



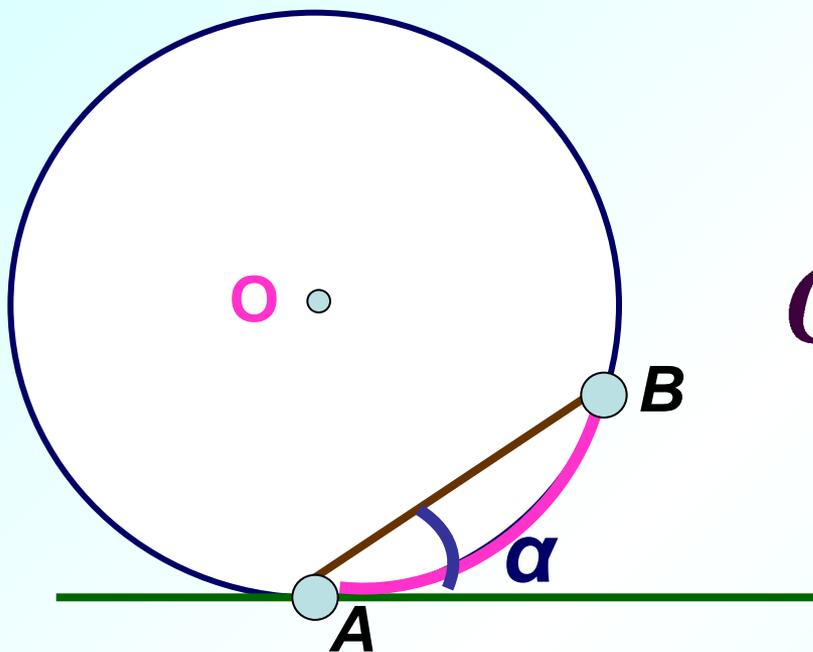
# Центральные & класс

## и вписанные углы

Л.С. Атанасян

Геометрия 7-9

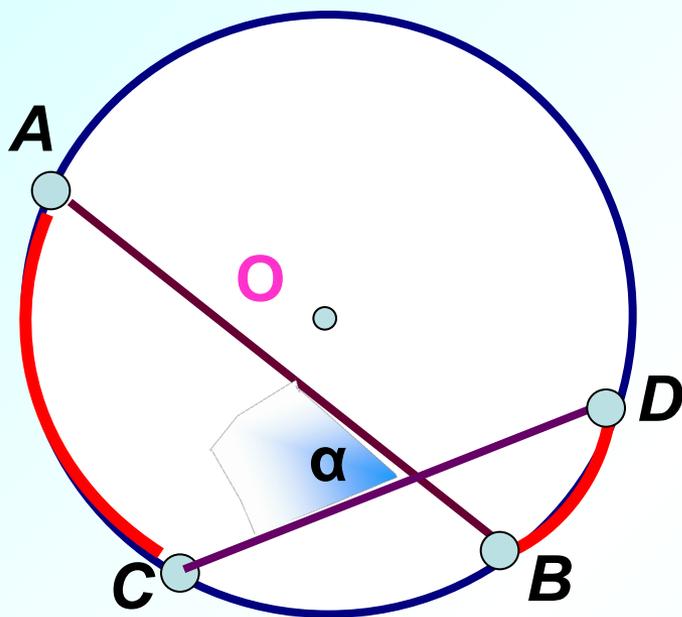
## Угол между касательной и хордой



$$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$$

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется **половиной** заключенной в нем дуги

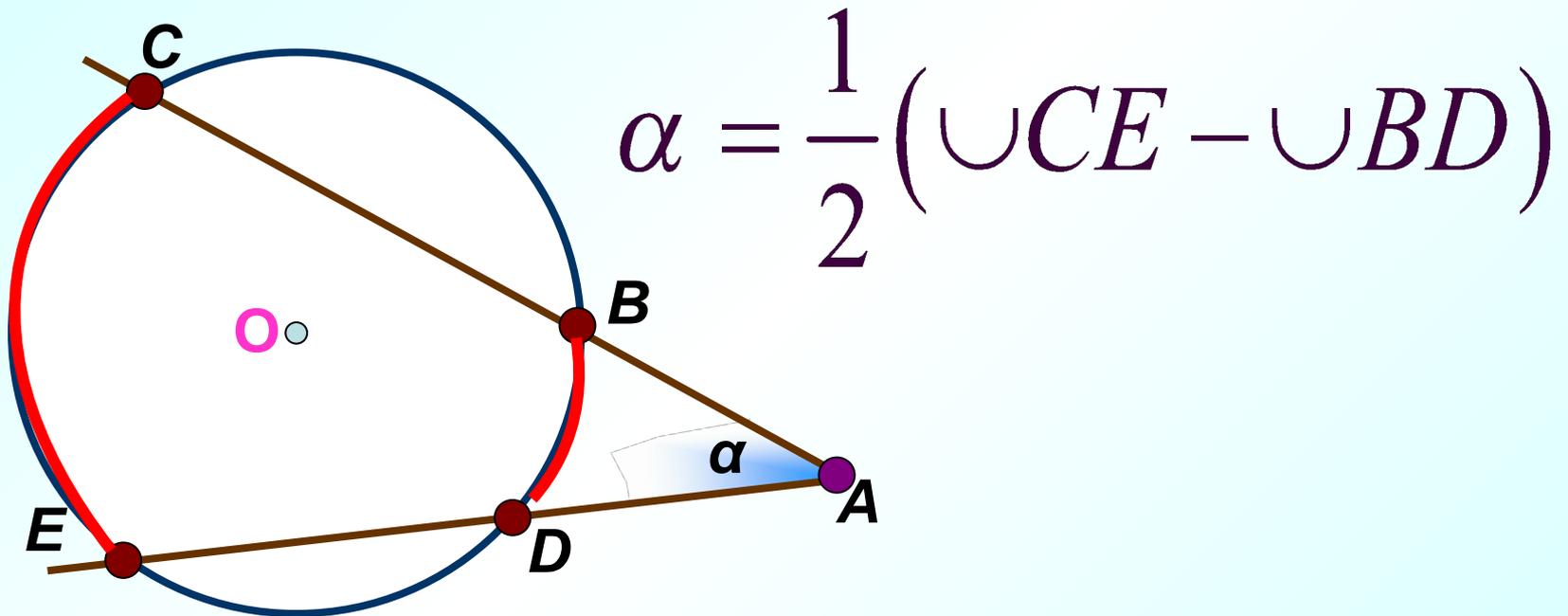
**Угол между двумя  
пересекающимися хордами**



$$\alpha = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$$

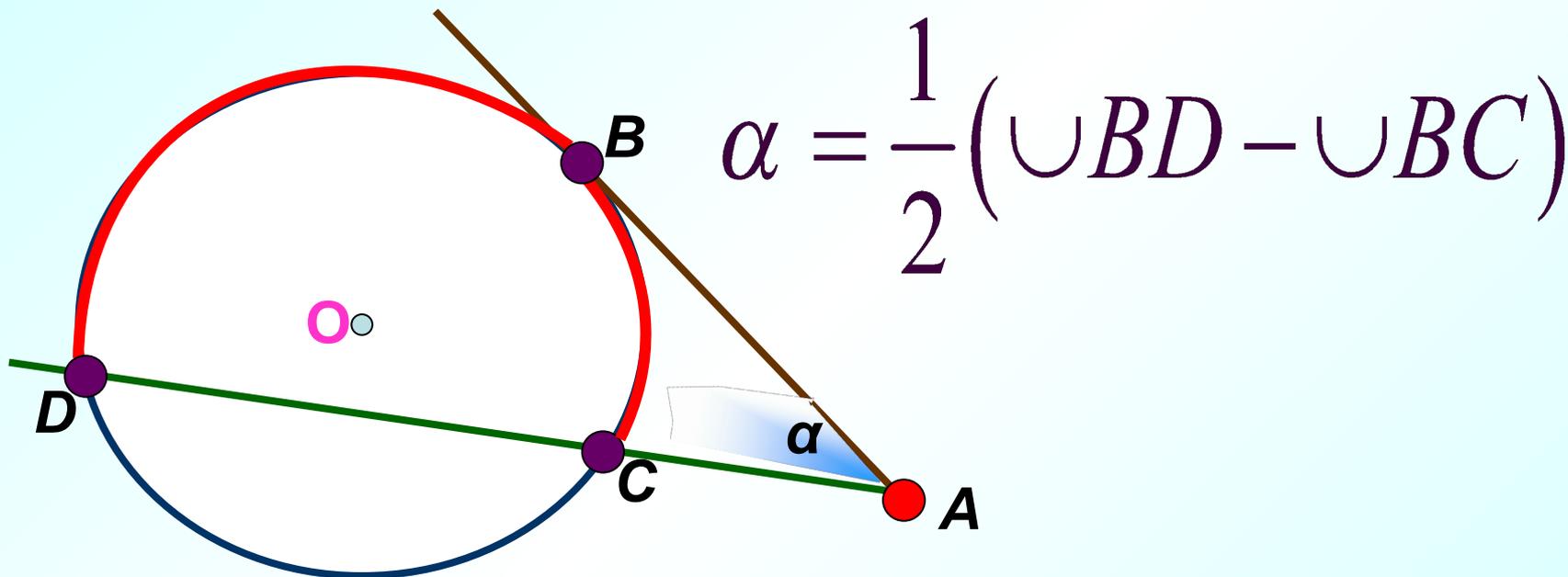
Угол между двумя пересекающимися хордами измеряется **полусуммой** заключенных между ними дуг

