Последовательности. Предел последовательности

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots,\quad n-1,\quad n,\ n+1,\ \ldots$$

Функцию $y = f(x),\ x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n;

эта формула называется формулой общего члена.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$*;*

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. *Перечислением членов последовательности (словесно).*
2. *Заданием аналитической формулы.*
3. *Заданием рекуррентной формулы.*

Примеры:

1. *Последовательность простых чисел:*

   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …

2. *Арифметическая прогрессия:*

   $$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. *Геометрическая прогрессия:*

   $$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Ограниченность числовой последовательности

*Последовательность $\{y_n\}$ называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.*

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число M называют верхней границей последовательности.

Пример: -1, -4, -9, -16, …, $-n^2$, … - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, n^2, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2n – 1, … - *возрастающая последовательность.*

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2n – 1), … - *убывающая последовательность.*

Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a при увеличении порядкового номера n.
В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$

Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим последовательность:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ – *гармонический ряд* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Если $m\in N,\ k\in R$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0$

Если $|q|<1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

Если $|q|>1$, *то последовательность* $y_n=q^n$ *расходится*

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$$

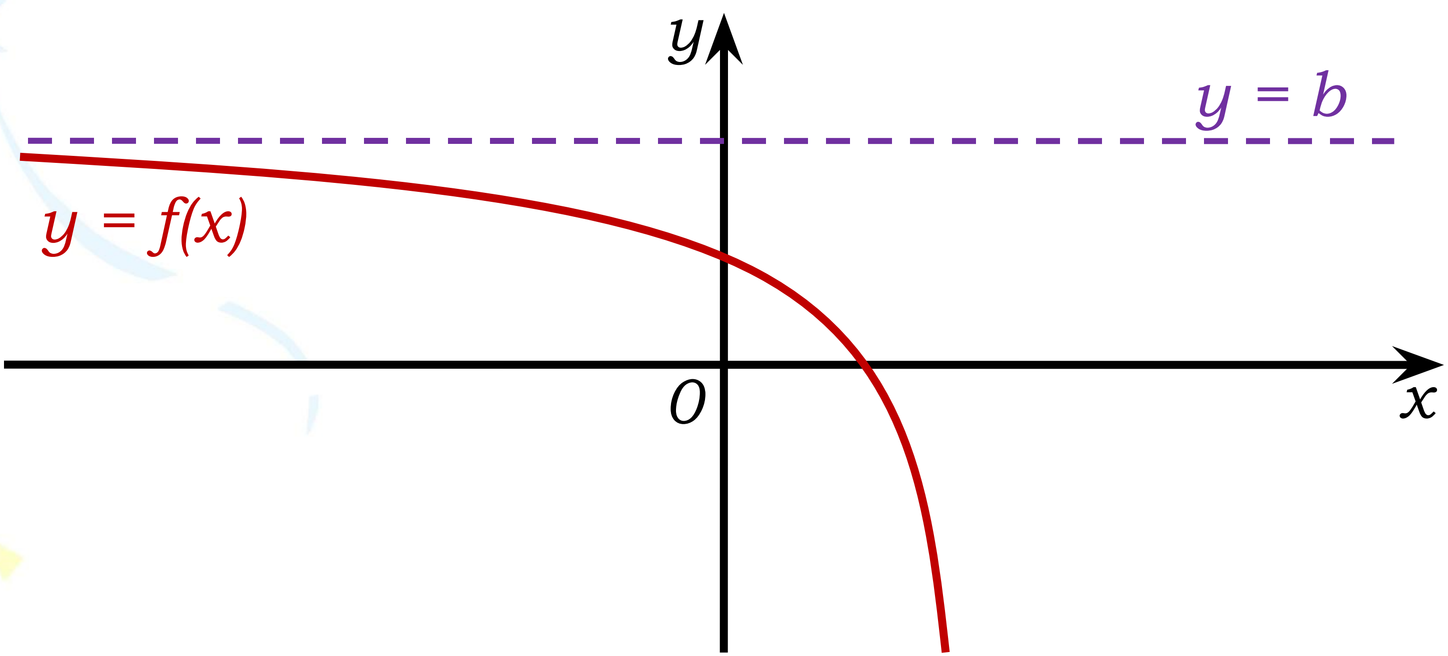
$$4)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = b$$

Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in N$

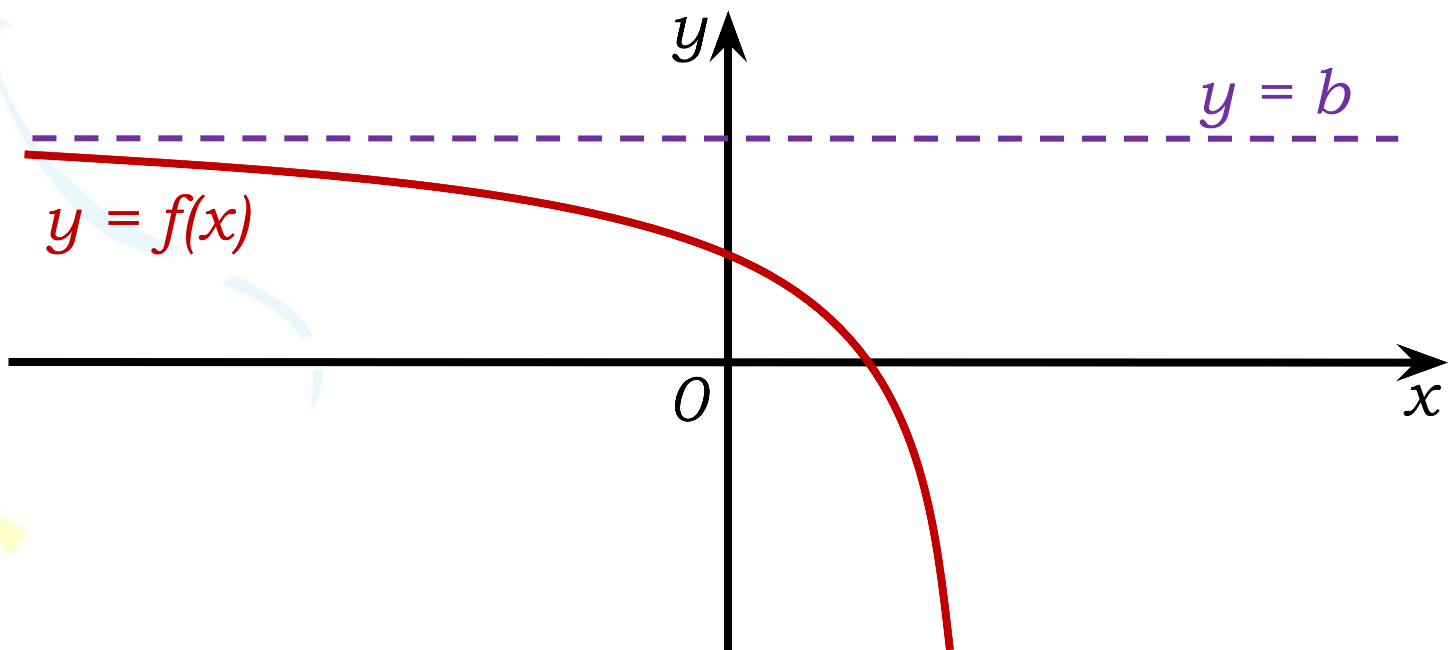


Предел функции

Предел функции на бесконечности $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

