

*Уроки геометрии в 7-м классе*

*Тема уроков:*

# **«Задачи на построение»**

*Учитель математики  
ГБОУ СОШ № 1194 г. Москва  
Гаврилова Ирина Николаевна*

# План изучения темы:

## 1. Вступительная лекция:

- Исторические сведения;
- Инструменты для построения;

## 2. План решения задач на построение;

## 3. Выполнение простейших задачи на построение;

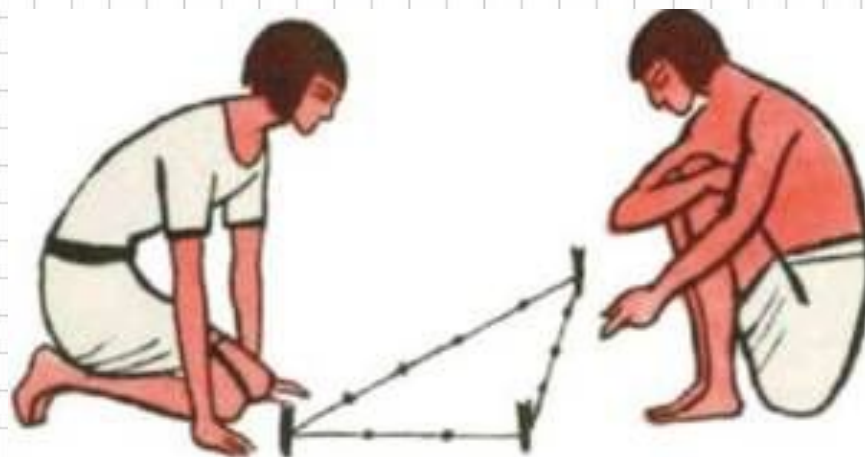
## 4. Решение задач на построение;

## 5. Задачи для самостоятельного решения.

## Исторические сведения:



И в Вавилоне, и в Древнем Египте в IV–II тысячелетиях до н.э. уже существовала практическая математика (в виде правил записи чисел, т.е. системы счисления, и правил различных вычислений), и практическая геометрия – геометрия в изначальном смысле слова: измерение земли. Но и при измерениях, и при строительных работах нужны были построения.



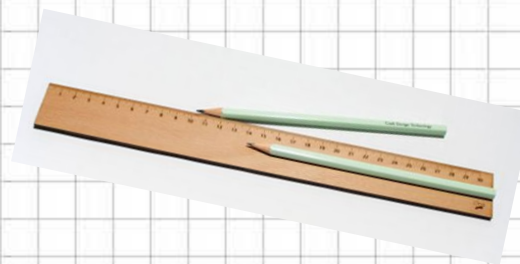
# Инструменты для построения:

**С помощью линейки выделить прямую из множества всех прямых:**

- 1. произвольную прямую;*
- 2. произвольную прямую, проходящую через заданную точку;*
- 3. прямую, проходящую через две заданные точки;*

**С помощью циркуля выделить окружность из множества всех окружностей:**

- 1. произвольную окружность;*
- 2. произвольную окружность с центром в заданной точке;*
- 3. произвольную окружность с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками;*
- 4. окружность с центром в заданной точке и с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками.*



## 2. План решения задач на построение

### Анализ:

*Предположить, что задача решена, сделать примерный чертеж искомой фигуры, отметить те отрезки и углы, которые известны из условия задачи, и стараться определить, к нахождению какой точки (прямой, угла) сводится решение задачи.*

### Построение:

*Описать способ построения.*

### Доказательство:

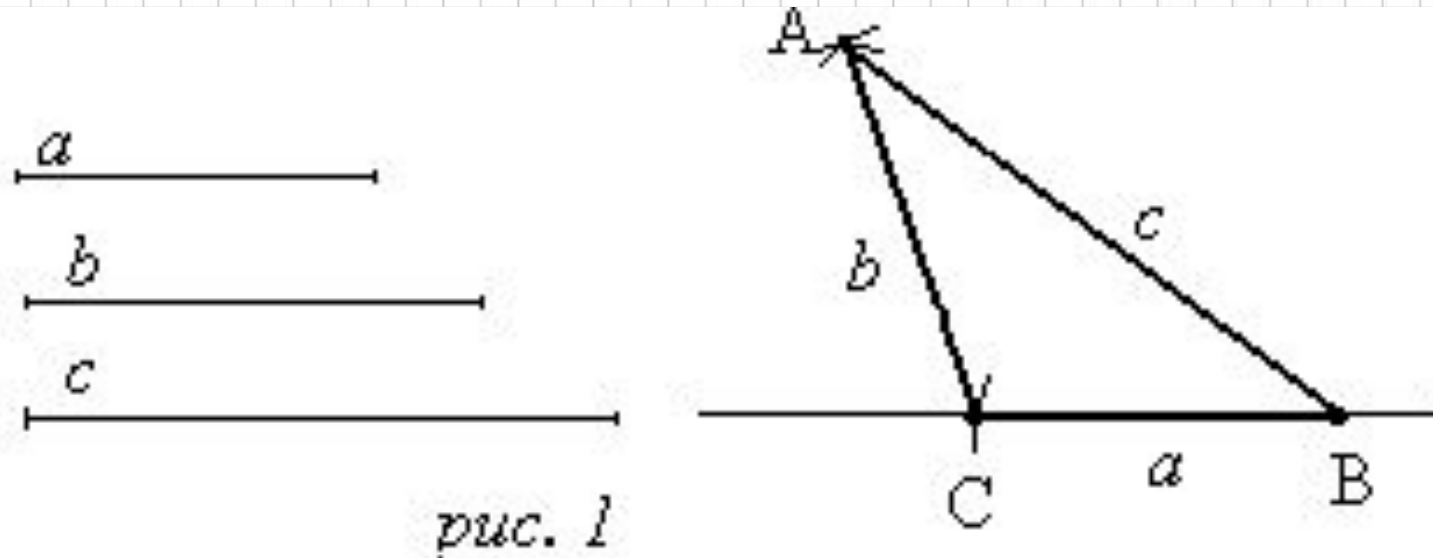
*Доказать, что множество точек, построенное описанным способом, действительно находится в заданном соотношении с исходным множеством точек.*

### Исследование:

*Выяснить, всегда ли (при любых ли данных) описанное построение возможно, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается или делается невозможным.*

### 3. Выполнение простейших задачи на построение

**Построение 1:** построить треугольник по трем сторонам, т.е. построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам  $a$ ,  $b$  и  $c$ .