Угол между двумя секущими,  
проведенными из одной точки



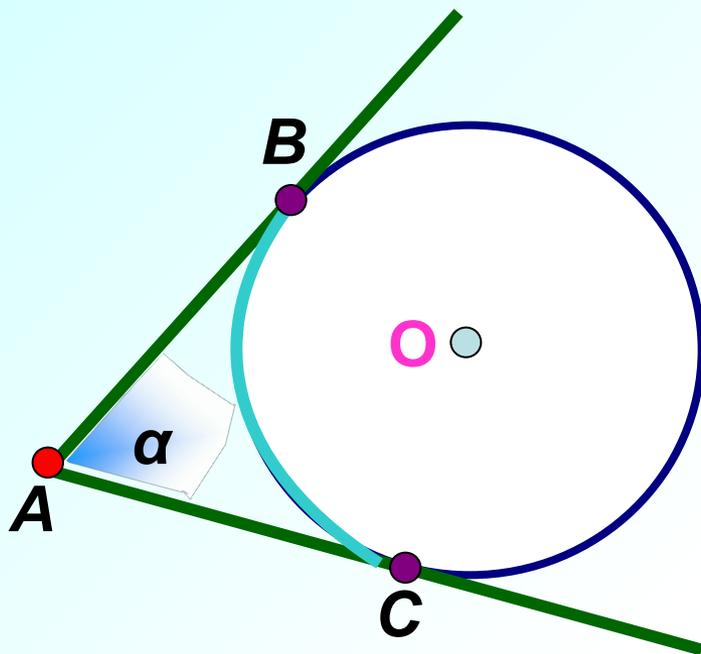
Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, измеряется **полуразностью** заключенных внутри него дуг

Угол между касательной и секущей,  
проведенными из одной точки



Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, измеряется **полуразностью** заключенных внутри него дуг

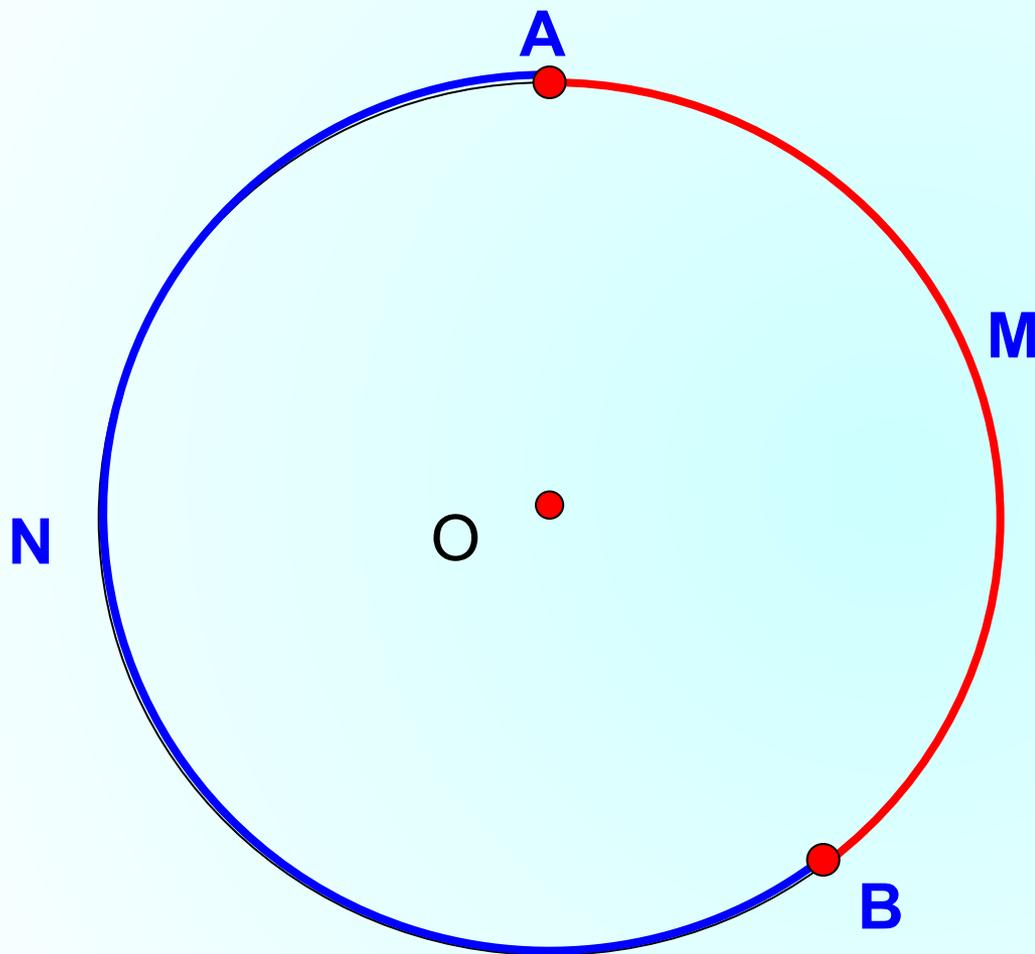
Угол между двумя касательными,  
проведенными из одной точки



$$\alpha = 180^{\circ} - \cup BC$$

Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен  $180^{\circ}$  минус величина заключенной внутри него дуги, меньшей полуокружности.

# Дуга окружности

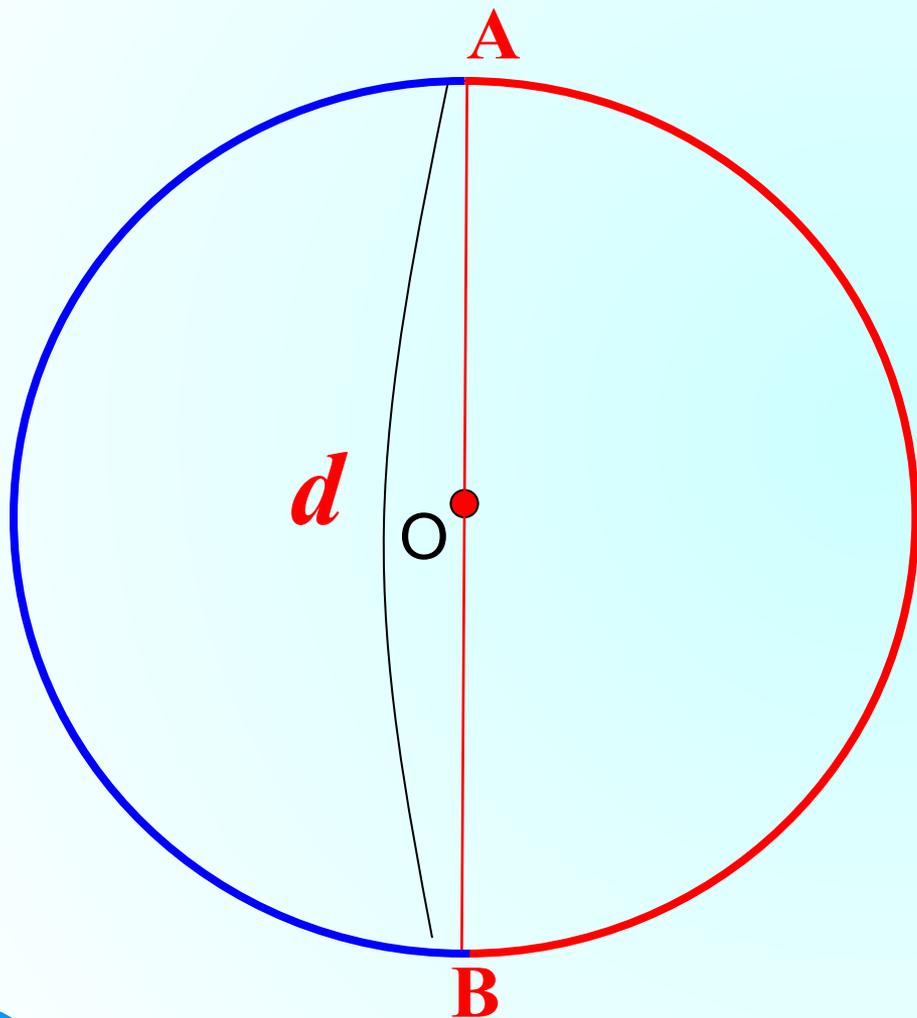


$\cup AB$

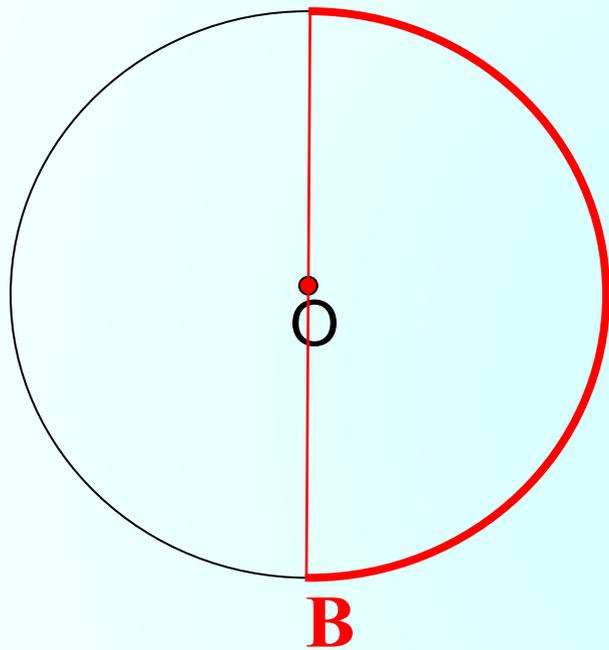
$\cup AMB$

$\cup ANB$

Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности.

