



5



7



3



# Показникові нерівності





5



7



3



Нерівність називається  
**показниковою**, якщо їх змінні  
входять лише до показників  
степенів при сталих основах.





5



7



3



Розв'язування показникових  
нерівностей часто зводяться до  
розв'язування нерівностей  $a^x > a^b$  ( $a^x$   
 $a^b$ ) або  $a^x < a^b$  ( $a^x$   $a^b$ ).





5



7



3



Ці нерівності розв'язують,  
використовуючи монотонність  
(зростання, спадання) показникової  
функції.





# Порівняйте числа $x$ і $y$ , якщо:

5

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^y \quad a = 4/5, \quad a < 1, \quad \text{то } x > y$$



7

$$(1,5)^x < (1,5)^y \quad a = 1,5, \quad a > 1, \quad \text{то } x < y$$



3

$$(0,3)^x > (0,3)^y \quad a = 0,3, \quad a < 1, \quad \text{то } x < y$$



$$\left(\frac{8}{3}\right)^x > \left(\frac{8}{3}\right)^y \quad a = 8/3, \quad a > 1, \quad \text{то } x > y$$



# Розв'язування показникових нерівностей

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

Якщо  $a > 1$ , тоді

$$f(x) \geq g(x)$$

Якщо  $0 < a < 1$ , тоді

$$f(x) \leq g(x)$$

знак нерівності змінюється  
на протилежний



5



7



3





Розв'язати нерівність

$$3^x \geq 27$$

*Розв'язання:*

Запишемо дану нерівність у вигляді  $3^x < 3^3$ . Оскільки  $3 > 1$ , то функція  $y = 3^t$  є зростаючою.

Отже, при  $x < 3$  виконується нерівність  $3^x < 3^3$ .

*Відповідь:*  $x < 3$ .



5



7



3







5



7



3



## Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$$

Запишемо дану нерівність у вигляді

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Оскільки  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  — спадна функція,  
то  $x < 4$ .

*Відповідь:  $x < 4$ .*





5



7



3



### ① Найпростіші

$$1. 0,5x^2 + 2x + 1 > 0,5x^2 - 3$$

#### Розв'язання

$$x^2 + 2x + 1 < x^2 - 3$$

$$2x^2 < -4$$

$$x < -2$$



$$x \in (-\infty; -2)$$

Відповідь:  $(-\infty; -2)$ .

$$2. 2^{2x^2+3x+2} < 2^{x^2}$$

#### Розв'язання

$$2x^2 + 3x + 2 < x^2$$

$$x^2 + 3x + 2 < 0$$

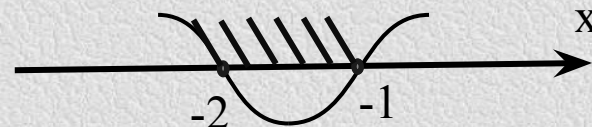
Прирівнюємо до нуля:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$



$$x \in (-2; -1)$$

Відповідь:  $(-2; -1)$ .





5



7



3



## ② Заміна змінної

$$1) 2^{2x} - 2^{x+1} - 24 < 0$$

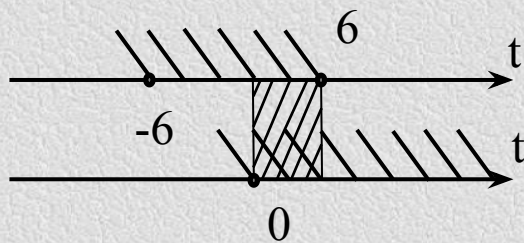
Розв'язання

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 24 < 0$$

Заміна:  $2^x = t, t > 0$

$$t^2 - 2t - 24 < 0$$

$$(t - 6) \cdot (t + 6) < 0$$

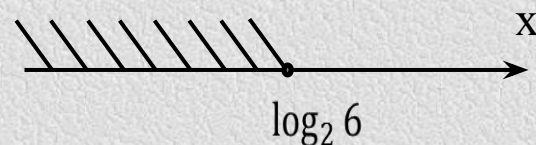


$$0 < t < 6$$

Повертаючись до заміни, маємо:

$$0 < 2^x < 6$$

$$\begin{cases} x \in R; \\ x < \log_2 6. \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; \log_2 6)$$

Відповідь:  $(-\infty; \log_2 6)$ .





5



7



3



### ③ Однорідні нерівності

$$3 \cdot 4^x + 9^x \cdot 2 - 5 \cdot 6^x < 0$$

Розв'язання

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x < 0$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0$$

$$3^{2x} > 0$$

$$3 \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 < 0$$

Заміна :  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0$

$$3t^2 - 5t + 2 < 0$$

Прирівнюємо до нуля:

$$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$t_2 = 1$$

$$\begin{cases} t > \frac{2}{3}; \\ t < 1; \end{cases}$$

Повертаючись до заміни,  
маємо:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3}; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1; \\ x < 0; \end{cases}$$

Відповідь:





5



7



3



#### ④ Окремі типи

$$2^{x+2} - 2^{x+2} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$$

Розв'язання

$$4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x \leq 9$$

$$2 \frac{1}{4} \cdot 2^x \leq 9$$

$$2^x \leq 9 \cdot \frac{4}{9}$$

$$2^x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

Відповідь:  $(-\infty; 2)$ .





5



7



3



$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{2+x}$$

Розв'язання

$$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$$

$$-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x$$

$$2^x < 5^x$$

Поділимо ліву і праву частини на  $5^x$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x > 0$$

Відповідь:  $(0; +\infty)$ .





5



7



3



## 5. Графічний спосіб

Розв'язати нерівність  $2^x < 3 - x$

Побудуємо графіки функцій  $y = 2^x$  і  $y = 3 - x$ . Із рисунка видно, що  $2^x \leq 3 - x$  при  $x \leq 1$ .

Отже, розв'язком нерівності  $2^x < 3 - x$  є проміжок  $(- ; 1]$ .

*Відповідь:*  $(- ; 1]$ .