- ✓ С помощью линейки проведем произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку В.
- ✓ Раствором циркуля, равным  $a$ , описываем окружность с центром в точке В и радиусом  $a$ . Пусть С – точка ее пересечения с прямой.
- ✓ Описываем окружность с центром в точке В радиуса  $c$  и с центром в точке С радиуса  $b$ . Пусть А – точка пересечения построенных окружностей. Треугольник ABC построен.

**Построение 2:** построить угол, равный данному, от данной полупрямой в данную полуплоскость.

**Анализ. (рис 2а)** Пусть  $a$  – данный луч с вершиной  $A$ , а угол  $(ab)$  искомый. Выберем точки  $B$  и  $C$  на лучах  $a$  и  $b$  соответственно. Соединив точки  $B$  и  $C$ , получим треугольник  $ABC$ . В равных треугольниках соответственные углы равны, и отсюда вытекает способ построения. Если на сторонах данного угла каким-то удобным образом выбрать точки  $C$  и  $B$ , от данного луча в данную полуплоскость построить треугольник  $AB_1C_1$ , равный  $ABC$  (а это можно сделать, если знать все стороны треугольника, см. предыдущую задачу), то задача будет решена.

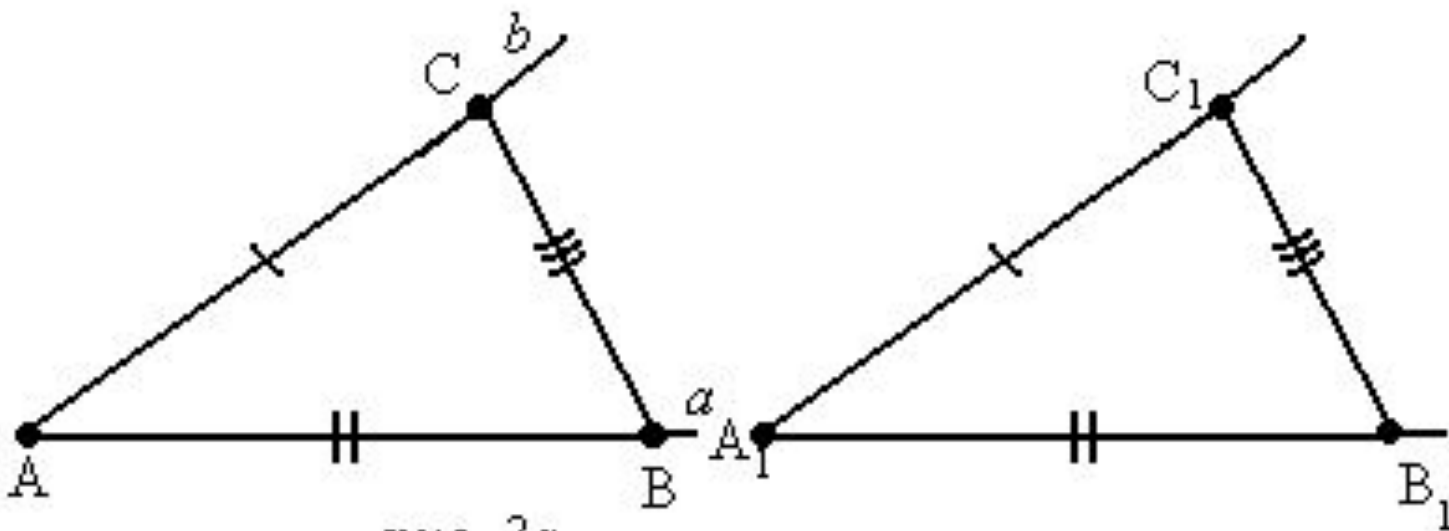
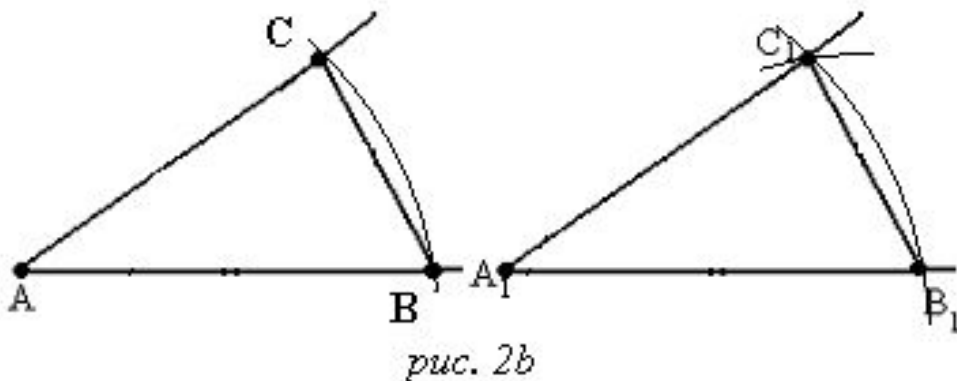


рис. 2а

## Построение:



- ✓ Проведем окружность с центром в вершине данного угла. Пусть  $B$  и  $C$  – точки пересечения окружности со сторонами угла (рис. 2b).
- ✓ Радиусом  $AB$  проведем окружность с центром в точке  $A_1$  – начальной точке данного луча. Точку пересечения этой окружности с данным лучом обозначим  $B_1$ .
- ✓ Опишем окружность с центром в  $B_1$  и радиусом  $B_1C$ . Точка пересечения  $C_1$  построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

### Доказательство:

Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (рис.2а) равны по трем сторонам. Углы  $A$  и  $A_1$  – соответствующие углы этих треугольников. Следовательно,  $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ .