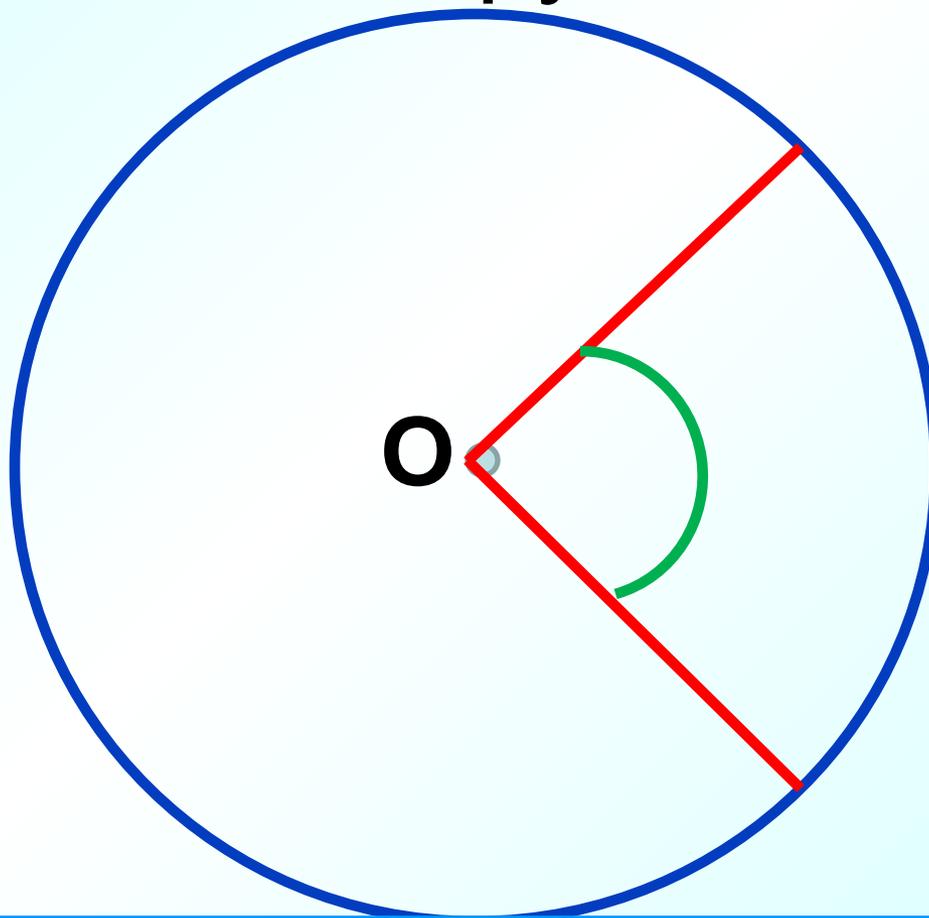
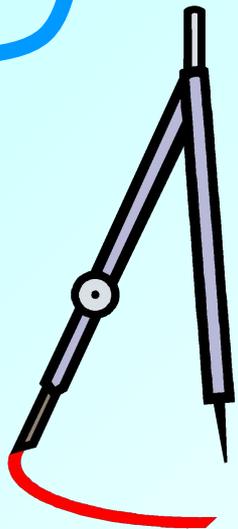


$$\cup AB = \angle AOB = 180^{\circ}$$



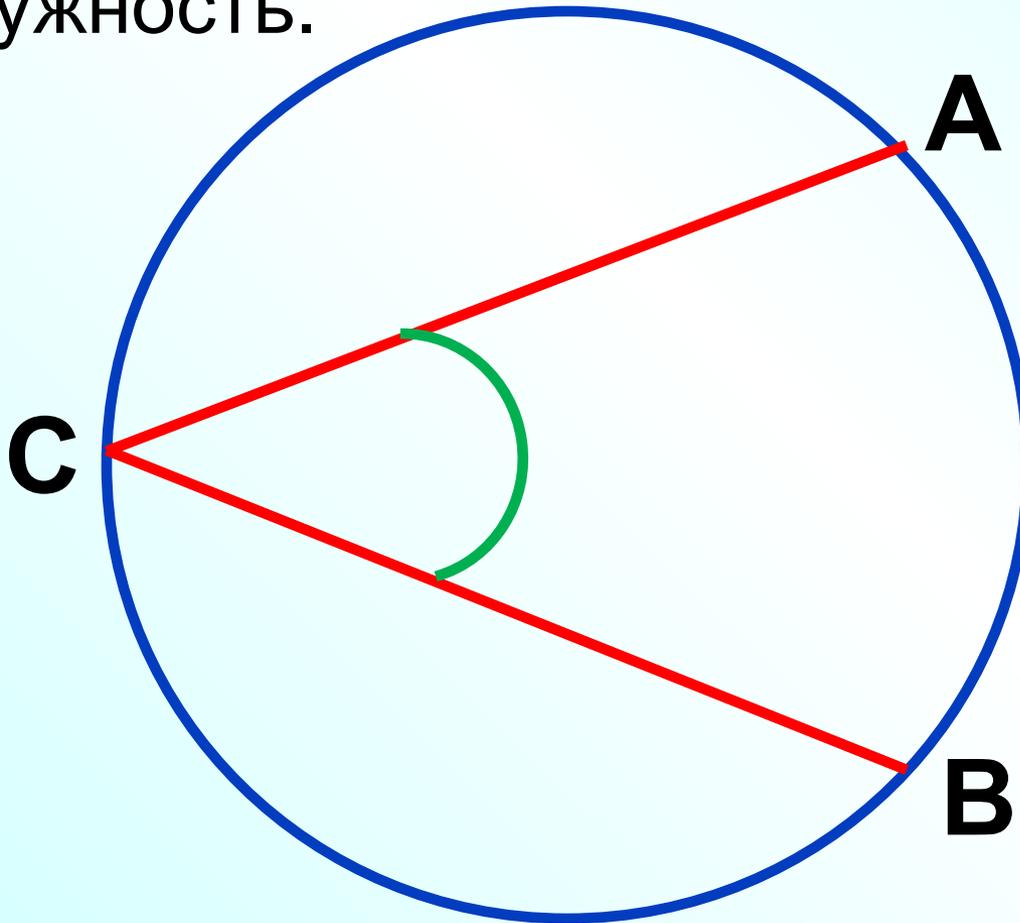
# Центральный угол

Это угол с вершиной в центре окружности.



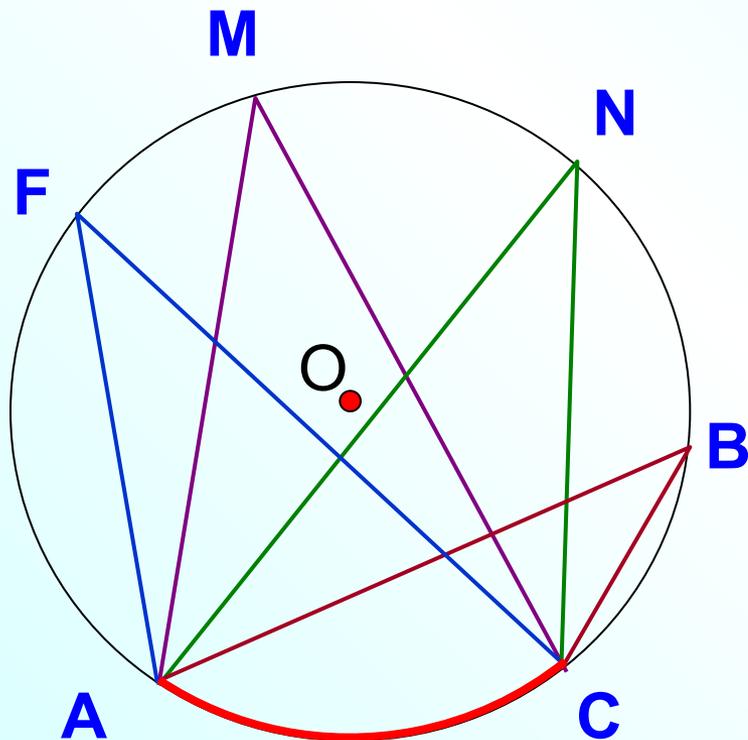
# Вписанный угол

Это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.



