# Линейная алгебра

- Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
- Ранг матрицы
- Исследование систем линейных уравнений
- Однородные системы линейных уравнений

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим задачу решения системы линейных уравнений размерностью *(m x n)*. Запишем систему в матричном виде: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ . & . & . & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Если закрепить раз и навсегда нумерацию неизвестных, то можно опустить неизвестные в записи системы и записать ее в виде матрицы, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

$$\tilde{B} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & .... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

*Расширенная матрица системы*

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Следующие действия над расширенной матрицей системы называются ***элементарными преобразованиями***.

- Умножение или деление элементов строк на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух строк
- Прибавление к элементам строки элементов другой строки, умноженных на произвольный множитель.

Конечной целью элементарных преобразований является получение верхнетреугольной матрицы, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю. Преобразования стараются производить так, чтобы на главной диагонали появлялись единицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array}\right)$$

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

Ко второй строке прибавим третью строку, умноженную на (-5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + \mathrm{II} \times (-2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \times (-3) \\ \sim \end{array}$$

К первой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II} + \mathrm{III} \times (-5) \\ \sim \end{array}$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на (-2), К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-3).

Из третьей строки вычтем вторую строку

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{III}+\mathrm{II}\times 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II}\times(-1) \\ \mathrm{III}:5 \\ \sim \end{array}$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Вторую строку умножим на (-1), третью строку разделим на 5

*Восстановим систему:*

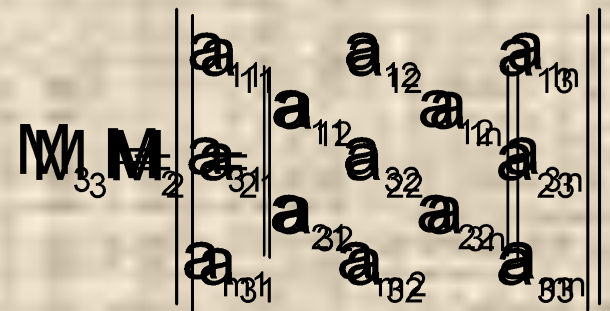
$$\begin{cases} x-8y+6z=-9 \\ y-2z=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9+8y-6z \\ y=2z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9+16-6=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=1 \quad y=2 \quad z=1}$$

# Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью *(m x n).*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Выделим в этой матрице произвольное число *k* строк и *k* столбцов. Элементы матрицы *A*, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель *k* - того порядка.

***Минором*** *k*-того порядка матрицы *A* называют определитель, полученный из *A* выделением произвольных *k* строк и *k* столбцов.

# Ранг матрицы

***Рангом*** матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

*Матрица A имеет 4 минора 3 - его порядка, например:*

*18 миноров 2 - го порядка, например:* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$

*12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.*

*Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому:* $r(A) = 3$

# Ранг матрицы

Определитель, порядок которого равен рангу матрицы, называется ***базисным минором.*** Он может быть не единственным.

Можно показать, что эквивалентные преобразования не меняют ранга матрицы. Поэтому, когда требуется вычислить ранг матрицы, ее приводят к треугольному виду.

***Ранг*** матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}\times(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$r(A) = 2$$

# Исследование систем линейных уравнений

**Теорема Кронекера - Капелли.**

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была ***совместна*** (имела решение ), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов: $r(\tilde{B}) = r(A)$

Если $r(\tilde{B}) = r(A) = n$ (числу неизвестных), то система ***совместна и определенна*** (имеет единственное решение).

Если $r(\tilde{B}) = r(A) < n$ ,то система ***совместна и неопределенна*** (имеет бесконечное множество решений).

Если $r(\tilde{B}) \neq r(A)$ ,то система ***несовместна*** (не имеет решений).

При решении систем линейных алгебраических уравнений нет необходимости заранее вычислять ранги основной и расширенной матриц. Их определение производится автоматически при выполнении метода исключения Гаусса.

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{I}:2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\times(-3) \\ \mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II}:(-2) \\ \mathrm{III}:(-4) \\ \mathrm{IV}:4 \\ \sim \end{array}$$

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\tilde{B}) = r(A) = 2 \Rightarrow$ *система совместна*

$n = 3$ *- число неизвестных*

$r(\tilde{B}) < n \Rightarrow$ *система неопределенна*

$n - r = 3 - 2 = 1$ *- число свободных переменных*

*Пусть* $x_2 = t.$ *Восстановим систему:*

$$\begin{cases} x_1 + t + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t - x_3 = 1 - t \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$r(\tilde{B}) = 3$$

$$r(A) = 2$$

$r(\tilde{B}) \neq r(A) \Longrightarrow$ *система несовместна*

# Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены ее равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда имеет решение:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \ldots \quad x_n = 0$$

Это решение называется ***тривиальным***. Оно является единственным решением системы в случае, когда $r(A) = n$

Если $r(A) < n$ , то система имеет бесконечное множество решений.

# Однородные системы линейных уравнений

Пусть: $r(A) = r < n$

Тогда система имеет ***r*** базисных переменных и ***n – r*** свободных переменных.

Общее решение системы запишется в виде:

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1(t_1,\ldots,t_{n-r}) \\ \ldots \\ x_r(t_1,\ldots,t_{n-r}) \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} t_1 \\ \ldots \\ t_{n-r} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Базисные переменные, зависящие от свободных переменных

Значения свободных переменных

$t_1 = x_{r+1}; \quad t_2 = x_{r+2}; \ldots \quad t_{n-r} = x_n$

# Однородные системы линейных уравнений

Выберем ***n - r*** частных решений однородной системы, полученных из общего решения следующим образом: полагаем одно из значений свободных переменных равным ***1***, а остальные равными ***0*** :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти решения образуют ***фундаментальную систему решений*** однородной системы (ФСР).

# Однородные системы линейных уравнений

*Найти фундаментальную систему решений:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \times (-3) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \times (-1) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$n = 4$$

$n - r = 4 - 2 = 2$ *- число свободных переменных*

# Однородные системы линейных уравнений

*Обозначим:* $x_3 = t_1 \quad x_4 = t_2$

*(в качестве свободных переменных обычно берут те, которые имеют 0 на главной диагонали)*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5t_1 - 7t_2 = 0 \\ \qquad x_2 - 14t_1 - 15t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 5t_1 + 7t_2 \\ \qquad x_2 = 14t_1 + 15t_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -14t_1 - 15t_2 + 5t_1 + 7t_2 = -11t_1 + 12t_2 \\ \qquad x_2 = 14t_1 + 15t_2 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений

Общее решение

$$X = \begin{pmatrix} -11t_1 + 12t_2 \\ 14t_1 + 15t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$