### Построение 3: построить биссектрису данного угла.

**Анализ (рис. 3б).** Пусть луч  $AD$  – биссектриса данного угла  $A$ . Для построения биссектрисы нам необходимо построить точку  $D$  на ней, отличную от  $A$ . Выберем на разных сторонах угла точки  $B$  и  $C$ . Соединим их с точкой  $D$ . Если отрезки  $AB$  и  $AC$  равны, т.е.  $AB = AC$ , то  $\triangle ABD = \triangle ACD$  и, следовательно,  $\angle BAD = \angle CAD$  и луч  $AD$  – биссектриса.

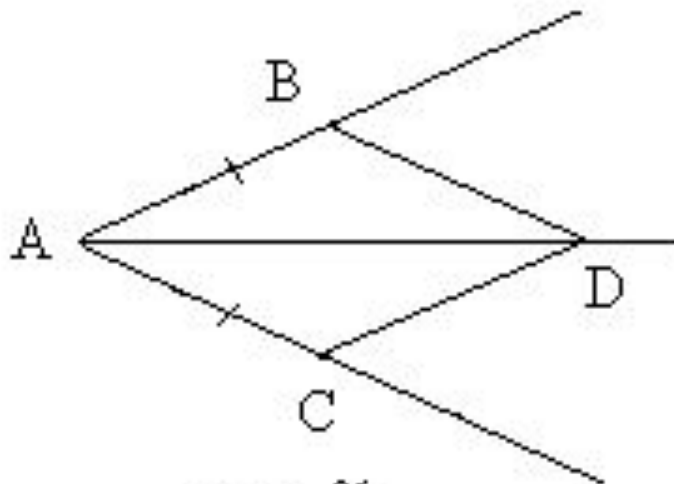


рис. 3б

**Построение:**

✓ Из вершины A данного угла, как из центра, опишем окружность произвольного радиуса. Пусть B и C – точки пересечения ее со сторонами угла (рис. 3).

✓ Построим еще две окружности с тем же радиусом с центрами в B и C. Пусть D – точка их пересечения. Тогда луч AD – искомая биссектриса угла A.

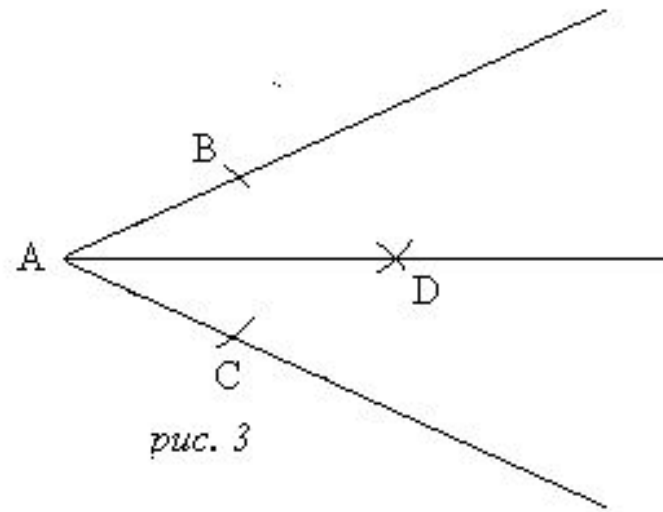


рис. 3

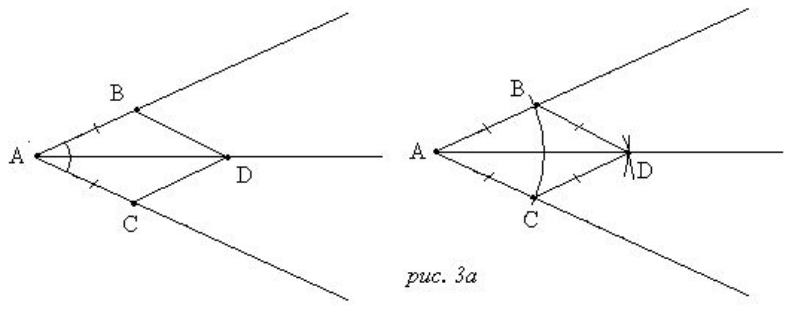


рис. 3а

**Доказательство: (рис.3а)**

Соединим точку D с точками B и C. Полученный четырехугольник ABDC – ромб. AD – его диагональ. По свойству диагоналей ромба луч AD – биссектриса данного угла A.

#### **Построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).**

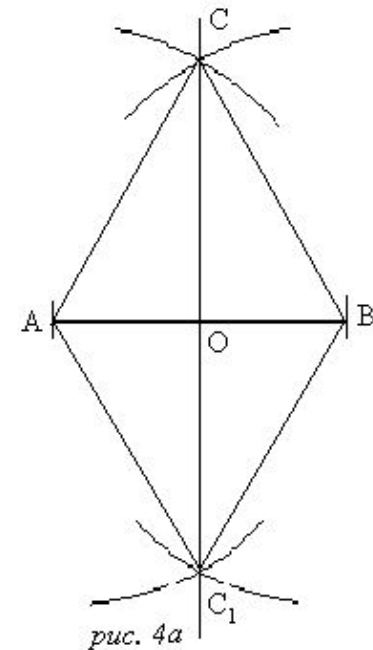
**Анализ.** Пусть  $AB$  – данный отрезок, точка  $O$  – его середина, прямая  $a$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ . Выберем произвольную точку  $C$  на прямой  $a$ , отличную от точки  $O$ . В  $\triangle ACB$   $CO$  – одновременно медиана и высота. Следовательно,  $\triangle ACB$  равнобедренный, и  $AC = BC$ . Отсюда возникает следующий способ построения точки  $O$  – середины отрезка  $AB$ .