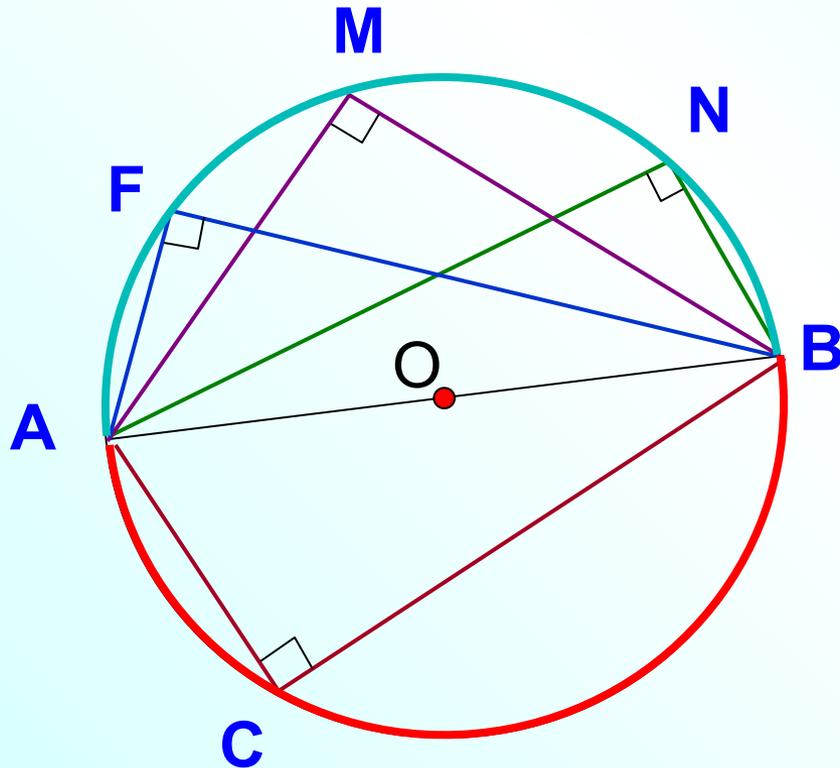
## Следствие 1

Вписанные углы,  
опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



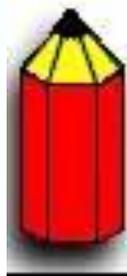
## Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.

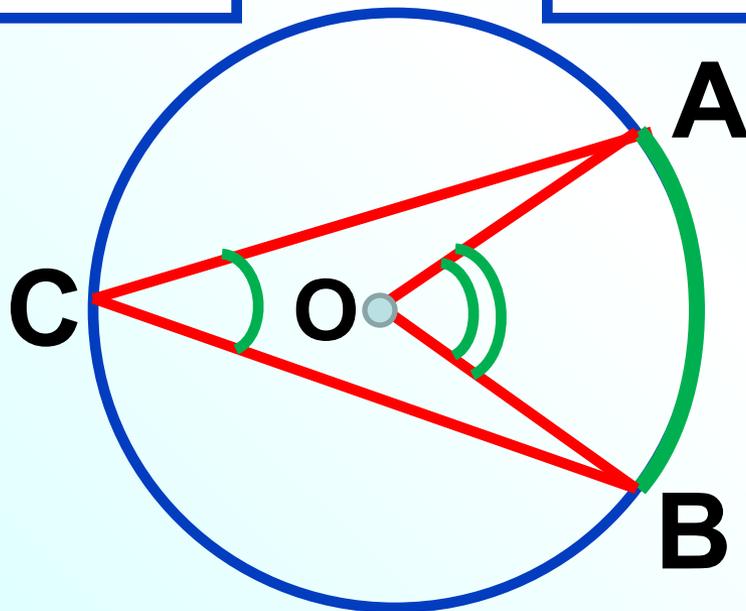


# Теорема о вписанном угле

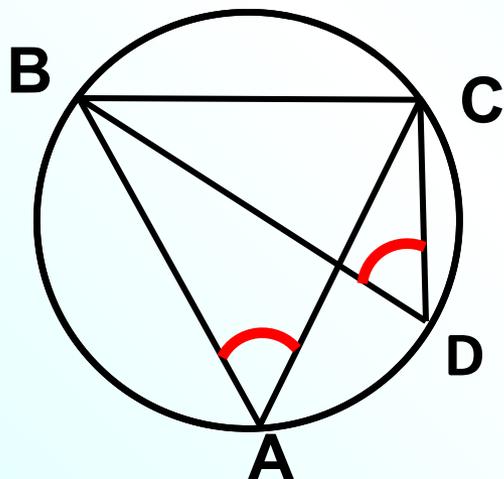
Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего ему центрального угла.



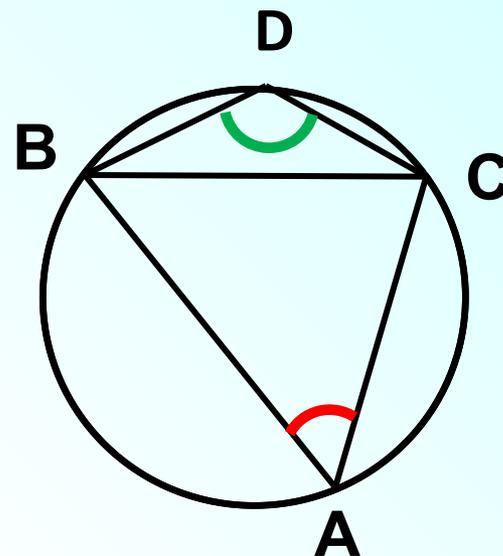
Угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается.



## Необходимо знать.



Вписанные углы,  
опирающиеся  
на одну хорду равны, если  
они  
лежат по одну сторону  
хорды.

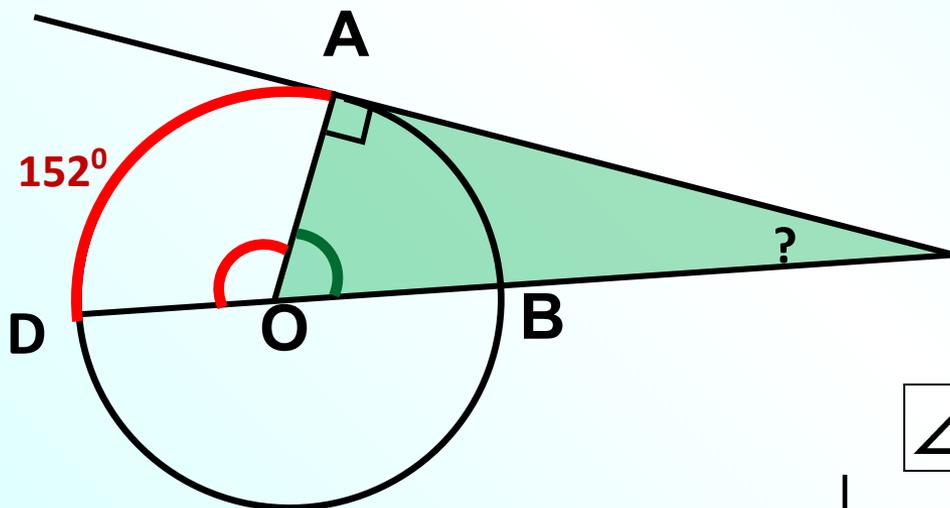


Вписанные углы,  
опирающиеся  
на одну хорду в сумме  
составляют  $180^{\circ}$ , если они  
лежат по разные стороны  
хорды.

# Тренажер



№1. Найдите угол АСО, если его сторона СА касается окружности, О — центр окружности, а большая дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна  $152^\circ$ .  
 Ответ дайте в градусах.



$$\angle OAC = 90^\circ$$

OA — радиус,  
 проведенный  
 в точку  
 касания.

