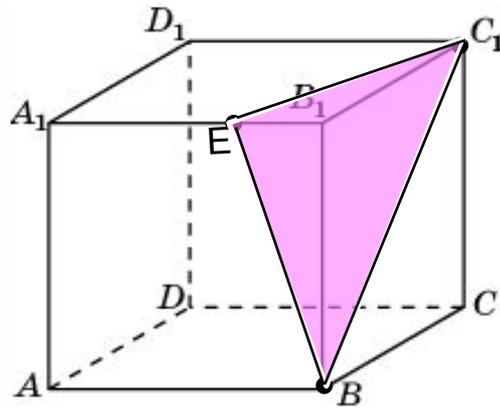
Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , C и C_1 .



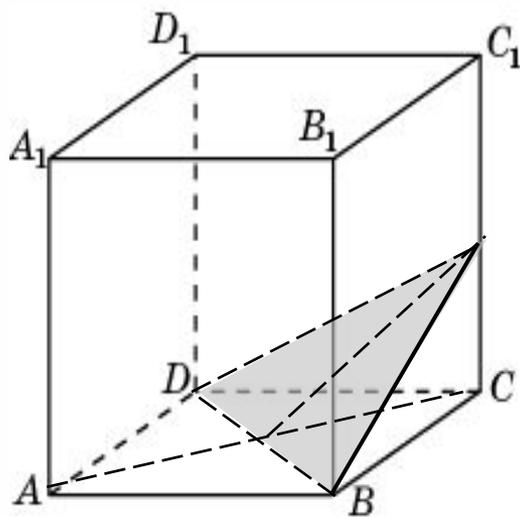
Ответ. $\sqrt{3}$

1. Найти площадь сечения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 плоскостью, проходящей через вершины C_1 и B и точку E на ребре $A_1 B_1$, если $B_1 E = 0,4 A_1 E$.



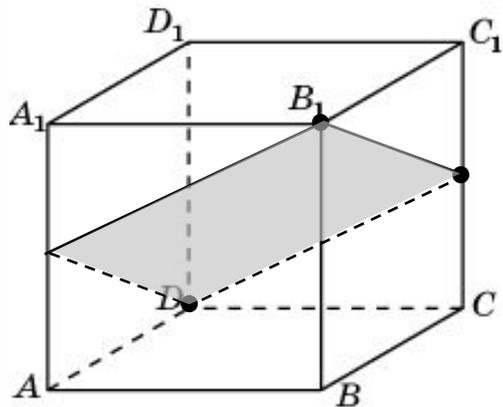
Ответ. $\frac{6\sqrt{11}}{7}$

В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 4 см. Через диагональ основания под углом 45° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найти площадь сечения.



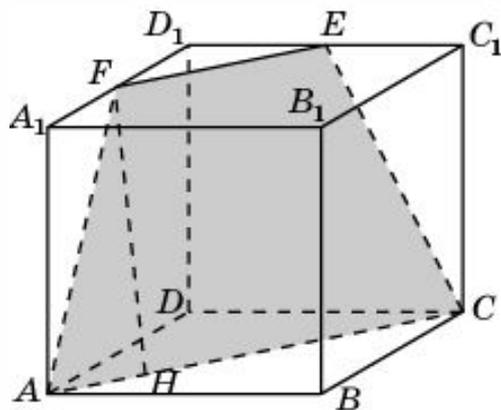
Ответ. $8\sqrt{2}$

Найти площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 и D и середину ребра CC_1 .



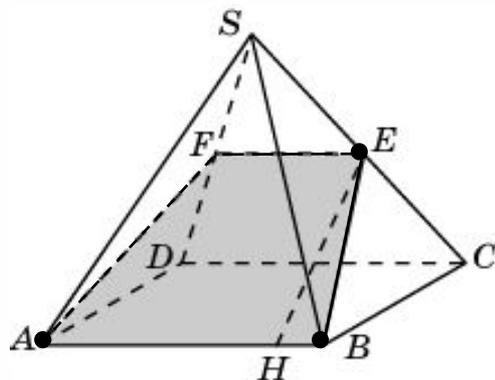
Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершины A , C и середину ребра $C_1 D_1$.