#### **Построение:**

Из точек  $A$  и  $B$  циркулем описываем окружность радиусом  $AB$ . Пусть  $C$  и  $C_1$  – точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полу плоскостях относительно прямой  $AB$ . (рис. 4а)

#### **Доказательство:**

Соединим точки  $C$  и  $C_1$  с концами отрезка  $AB$ . По построению  $AC_1 = AC = C_1B = CB$ . Поэтому равнобедренные треугольники  $CAC_1$  и  $CBC_1$  равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов  $ACO$  и  $BCO$ . В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $CO$  – биссектриса, проведенная к основанию, следовательно, она медиана и высота. Отсюда  $AO = OB$ , и точка  $O$  – середина отрезка  $AB$ .



**Построение 5:** через точку  $O$  провести прямую, перпендикулярную данной прямой  $a$ .

**Возможны два случая:**

- ✓ точка  $O$  лежит на прямой  $a$ ;
- ✓ точка  $O$  не лежит на прямой  $a$ .

### Случай 1.

**Анализ.** Пусть  $a$  – данная прямая,  $O$  – данная точка на ней,  $b$  – искомая прямая, перпендикулярная прямой  $a$  и проведенная через точку  $O$ . Из предыдущей задачи нам известен способ построения серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$ . Тогда, если точка  $O$  – середина некоторого отрезка, то  $b$  – серединный перпендикуляр к этому отрезку и проходит через точку  $O$ .

**Построение: (рис. 5)**

- ✓ Отложим от точки  $O$  по разные стороны от нее на прямой  $a$  одинаковые отрезки  $OA$ ,  $OB$ .
- ✓ Проведем две окружности одинакового радиуса  $AB$  с центром в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Они пересекаются в точке  $C$ .
- ✓ Проведем прямую  $OC$ . Она перпендикулярна прямой  $a$ .

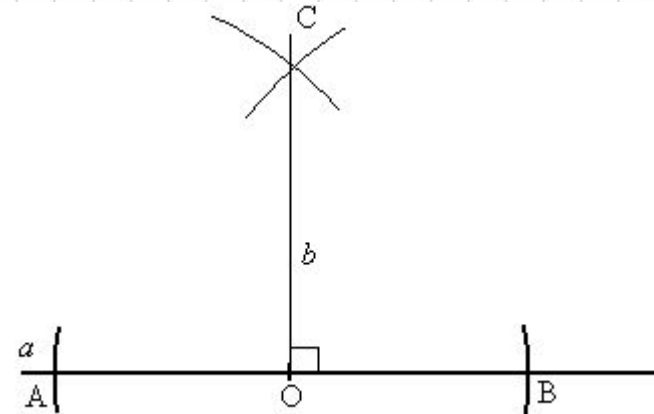
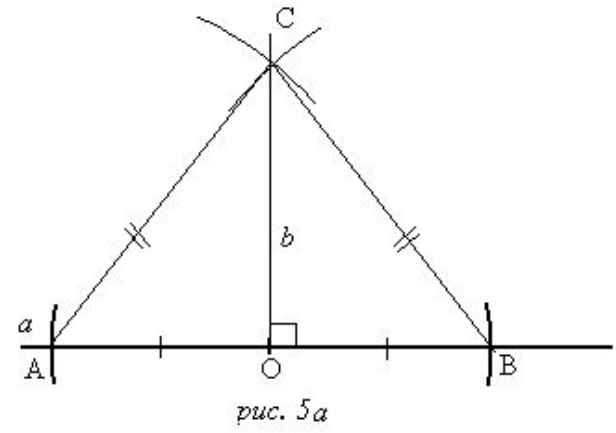


рис. 5

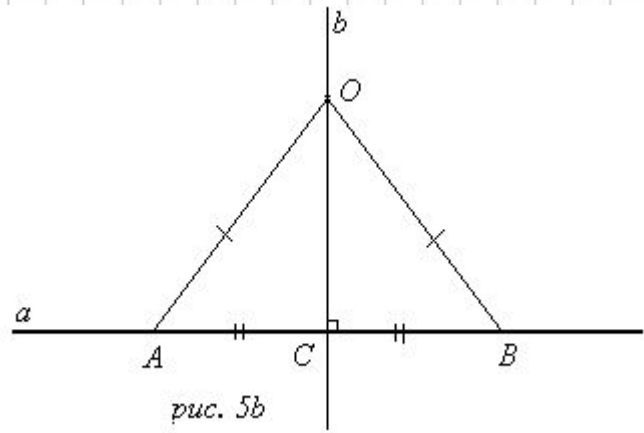
**Доказательство: (рис.5а)**

Треугольник ABC – равнобедренный по построению:  $AC = BC = AB$ . CO – медиана по построению:  $AO = OB$ . Следовательно,  $CO \perp AB$ .



**Случай 2.**

**Анализ. (рис. 5b)** Пусть O – данная точка, лежащая вне данной прямой a, b – прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная прямой a. Чтобы построить прямую, нам необходимо указать (построить) еще какую-либо ее точку. Для этого проанализируем: какими свойствами обладают точки прямой  $b \perp a$ ? В частности, любые две равные наклонные к прямой a, проведенные из точки O, имеют одинаковые проекции. Поэтому, если  $OA = OB$  – такие наклонные, то должно быть  $AC = CB$ , где C – точка пересечения прямых a и b.

