

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Упражнение

Соедините левую и правую части формул так, чтобы получились верные формулы преобразования тригонометрических функций.

$$\sin(s+t) + \sin(s-t) = 2 \sin s \cdot \cos t$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t$$

$$\sin(s-t) = \sin s \cdot \cos t - \cos s \cdot \sin t$$

+

$$= 2 \sin s \cdot \cos t$$

$$\sin(s+t) + \sin(s-t) \quad 2$$

$$\Rightarrow \sin s \cdot \cos t = \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2}$$

$$\cos(s + t) + \cos(s - t) = 2 \cos s \cdot \cos t$$

$$\cos(s + t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cdot \cos t + \sin s \cdot \sin t$$

+

$$= 2 \cos s \cdot \cos t$$

$$\cos(s + t) + \cos(s - t) \quad 2 \quad \Rightarrow \cos s \cdot \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}$$

$$\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2 \sin s \cdot \sin t$$

$$\cos(s+t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

$$\cos(s-t) = \cos s \cdot \cos t + \sin s \cdot \sin t$$

—

$$= -2 \sin s \cdot \sin t$$

$$\cos(s+t) - \cos(s-t) \quad 2$$

$$\Rightarrow \sin s \cdot \sin t = \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2}$$

Пример:

● Вычислить, преобразовывая произведение в сумму: $\cos 14^\circ \cdot \cos 16^\circ$.

Решение:

$$\cos s \cdot \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}$$
$$\cos 14^\circ \cdot \cos 16^\circ = \frac{\cos(14^\circ + 16^\circ) + \cos(14^\circ - 16^\circ)}{2} = \frac{\cos 30^\circ + \cos(-2^\circ)}{2}$$

$$\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos(-2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\cos 2^\circ}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\cos 2^\circ}{2}$.

Пример:

● Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\sin s \cdot \cos t &= \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2} \\ &= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{12} + x - \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12} - x + \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \\ &= \frac{\sin 2x + \sin \frac{\pi}{6}}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Пример:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Найти значение выражения $\cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$, если $\cos x = \frac{2}{3}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\cos s \cdot \cos t &= \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2} \\ \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} &= \frac{\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{\cos 2x + \cos x}{2} = \frac{2\cos^2 x - 1 + \cos x}{2} \\ &= \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{9} - 1 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{18}$.

**Формулы, связывающие
тригонометрические функции одного и
того же аргумента:**

$$\bullet \quad \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg } x \cdot \text{ctg } x = 1$$

$$1 + \text{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

**Формулы, связывающие функции
аргументов, из которых один вдвое
больше другого:**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Формулы сложения аргументов:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sin s \cdot \cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}$$

$$\cos s \cdot \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}$$

$$\sin s \cdot \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}$$

Формулы приведения:

$$\cos(s+t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

$$+ \cos s \cdot \cos t + \sin s \cdot \sin t$$

$$= 2 \cos s \cdot \cos t$$

$$\Rightarrow \cos s \cdot \cos t$$

$$\cos(s+t) + \cos(s-t)$$

$$\frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2 \cos t}$$

$$\cos(s+t) - \cos(s-t)$$

$$= -2 \sin s \cdot \sin t$$

$$\cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

$$= -2 \sin s \cdot \sin t$$

$$= -2 \sin s \cdot \sin t$$

$$\Rightarrow \sin s \cdot \sin t$$