Системы линейных алгебраических уравнений

- Виды систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
- Решение СЛАУ в матричном виде
- Решение СЛАУ методом Крамера
- Решение СЛАУ методом Гаусса
- Решение СЛАУ в общем случае

Системы линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система, состоящая из m уравнений
с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

где $a_{ij}, b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - заданные числа,

а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные

Системы линейных алгебраических уравнений

Систему (1) можно записать в виде

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{1, m}}$$

или

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m}}$$

Определение

Решением системы (1) называется такая совокупность чисел

$$x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2, \ldots, x_n = \mu_n,$$

при подстановки которых каждое уравнение системы обращается в верное тождество

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение1

Система (1) называется <u>совместной</u>, если у нее существует решение. Если решения нет, то система называется <u>несовместной</u>.

Определение2

Система, имеющая единственное решение называется <u>определенной</u>. Если система имеет более одного решения, то она называется <u>неопределенной</u>

Определение3

Система (1) называется <u>однородной</u>, если все свободные члены в ней равны нулю. В противном случае она называется <u>неоднородной</u>.

Решение СЛАУ в матричном виде

Коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (1) образуют матрицу размера $m \times n$, которую обозначим

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и назовем матрицей системы (1).

Решение СЛАУ в матричном виде

Вектор - столбец неизвестных системы (1):

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Вектор - столбец свободных членов системы (1):

$$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ в матричном виде

Рассмотрим произведение матриц:

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B_{m\times 1}$$

Таким образом систему (1) можно записать в матричном виде:

$$A\cdot X=B$$

Решение СЛАУ в матричном виде

Рассмотрим случай, когда m=n, то есть количество уравнений в системе (1) равно количеству неизвестных. Матрица системы А – квадратная матрица порядка n.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};\ X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ в матричном виде

Будем считать, что матрица A – невырожденная матрица, то есть $|A| \neq 0$

Пусть система записывается в матричном виде

$$\boxed{A \cdot X = B \qquad (2)}$$

У матрицы A существует, причем единственная матрица A^{-1} . Умножим слева обе части уравнения (2) на матрицу A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X_{n \times 1} = A^{-1}_{n \times n} \cdot B_{n \times 1} \qquad (3)}$$

Решение СЛАУ в матричном виде

Если задано матричное уравнение вида:

$$X \cdot A = B \qquad (4)$$

, то для его решения умножим обе части уравнения (4) справа на матрицу A^{-1} .

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = A^{-1} \cdot B$$

$$X = B \cdot A^{-1} \qquad (5)$$

Решение СЛАУ методом Крамера

Рассмотрим невырожденную линейную систему алгебраических уравнений в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где A – квадратная матрица порядка n и $\det A = \Delta \neq 0$

Решение системы: $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \frac{A_{11}}{\Delta} + b_2 \frac{A_{21}}{\Delta} + \dots + b_n \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ b_1 \frac{A_{12}}{\Delta} + b_2 \frac{A_{22}}{\Delta} + \dots + b_n \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots \\ b_1 \frac{A_{1n}}{\Delta} + b_2 \frac{A_{2n}}{\Delta} + \dots + b_n \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ методом Крамера

Таким образом, имеем:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn})$$

Решение СЛАУ методом Крамера

Составим определитель Δ_1, который получается из определителя Δ путем замены первого столбца столбцом из свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \dots + b_n \cdot A_{n1} = \Delta \cdot x_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}}$$

Решение СЛАУ методом Крамера

Составим определитель Δ_n, который получается из определителя Δ путем замены n -ого столбца столбцом из свободных членов

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} = b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + \dots + b_n \cdot A_{nn} = \Delta \cdot x_n$$

$$\boxed{x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

Решение СЛАУ методом Крамера

Таким образом, была доказана следующая теорема

Теорема Крамера

Пусть Δ - определитель матрицы системы А и Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой j-ого столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n}$$

Решение СЛАУ методом Гаусса

Метод последовательного исключения неизвестных

Этот метод заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру элементов находятся все остальные элементы

Решение СЛАУ в общем случае

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

Решение СЛАУ в общем случае

Рассмотрим для системы (1) матрицу системы A и расширенную матрицу $\overline{A}$, дополненную столбцом свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Решение СЛАУ в общем случае

Исследуем систему (1) на совместность

Теорема Кронекера-Капелли

Для того, чтобы система (1) была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы

$$r(A)=r(A)$$

Решение СЛАУ в общем случае

Из теоремы Кронекера-Капелли следует:

1. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система (1) несовместна, то есть не имеет решения.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (n – число неизвестных системы), то система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера.

3. Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Пример

Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$r(\overline{A}) = 3; r(A) = 2 \Rightarrow r(\overline{A}) \neq r(A)$$

система несовместна

Решение систем линейных неоднородных уравнений

Алгоритм построения общего решения неоднородной системы

1. Вычислить $r(A)$ и $r(\overline{A})$ и установить совместность системы (1). Пусть $r(A) = r(\overline{A}) = r$.
2. Выделим в матрице A базисный минор:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

(считаем, что он расположен в левом верхнем углу матрицы A)

Решение систем линейных неоднородных уравнений

3. Рассмотрим уравнения системы (1), соответствующие базисному минору. Их будет r.

4. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты которых соответствуют базисному минору, назовем базисными.
   Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ назовем свободными.

Решение систем линейных неоднородных уравнений

5. Запишем уравнения системы (1), соответствующие базисному минору, в виде: слагаемые с базисными переменными оставим в левой части, а слагаемые со свободными переменными перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решение систем линейных неоднородных уравнений

6. Обозначим свободные переменные

$$x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$$

Выразим базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ по формулам Крамера через параметры $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \\ x_2 = x_2(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \\ \ldots\ldots \\ x_r = x_r(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \end{cases}$$

Решение систем линейных неоднородных уравнений

В результате получим решение системы (1), которое называю общим решением системы.

Если придать свободным переменным конкретные числовые значения, то получим частное решение системы (1).

Пример

Найти общее и указать некоторое частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(\overline{A}) = 2; r(A) = 2 \Rightarrow r(\overline{A}) = r(A)$$

система совместна

Пример

Базисный минор:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 10 = -11 \neq 0$$

Система из двух уравнений, соответствующих базисному минору:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 - базисные переменные

x_3, x_4 - свободные переменные

Пример

Базисные переменные модели выразим через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные:

$$x_3 = c_1, x_4 = c_2$$

Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4c_1 - 3c_2 \\ 2x_1 - x_2 = -2c_1 + c_2 \end{cases}$$

Пример

Выразим базисные переменные по формулам Крамера через параметры c_1, c_2 .

Общее решение системы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4c_1-3c_2 & 5 \\ -2c_1+c_2 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}c_1 - \frac{8}{11}c_2 - \frac{1}{11}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4c_1-3c_2 \\ 2 & -2c_1+c_2 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}c_1 + \frac{7}{11}c_2 + \frac{2}{11}$$

Пример

Частное решение системы

$$c_1 = 0, c_2 = 2$$

$$x_1 = -\frac{16}{11} - \frac{1}{11} = -\frac{17}{11}$$

$$x_1 = \frac{14}{11} + \frac{2}{11} = \frac{16}{11}$$