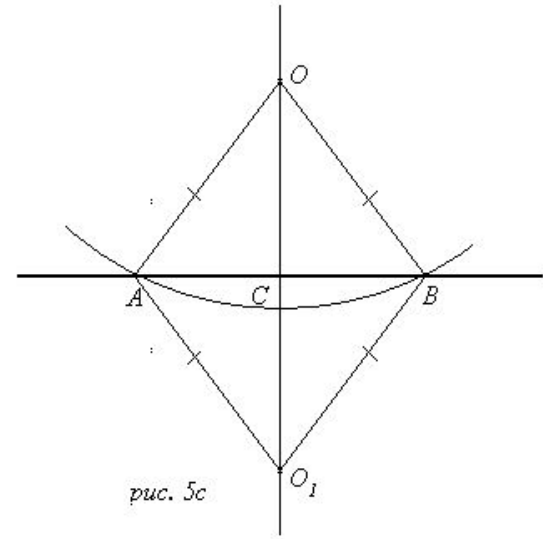


**Построение: (рис. 5с)**

Проведем окружность с центром в точке  $O$ , пересекающую прямую  $a$  в двух точках  $A$  и  $B$ .

Проведем две окружности с центрами в точках  $A$  и  $B$  и радиусом, равным  $OA$ . Пусть  $O_1$  – точка пересечения, отличная от точки  $O$ , ( $O$  и  $O_1$  лежат в разных полуплоскостях). Тогда прямая  $(OO_1)$  перпендикулярна данной прямой  $a$ .

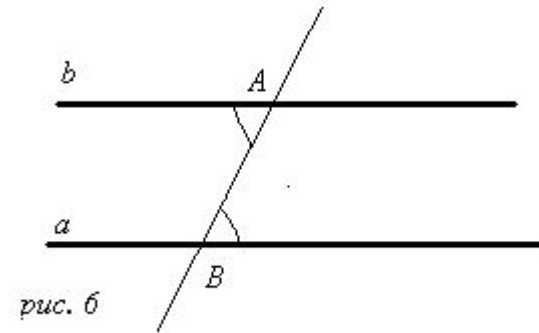
- Через точку  $O$  проведем прямую, перпендикулярную данной.

**Доказательство:**

По построению  $AO = OB = BO_1 = AO_1$ . Четырехугольник  $AOBO_1$  – ромб.  $OO_1$  и  $AB$  – его диагонали. По свойству диагоналей ромба  $OO_1 \perp AB$ .

### **Построение б: построение прямой, проходящей через данную точку А параллельно данной прямой а.**

**Анализ.** Если точка А лежит на прямой а, то задача не имеет решения, поэтому, пусть А лежит вне прямой а, и  $b \parallel a$  – искомая прямая. Через точку А проведем секущую АВ,  $B \in a$ . По свойству параллельных прямых внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны. Верно и обратное: если внутренние накрест лежащие углы при прямых а и b и секущей АВ равны, то  $a \parallel b$ . Отсюда способ построения.



#### **Построение. (рис. б)**

- ✓ Через заданную точку А и произвольную точку В прямой а проведем прямую АВ.
- ✓ Пусть С – произвольная, отличная от В точка прямой а. Построим от луча АВ в полуплоскость, не содержащую точку С, угол, равный углу АВС. Пусть AD – сторона построенного угла. Тогда прямая AD  $\parallel$  а.
- ✓ Через точку А проведем прямую, параллельную данной.

**Доказательство: (рис. б)** Доказательство следует из признака параллельности прямых (теорема: Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.), ввиду равенства углов АВС и ВAD как внутренних накрест лежащих при прямых а, AD и секущей АВ.