Решени

$$\angle AOD = \cup AD = 152^\circ$$

с Так как угол AOD —  
 центральный и  
 опирается

$$\angle AOD \text{ на дугу } AD, \angle AOD = 28^\circ$$

Так как

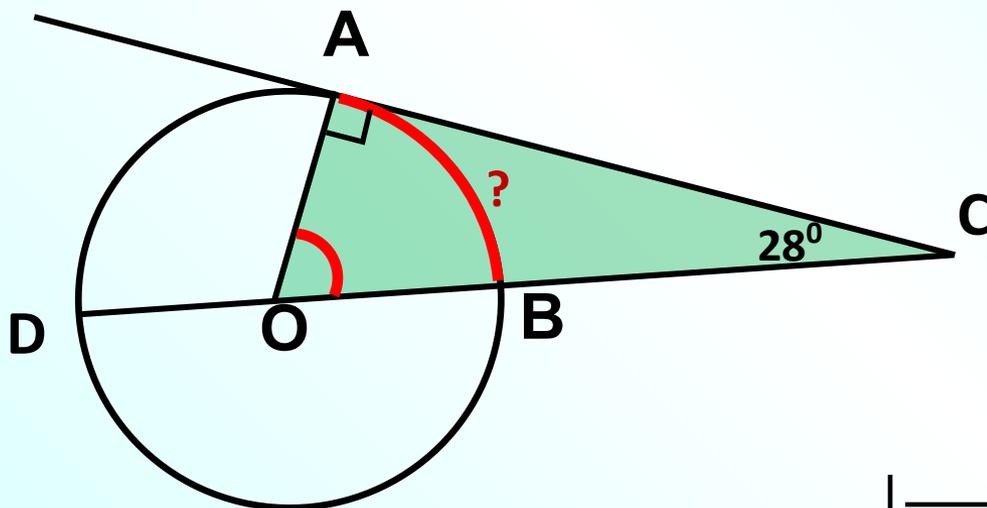
смежные  
 Из треугольника

$$\angle AOC := 180^\circ - \angle AOD - \angle OAC =$$

$$= 180^\circ - 28^\circ - 90^\circ = 62^\circ$$

Ответ :  $62^\circ$

№2. Угол  $ACO$  равен  $28^\circ$ , где  $O$  — центр окружности. Его сторона  $CA$  касается окружности. Найдите величину меньшей дуги  $AB$  окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



Решени

$$\angle OAC = 90^\circ$$

Так как  $OA$  — радиус, проведенный в точку касания.

Из треугольника

$AOC$ :

$$\angle AOC = 180^\circ - \angle ACO - \angle OAC =$$

$$= 180^\circ - 28^\circ - 90^\circ =$$

$$= 62^\circ$$

$$\cup AB = \angle AOB = 62^\circ$$

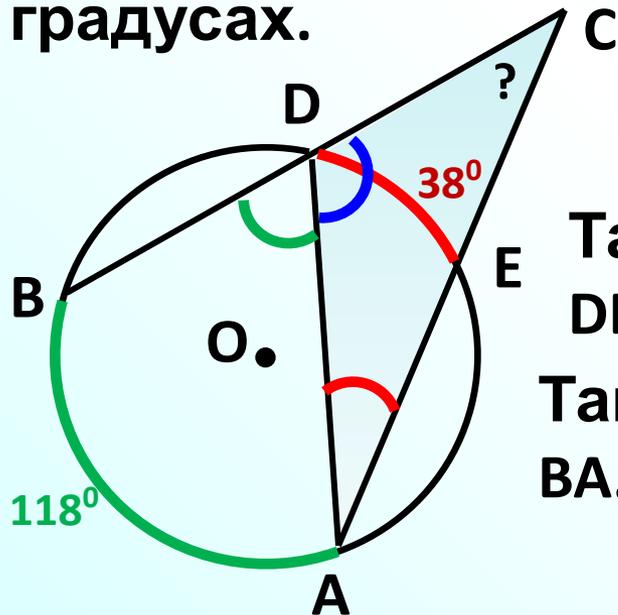
Так как угол  $AOB$

—

центральный.

Ответ :  $62^\circ$

№3. Найдите угол  $ACB$ , если вписанные углы  $ADB$  и  $DAE$  опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно  $118^\circ$  и  $38^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



Из треугольника  $ADC$ :

Решени

$$\angle DAE = \cup DE : 2 = 19^\circ$$

Так как  $\angle DAE$  – вписанный и опирается на дугу  $DE$ .

$$\angle BDA = \cup BA : 2 = 59^\circ$$

Так как  $\angle BDA$  – вписанный и опирается на дугу  $BA$ .

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDA = 121^\circ$$

Так как

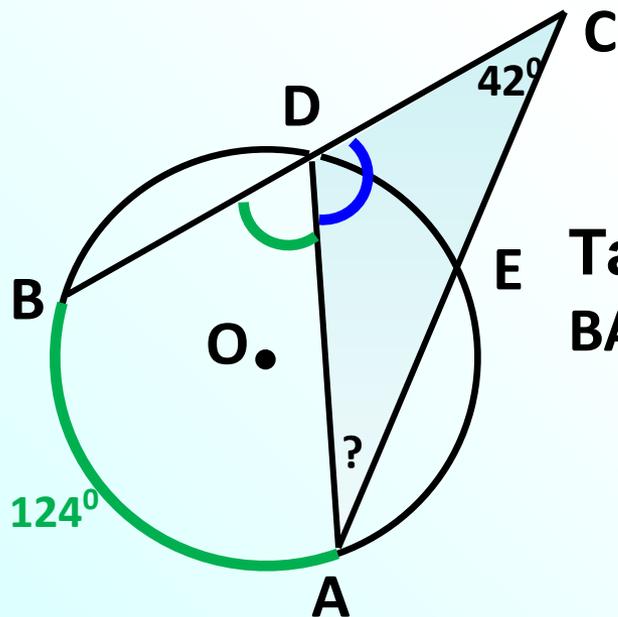
смежные.

$$\angle ACD = \angle ACB = 180^\circ - \angle DAC - \angle CDA =$$

$$= 180^\circ - 19^\circ - 121^\circ = 40^\circ$$

Ответ :  $40^\circ$

№4. Угол  $ACB$  равен  $42^\circ$ . Градусная величина дуги  $AB$  окружности, не содержащей точек  $D$  и  $E$ , равна  $124^\circ$ . Найдите угол  $DAE$ . Ответ дайте в градусах.



Решени

$$\angle BDA = \overset{\frown}{BA} : 2 = 62^\circ$$

Так как  $\angle BDA$  – вписанный и опирается на дугу  $BA$ .

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDA = 118^\circ$$

Так как смежные.

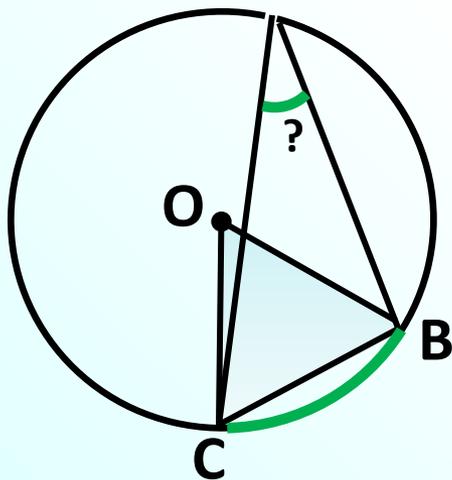
Из треугольника  $ADC$ :

$$\angle DAC = \angle DAE = 180^\circ - \angle DCA - \angle ADC =$$

$$= 180^\circ - 42^\circ - 118^\circ = 20^\circ$$

Ответ :  $20^\circ$

№5. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах



Решени

Рассмотрим треугольник

$\triangle OCB$   
 $OC=OB$  так как радиусы одной  
 окружности  $OC=OB$  по

условию  $\Rightarrow$  Треугольник  $OCB$  –

равносторонний. Величина дуги

$\angle COB = 60^\circ$   $\widehat{BC} = 60^\circ$

Так как угол  $\angle COB$  – центральный и опирается на дугу  $BC$ .

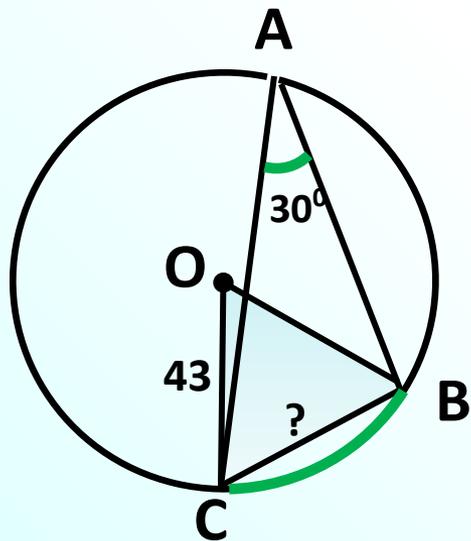
$$\Rightarrow \angle CAB = \widehat{BC} : 2 = 30^\circ$$

Так как – вписанный и опирается на дугу  $BC$ .

Ответ :  $30^\circ$

№6. Найдите хорду, на которую опирается угол  $30^\circ$ , вписанный в окружность радиуса 43.

Решени



$$\overset{\text{е:}}{\cup BC} \cdot 2 = 60^\circ$$

Так как угол  $\text{CAB}$  – вписанный

и опирается на дугу  $\text{BC}$ .

Так как угол  $\text{COB}$  –

$$\angle \text{COB} = \cup \text{BC} = 60^\circ$$

центральный

и опирается на дугу  $\text{BC}$

Рассмотрим треугольник

$\text{OCB}$  так как радиусы одной окружности.

$\Rightarrow$  Треугольник  $\text{OCB}$  – равнобедренный.