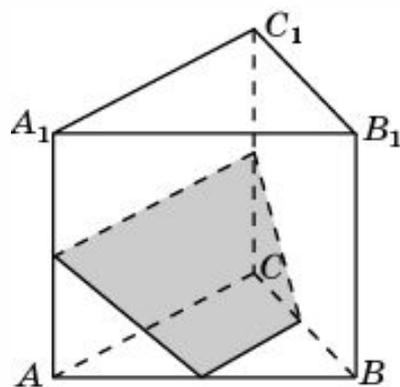
Ответ: $1\frac{1}{8}$

Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , B и середину ребра SC .



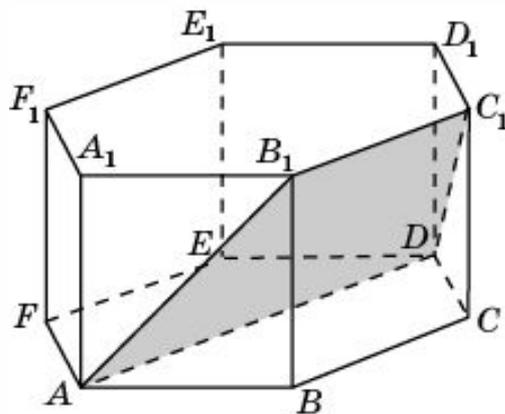
Ответ: $\frac{3\sqrt{11}}{16}$

Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через середины ребер AB , BC и CC_1 .



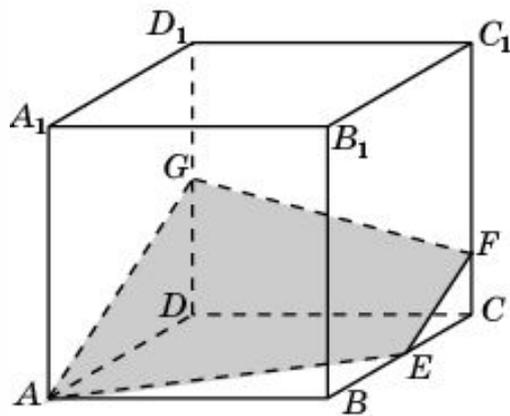
Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{16}$

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , D и C_1 .



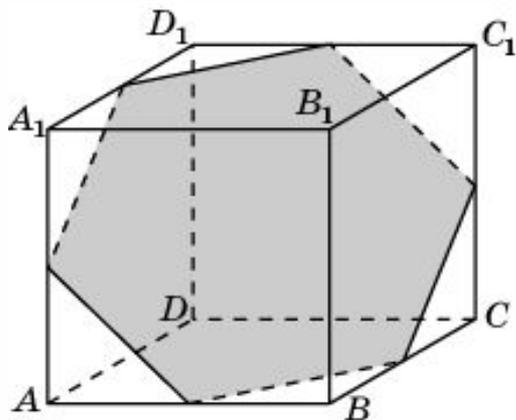
Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BC , DD_1 .



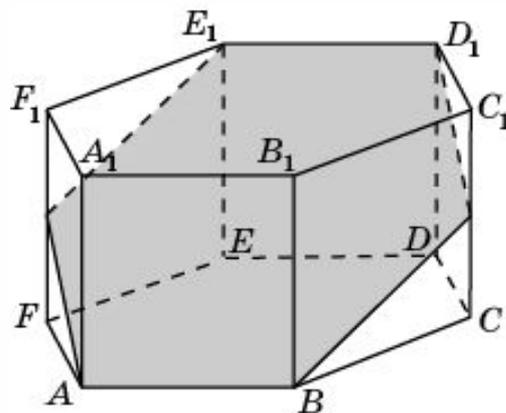
Ответ: $\frac{3\sqrt{21}}{16}$

Найдите площадь сечения единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AB , BC , CC_1 .



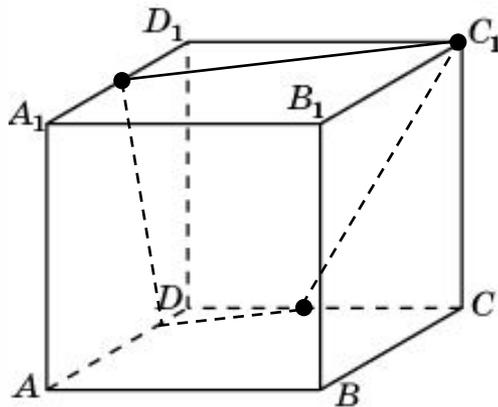
Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, проходящее через вершины A , B и D_1 .



Ответ: 3

Найти площадь сечения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины ребер $A_1 D_1$ и CD .



Ответ. $\frac{3\sqrt{21}}{4}$