## 4. Решение задач на построение

**Задача 1.** Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание.

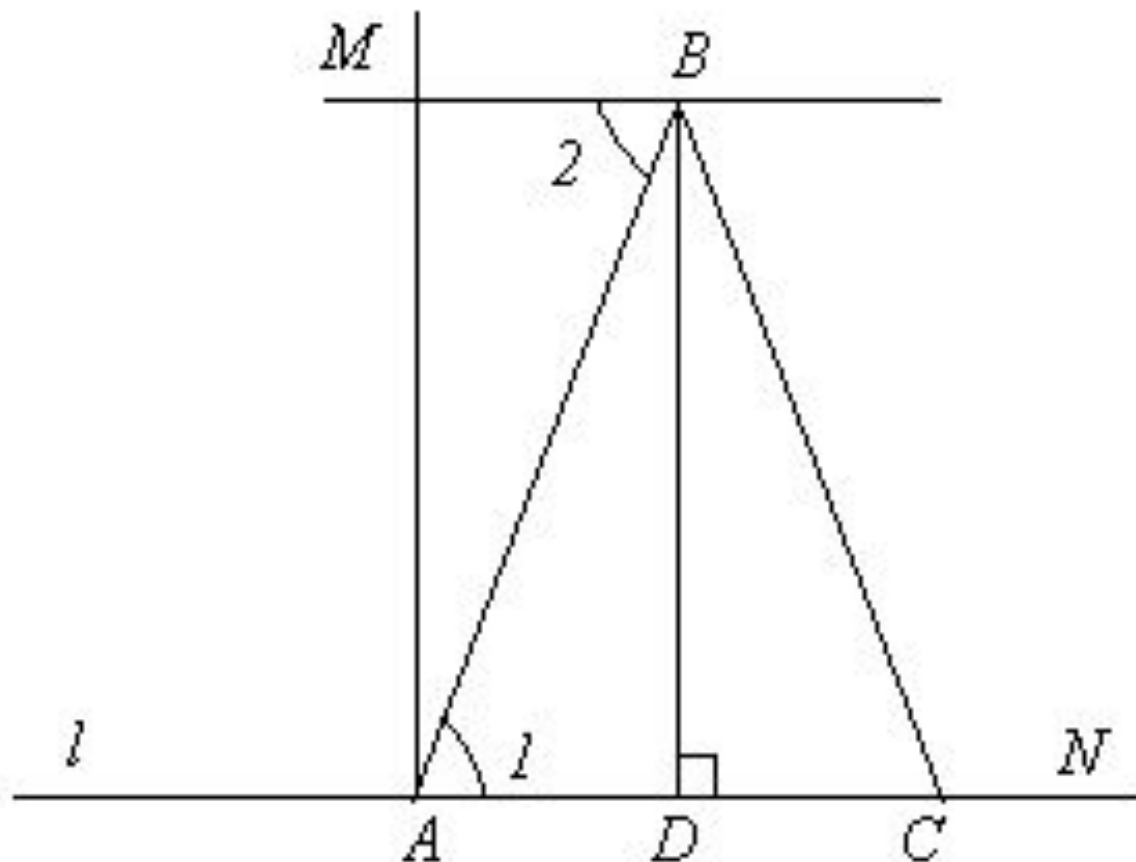
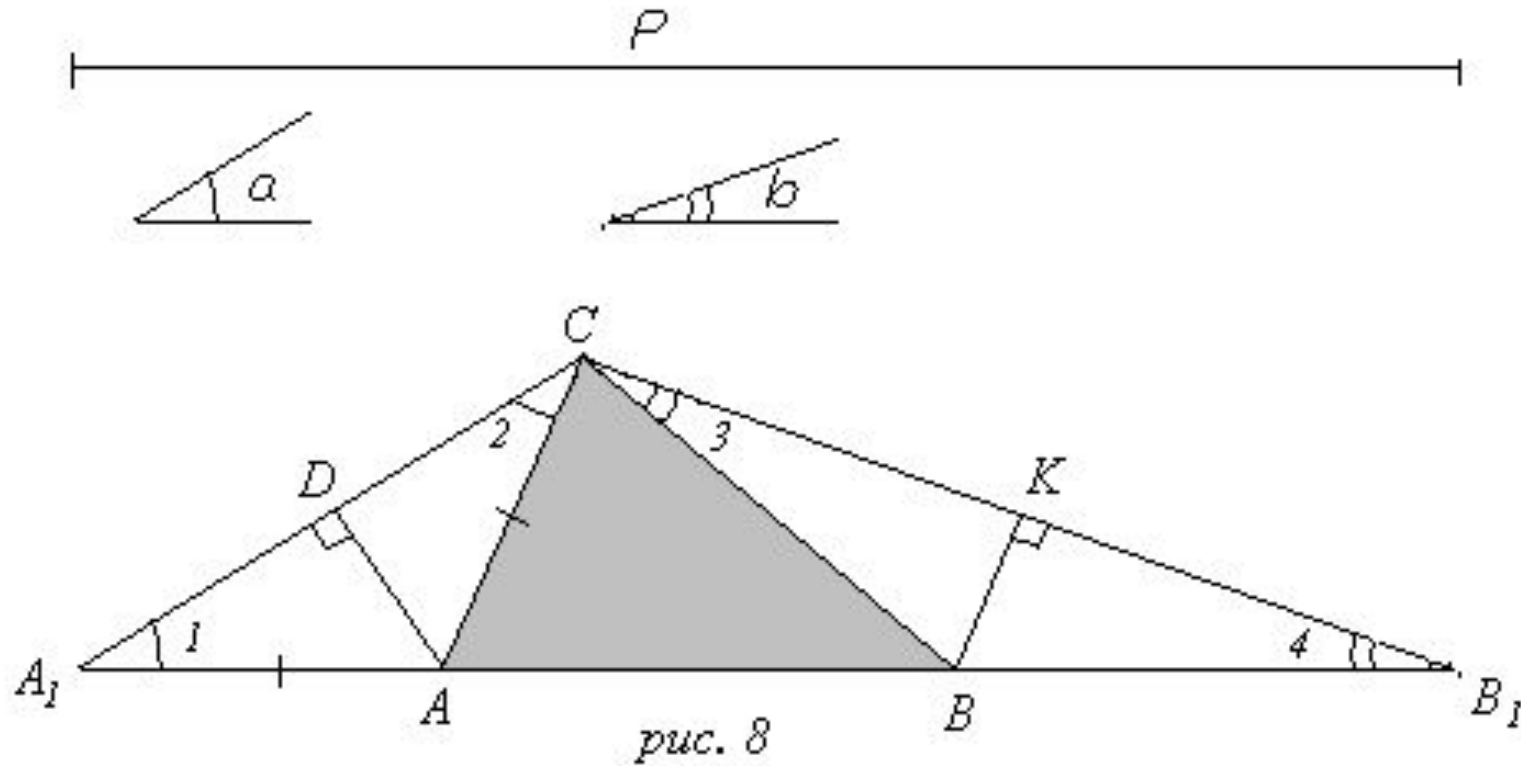


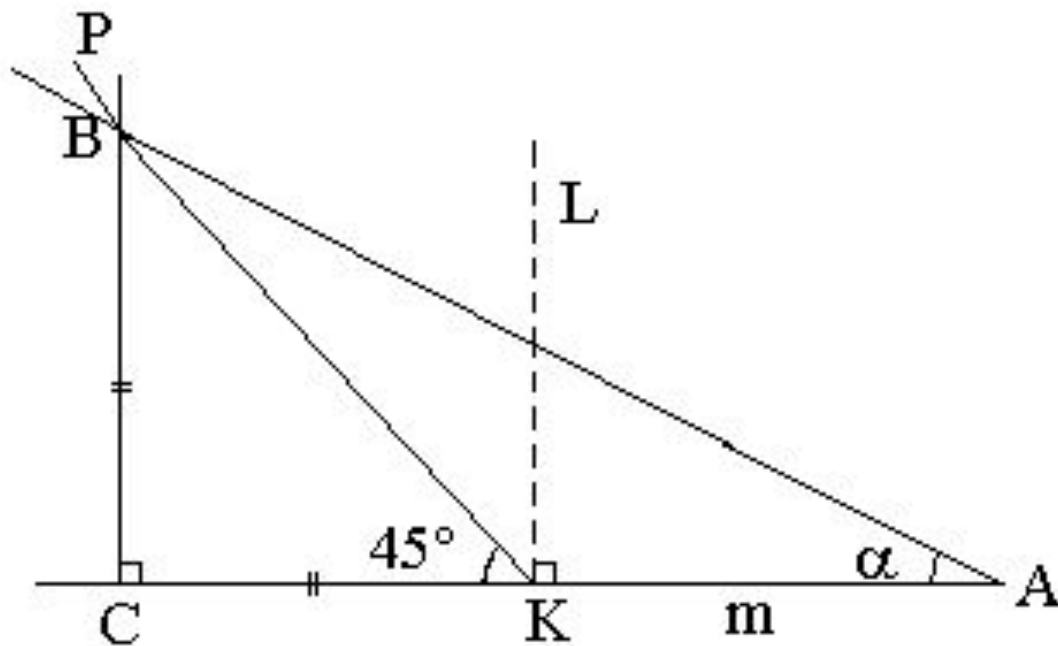
рис. 7а



**Задача 2.** Построить треугольник по данному периметру и двум углам.  
 По данному отрезку  $P$  и двум углам требуется построить треугольник, периметр которого равен  $P$ , и два его угла равны двум данным углам.