$\Rightarrow$

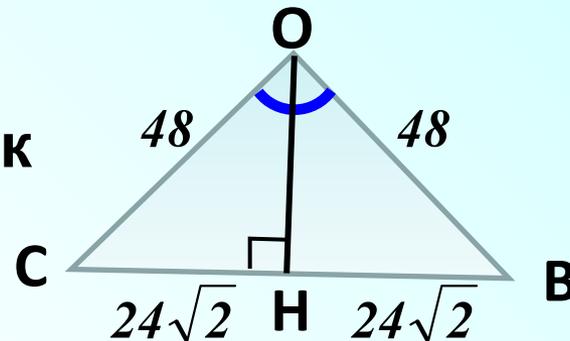
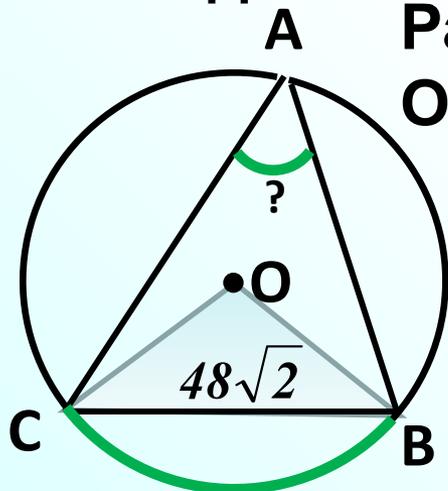
$$\text{CB} = 43$$

Ответ : 43

№7. Радиус окружности равен 48. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную  $48\sqrt{2}$ .

Решение  
 Ответ дайте в градусах.

Рассмотрим треугольник ОСВ.



По теореме Пифагора из треугольника

СОН:

$$OH = \sqrt{48^2 - (24\sqrt{2})^2} = \sqrt{24^2 \cdot 2^2 - 24^2 \cdot 2} =$$

$$= \sqrt{24^2 (2^2 - 2)} = 24\sqrt{2}$$

⇒ Треугольник ОСН

равнобедренный угол  $\angle COH = 45^\circ$

прямоугольный угол  $\angle COB = 90^\circ$

$$\angle CAB = \angle CCB : 2 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CCB = 90^\circ$$

Так как – вписанный и опирается на дугу

ВА.

Ответ :  $45^\circ$

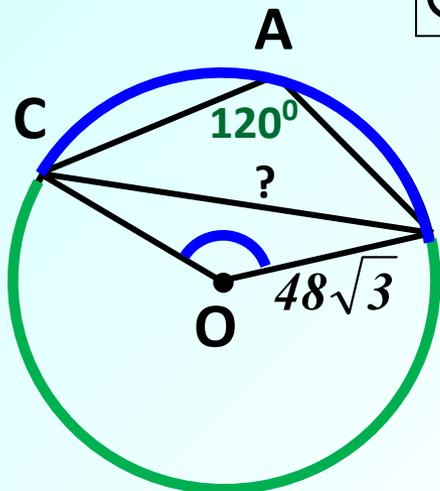
№8. Найдите хорду, на которую опирается угол  $120^\circ$ , вписанный в окружность радиуса  $48\sqrt{3}$ .

Решени

Так как на дугу СВ  
опирается  
вписанный

$$\cup CB = \angle CAB \cdot 2 = 240^\circ$$

$$\cup CAB = 360^\circ - \cup CB = 120^\circ \Rightarrow \angle COB = 120^\circ$$



Рассмотрим треугольник  
OCB. – OH –

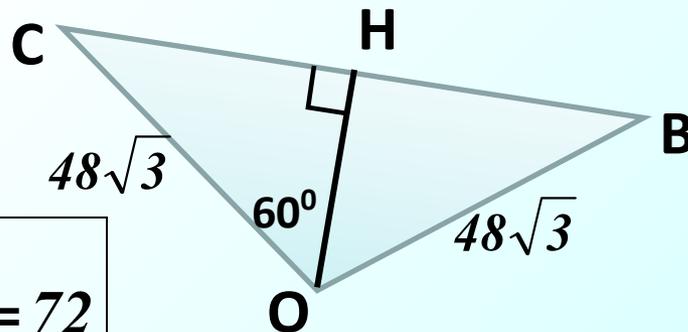
высота.  
Из треугольника

COH:

$$CH = CO \cdot \sin COH =$$

$$48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

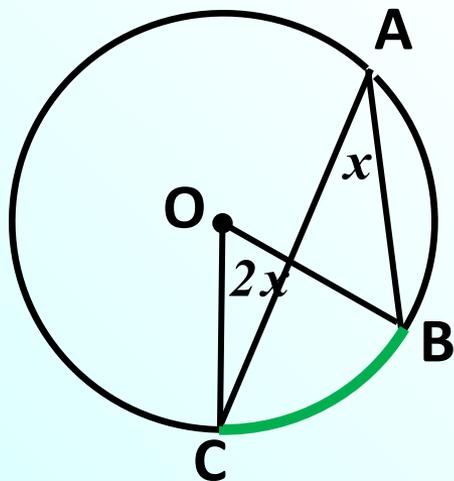
$$CB = CH \cdot 2 = 144$$



В решении использовано  
свойство равнобедренного  
треугольника

Ответ : 144

№9. Центральный угол на  $36^{\circ}$  больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Решени

$$\angle COB = \cup CB$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CB$$

$$\Rightarrow \angle COB = 2 \angle CAB$$

Пусть :  $\angle CAB = x$  , тогда :  $\angle COB = 2x$ .

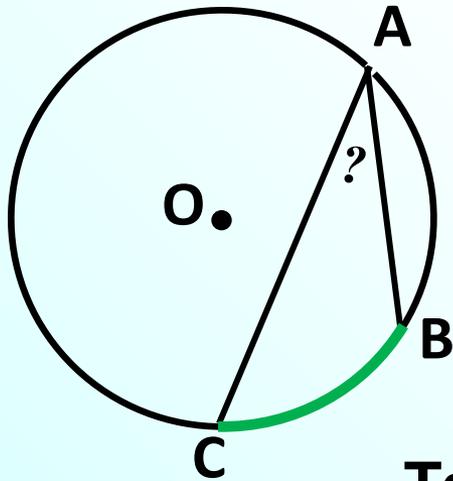
По условию :  $\angle COB - \angle CAB = 36^{\circ}$

$$2x - x = 36^{\circ}$$

$$x = 36^{\circ} = \angle CAB$$

Ответ :  $36^{\circ}$

№10. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет  $\frac{1}{5}$  окружности. Ответ дайте в градусах.



Решени

е:

$$\cup CB = \frac{1}{5} \cdot 360^{\circ} = 72^{\circ}$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CB = 36^{\circ}$$

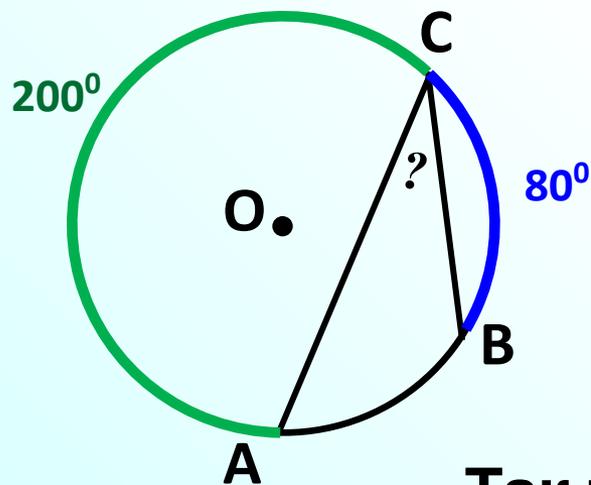
Так как – вписанный и опирается на дугу СВ.

Ответ :  $36^{\circ}$

№11. Дуга окружности  $AC$ , не содержащая точки  $B$ , составляет  $200^\circ$ . А дуга окружности  $BC$ , не содержащая точки  $A$ , составляет  $80^\circ$ . Найдите вписанный угол  $ACB$ .  
Ответ дайте в градусах.

Решени

е:



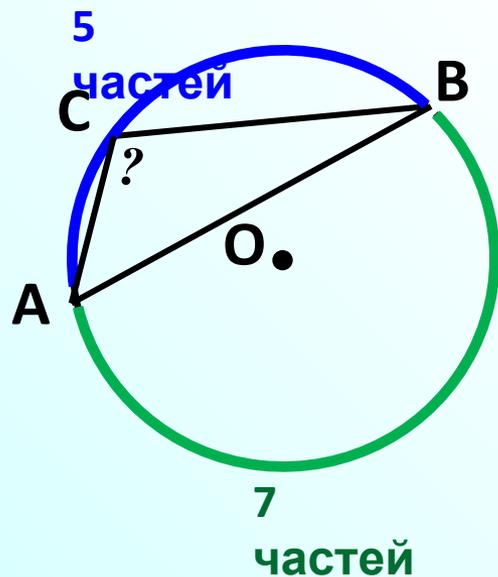
$$\cup AB = 360^\circ - \cup AC - \cup CB = 80^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 40^\circ$$

Так как  $\angle ACB$  – вписанный и опирается на дугу  $AB$ .