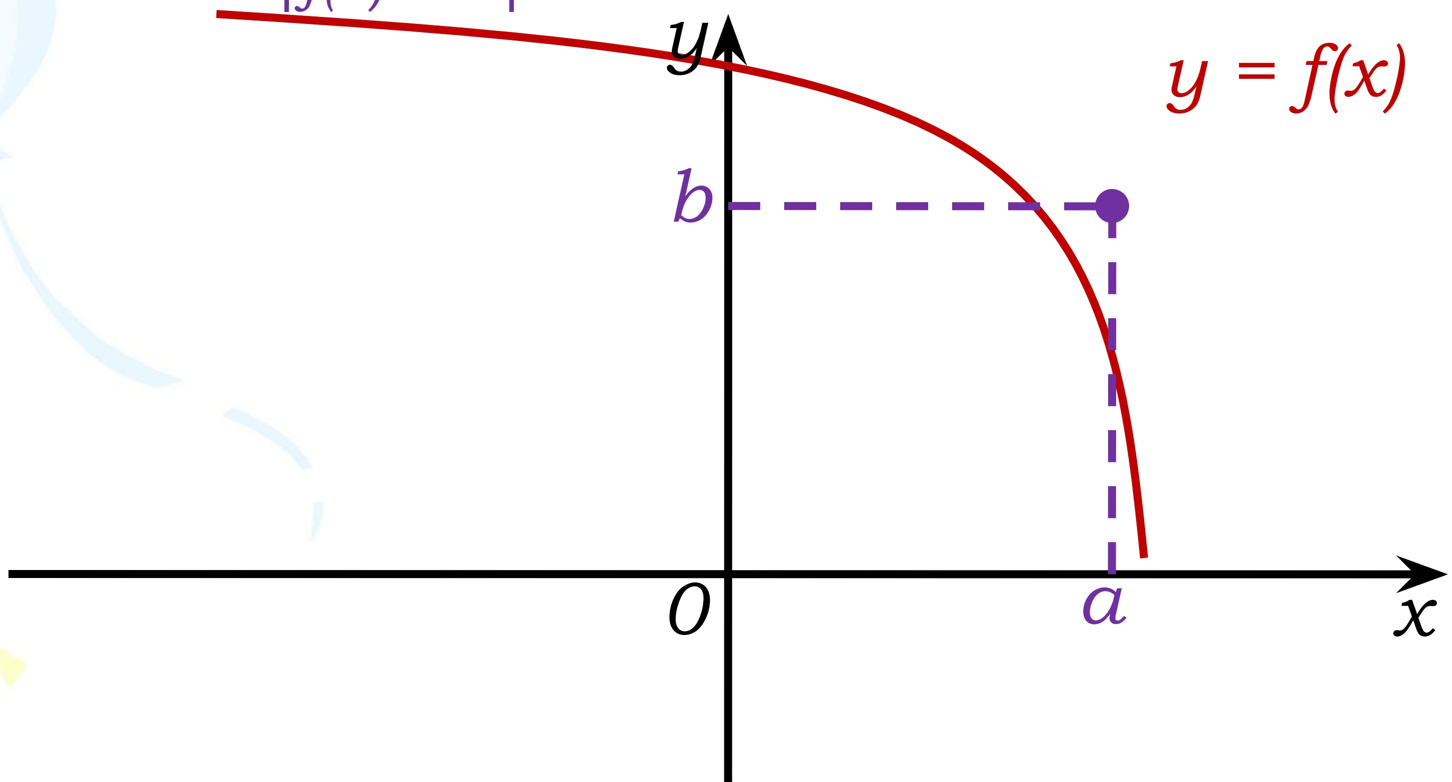
Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \to \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.



Предел функции в точке $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Бесконечно малые
и
Бесконечно большие

Функция α(*x*) называется ***бесконечно малой величиной*** при

x → *a* (или при *x* → ∞), если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

ПРИМЕР: Функция $y = x - 3$ является бесконечно малой при *x* → 3.

В других точках эта функция бесконечно малой не является!

Теорема. Если функция *f (x)* при *x* → *a* имеет предел, равный А, то ее можно представить в виде суммы предела А и бесконечно малой *α (x)* при *x* → *a*:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

Свойства бесконечно малых

Теорема 1. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая величина.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую функцию) есть бесконечно малая.

Функция *f* (*x*) называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если для любого, даже сколь угодно большого числа М > 0 найдется δ (зависящее от М), что для всех *x* таких, что $0 < | x - a | < \delta$, выполнено неравенство:

$| f(x) | > M$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Связь между б.м. и б.б.

Теорема 1. Если α (*x*) – бесконечно малая, то 1/α(*x*) бесконечно большая.

Теорема 2. Если β (*x*) – бесконечно большая, то 1/β(*x*) бесконечно малая.

Таблица эквивалентности

Если предел отношения двух бесконечно малых равен единице:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

то их называют эквивалентными при $x \to a$ (или при $x \to \infty$):

$$\alpha(x)\approx\beta(x)$$

$$tg\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad (1+\alpha(x))^p-1\sim p\cdot\alpha(x)$$

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$$

$$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x) \qquad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim(\alpha(x))^2/2 \qquad arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

Теоремы о пределах. Вычисление пределов Первый и второй замечательные пределы

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim f(x)$$

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim \left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim \left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

- Если между соответствующими значениями трех функций

$$u = u(x); \quad z = z(x); \quad v = v(x)$$

выполняются неравенства: $u \le z \le v,$ при этом:

$$\lim u(x) = \lim v(x) = A \quad \text{тогда:} \quad \lim z(x) = A$$

- Если функция f(x) монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

или ее правый предел:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию f(x).

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию f(x) получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию f(x) получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются неопределенности, а вычисление пределов в этом случае называется раскрытие неопределенности.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- *Это означает, что синус малого угла есть бесконечно малая того же порядка, что и сам угол.*

Второй замечательный предел

- ***Числом e (вторым замечательным пределом)*** называется предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

- Это пример последовательности, которая монотонная и ограничена.