**Задача 3.** Дан отрезок  $m$  и острый угол  $\alpha$ . Построить прямоугольный треугольник с углом  $\alpha$ , в котором разность катетов равна  $m$ .



*рис. 9а*

**Задача 4.** Даны два отрезка  $a$  и  $m$ . Построить равнобедренный треугольник с основанием  $a$  и медианой к боковой стороне  $m$ .

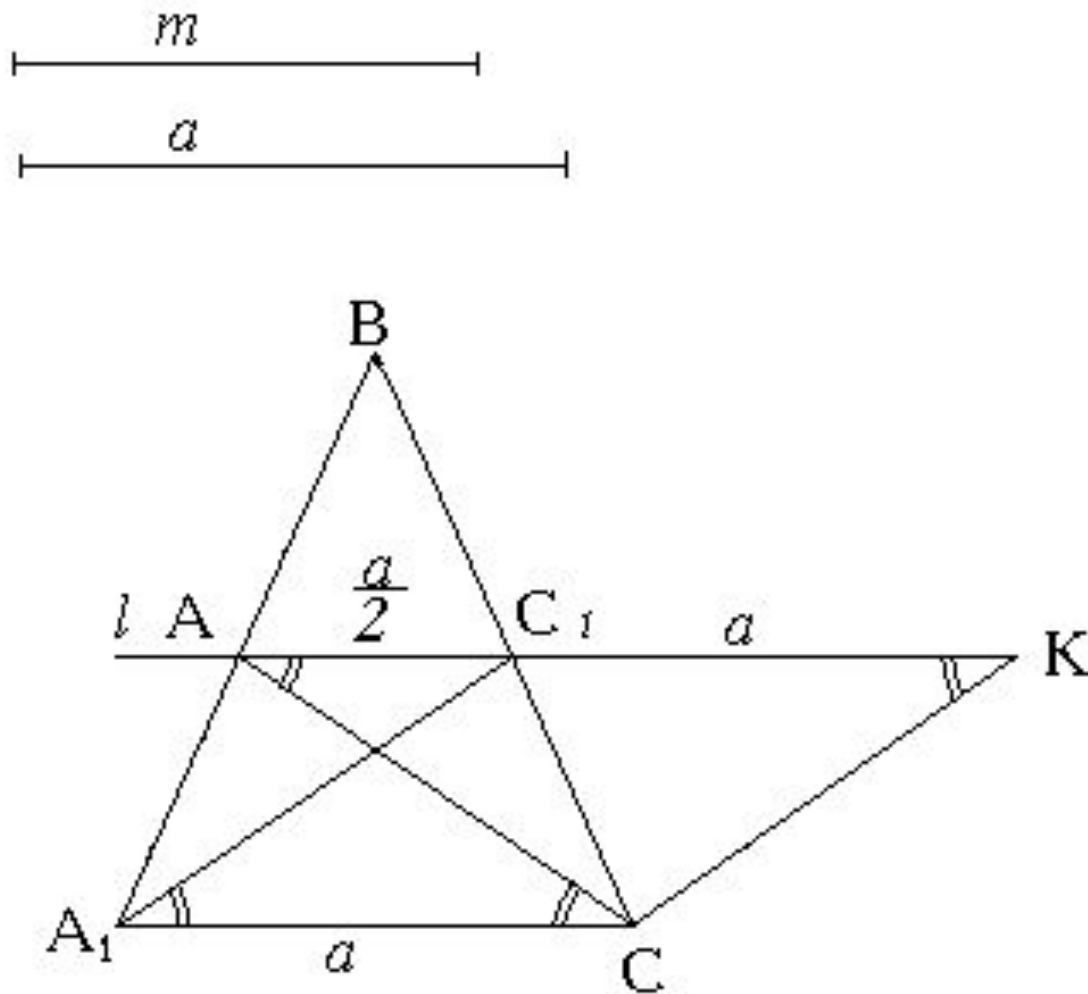


рис. 10

## 5. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.

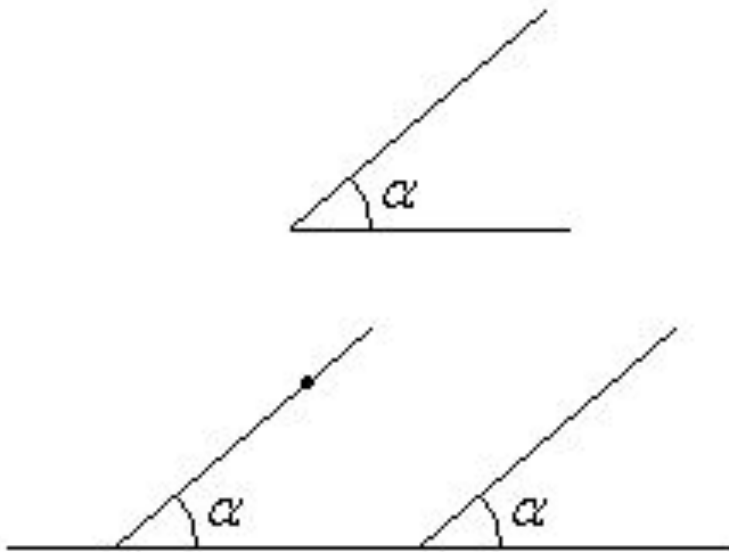


рис. 13

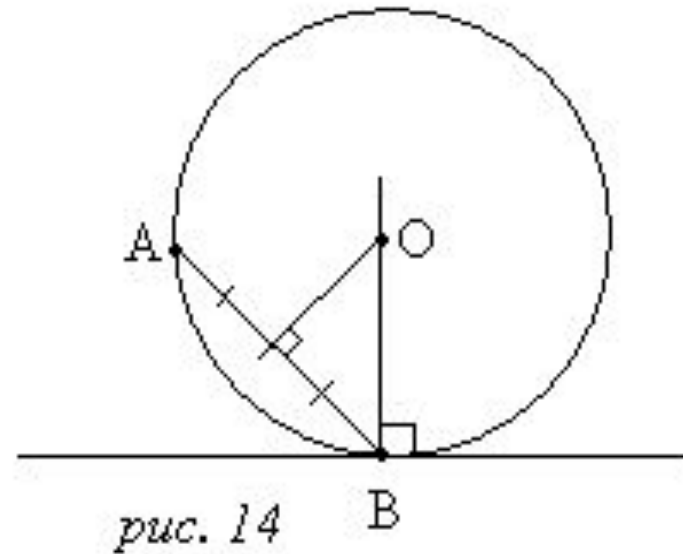
**Указание к решению задачи (рис. 13):**

Построить угол, равный данному в произвольной точке данной прямой, одна из сторон которого лежит на этой прямой; затем через данную точку провести параллельную прямую.

**Задача 2.** описать окружность, которая проходила бы через данную точку  $A$  и касалась бы данной прямой в данной на ней точке  $B$ .

**Указание к решению задачи (рис. 14):**

К данной прямой восстановить перпендикуляр из данной точки  $B$ , построить серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  ( $A$  – другая данная точка). Их пересечение – точка  $O$  – центр искомой окружности,  $OB$  – радиус.