Ответ :  $40^\circ$

№12. Хорда  $AB$  делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки  $C$ , принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



**Решени**

Пусть  $x$  — одна часть.

Тогда  $\cup AB = 7x$ ,  $\cup ACB = 5x$ .

$$7x + 5x = 360^{\circ}$$

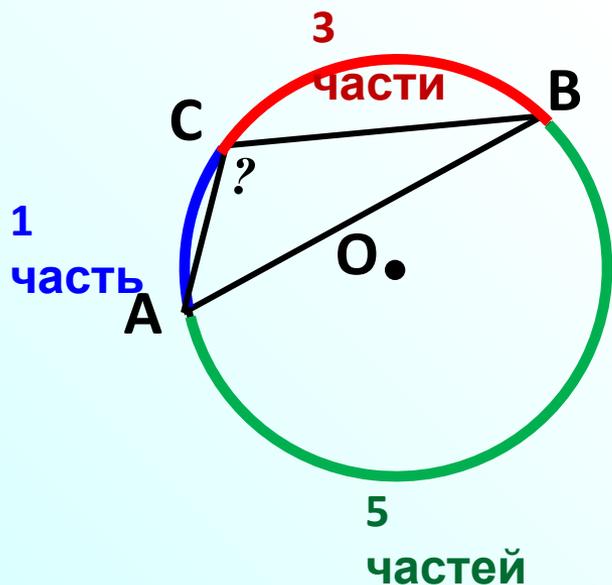
$$x = 30^{\circ} \quad \cup AB = 210^{\circ}$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 105^{\circ}$$

Так как — вписанный и опирается на дугу  $AB$ .

**Ответ :  $105^{\circ}$**

№13. Точки  $A, B, C$ , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника  $ABC$ .  
 Ответ дайте в градусах.



### Решени

Пусть  $x$  — одна часть.

Тогда  $\cup AB = 5x$ ,  $\cup CB = 3x$ ,  $\cup AC = x$ .

$$3x + 5x + x = 360^{\circ}$$

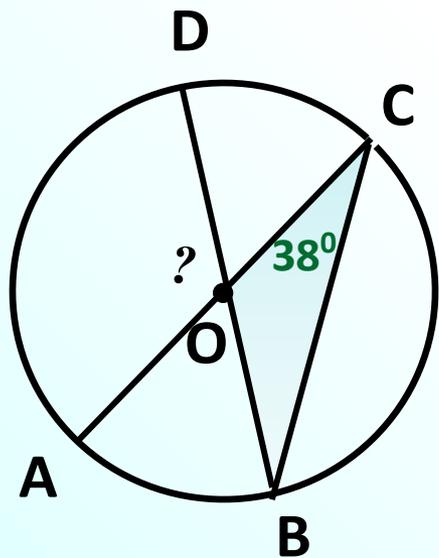
$$x = 40^{\circ} \quad \cup AB = 200^{\circ}$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 100^{\circ}$$

Так как  $\angle C$  — вписанный и опирается на дугу  $AB$ .

Ответ :  $100^{\circ}$

№14. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен  $38^{\circ}$ . Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Решени

е:  
Треугольни<sup>к</sup> OCB равнобедренный так как OC и OB радиусы одной окружности  $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 38^{\circ}$ .

$$\Rightarrow \angle BOC = 180^{\circ} - \angle OCB - \angle OBC =$$
$$= 104^{\circ}$$

$$\angle AOD = \angle COB = 104^{\circ}$$

Так как –  
вертикальные.

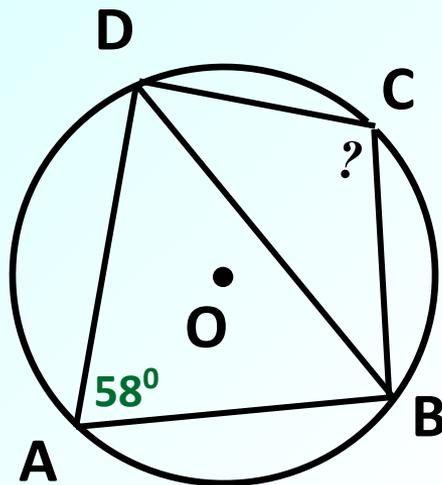
Ответ :  $104^{\circ}$

№15. Угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, равен  $58^\circ$ . Найдите угол  $C$  этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

Решени

е:

Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же хорду, в сумме составляют  $180^\circ$ , если их вершины лежат по разные стороны от этой хорды.

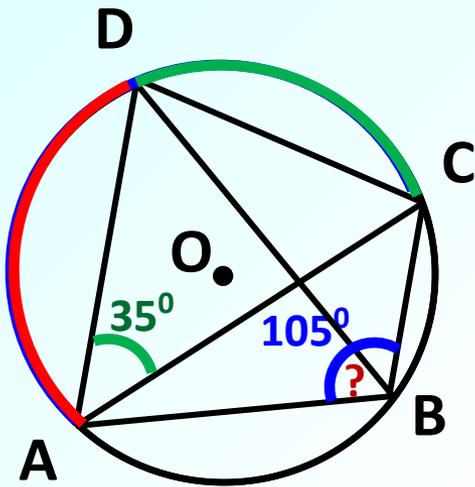


$$\Rightarrow \angle C = 180^\circ - \angle A = 122^\circ$$

Ответ :  $122^\circ$

№16. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен  $105^{\circ}$ , угол CAD равен  $35^{\circ}$ . Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Решени



$$\cup ADC = 2 \cdot \angle ABC = 210^{\circ}$$

Так как угол ABC – вписанный и опирается на дугу ADC.

$$\cup DC = 2 \cdot \angle CAD = 70^{\circ}$$

Так как угол CAD – вписанный и опирается на дугу DC.

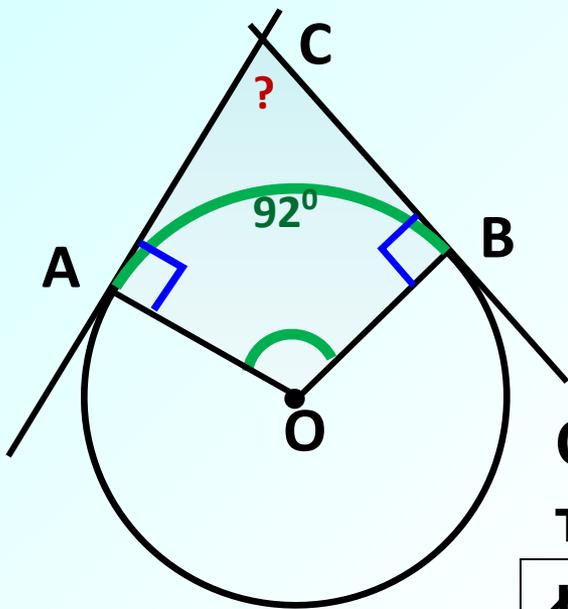
$$\cup AD = \cup ADC - \cup DC = 140^{\circ}$$

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = 70^{\circ}$$

Так как угол ABD – вписанный и опирается на дугу AD.

Ответ :  $70^{\circ}$

№19. Через концы А, В дуги окружности в  $62^\circ$  проведены касательные АС и ВС. Найдите угол АСВ. Ответ дайте в градусах.