**Задача 3.** Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

**Указание к решению задачи (рис. 15):** Через точку пересечения биссектрис провести прямую  $MN$ , параллельную основанию. Получим равнобедренные треугольники  $ONC$  и  $OMA$  (теорема о накрест лежащих углах при параллельных прямых, свойства сторон и углов в равнобедренном треугольнике).

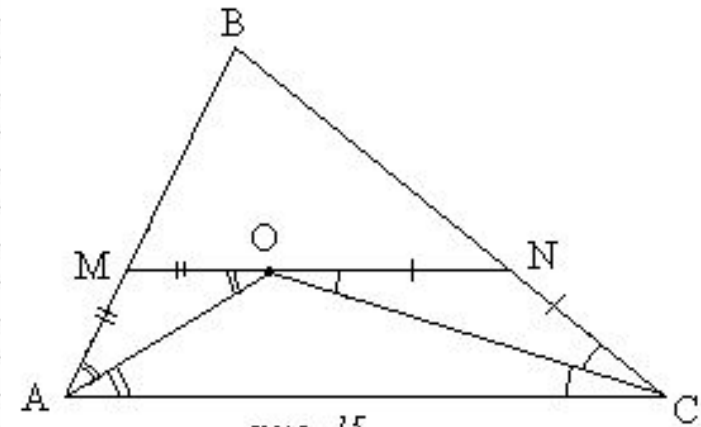


рис. 15

**Задача 4.** На прямой  $AB$  найти такую точку  $C$ , чтобы лучи  $CM$  и  $CN$ , проведенные из  $C$  через данные точки  $M$  и  $N$ , расположенные по одну сторону от  $AB$ , составляли с лучами  $CA$  и  $CB$  равные углы.

**Указание к решению задачи (рис. 16):**

Точка  $C$  – пересечение прямых  $M'N$  и  $AB$ , где  $M'$  – точка, симметричная  $M$  относительно  $AB$ .

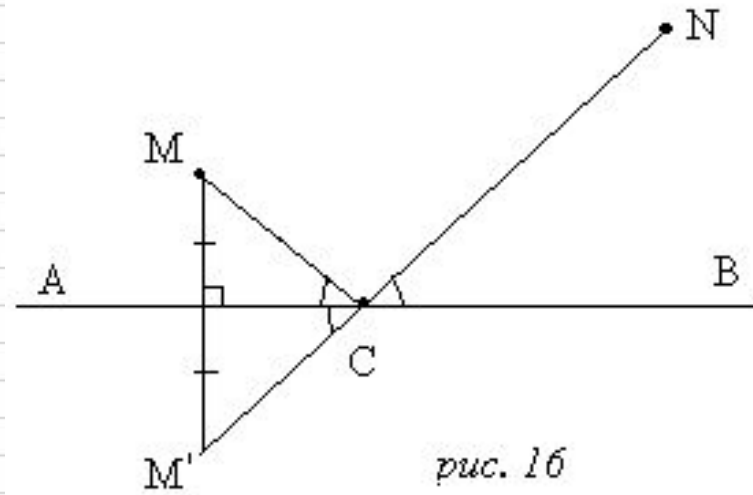


рис. 16

## Список литературы:

- 1.Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др., Геометрия 7-9, учебник для общеобразовательных учреждений, «Просвещение», М., 2009;
- 2.Р.С. Сазоненко, Теоремы и задачи по планиметрии с перекрестными ссылками 7-9 классы, Издательство института математики СО РАН, Новосибирск, 1998;
- 3.Т.С. Пиголкина, Математика, задание № 2 для 8-х классов ЗФТШ МФТИ, Долгопрудный, 2005;
- 4.<http://www.college.ru/mathematics/courses/planimetry/content/chapter8/section/paragraph4/theory.html>;
- 5.<http://www.math.ru/lib/i/20/index.djvu?djvuopts&page=5>.