Решени

е: Так как угол АОВ –  
центральный и  
опирается на дугу

$$\angle AOB = 92^\circ$$

$$\angle OBC = \angle OAC = 90^\circ$$

Свойство радиуса, проведенного в  
точку  
касания

$$\angle ACB = 360^\circ - \angle AOB - \angle OAC - \angle OBC =$$

$$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

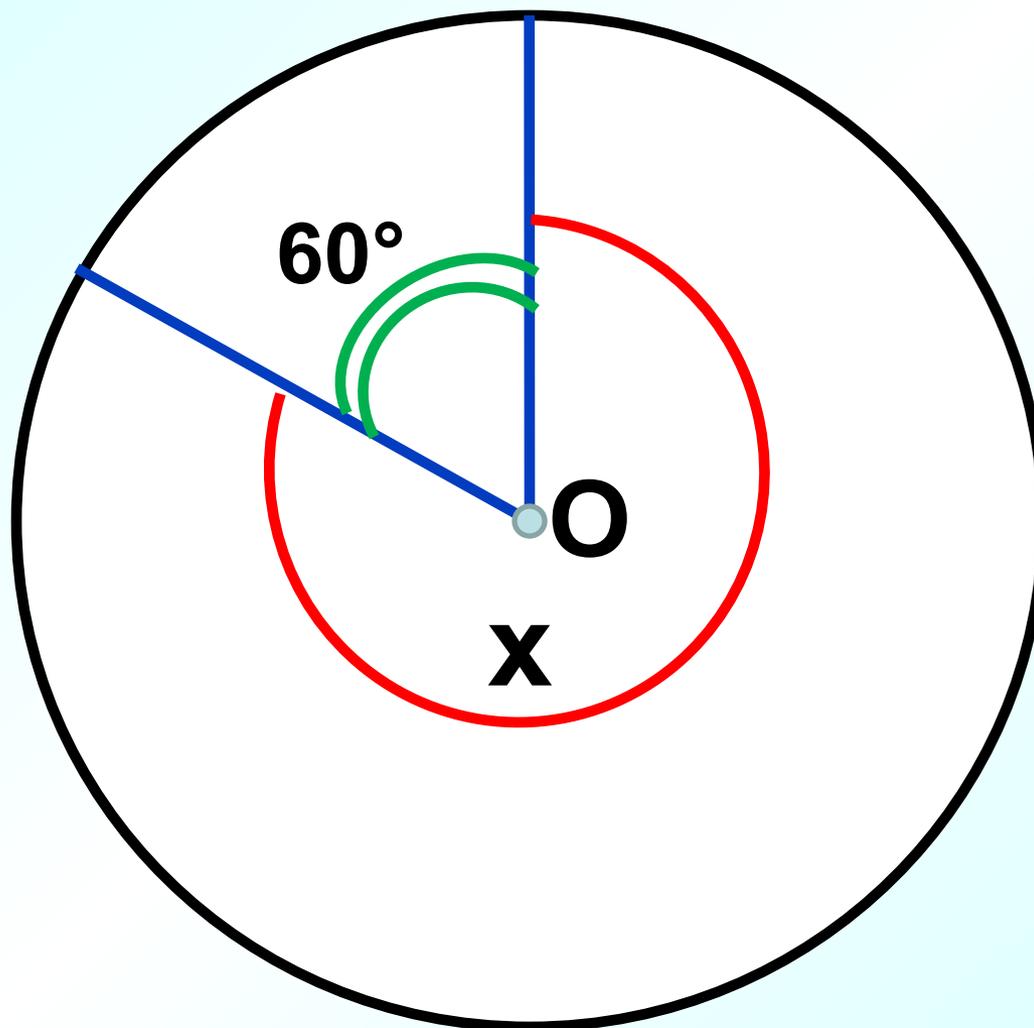
Так как сумма углов четырехугольника =  $360^\circ$ .

Ответ :  $88^\circ$

# Решение упражнений

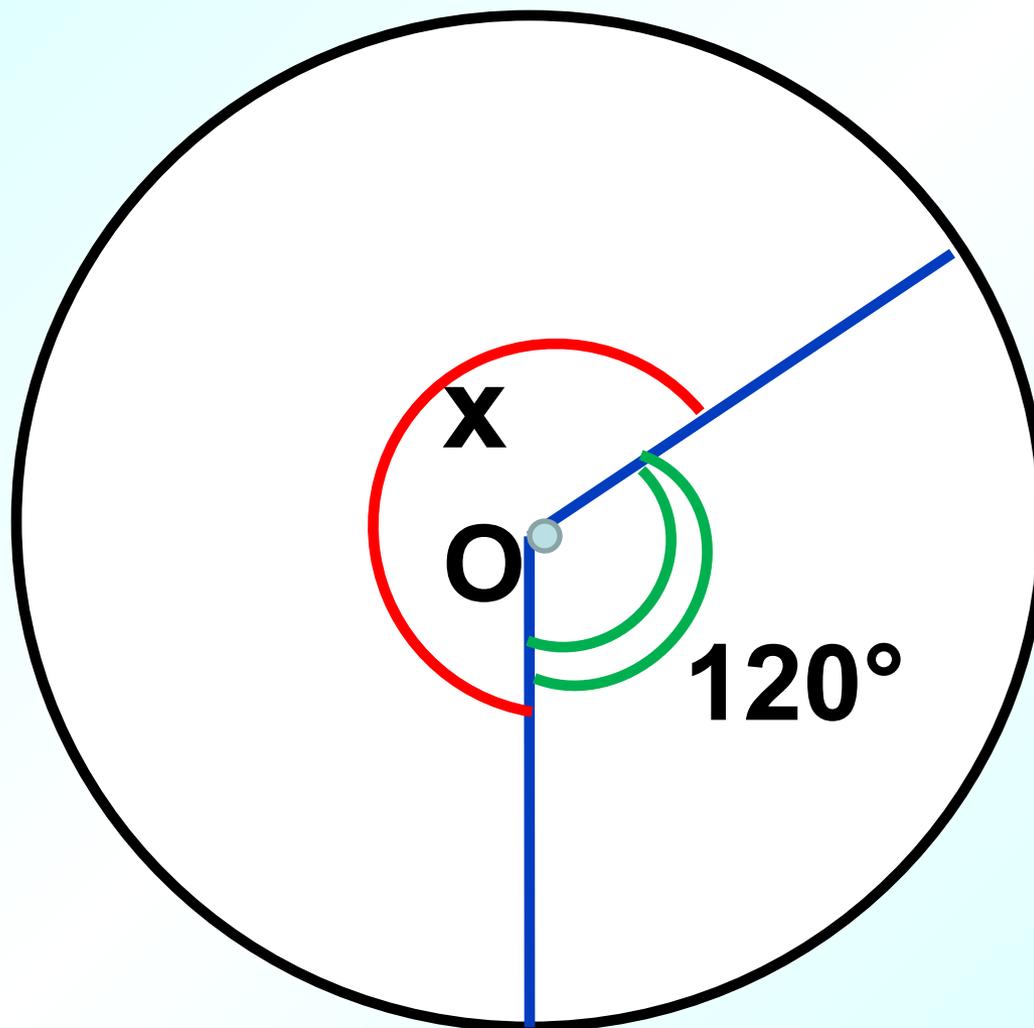


Найдите  $X$



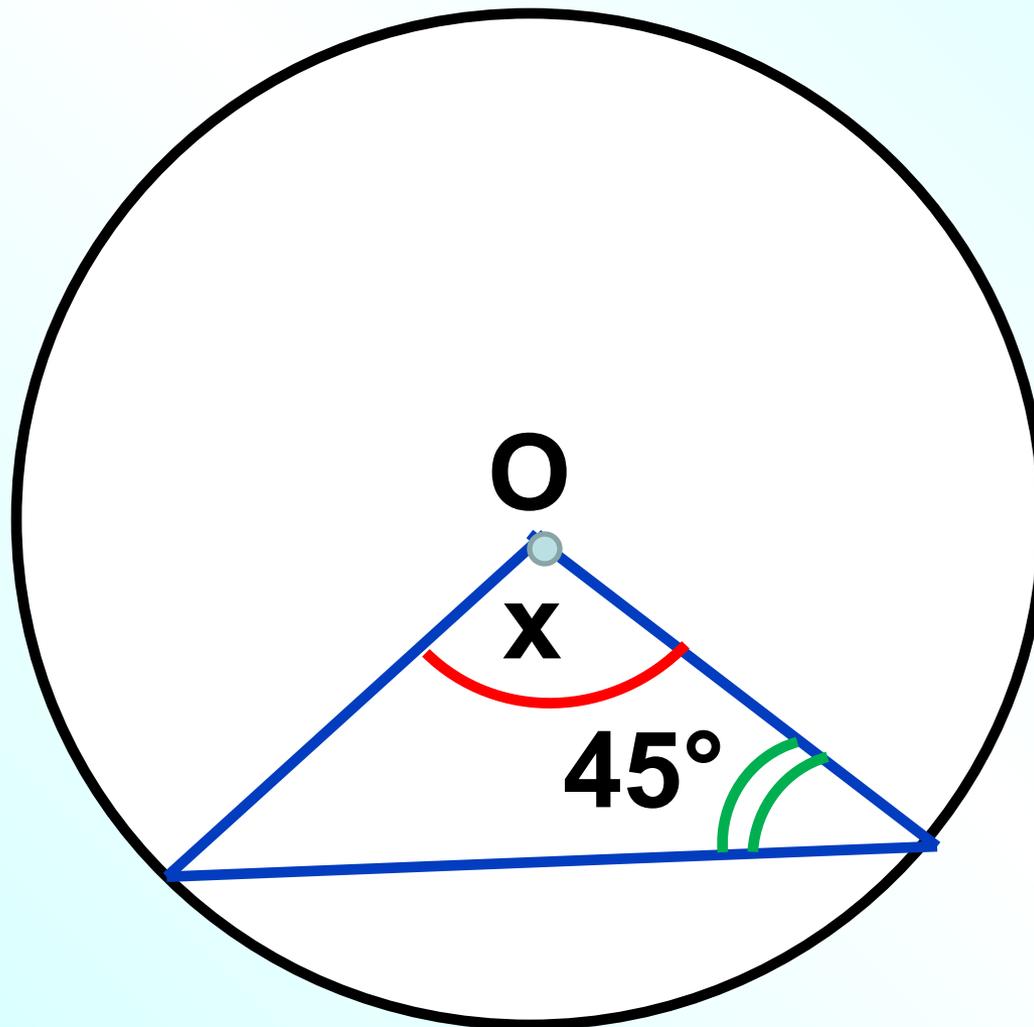
$300^\circ$

Найдите  $X$



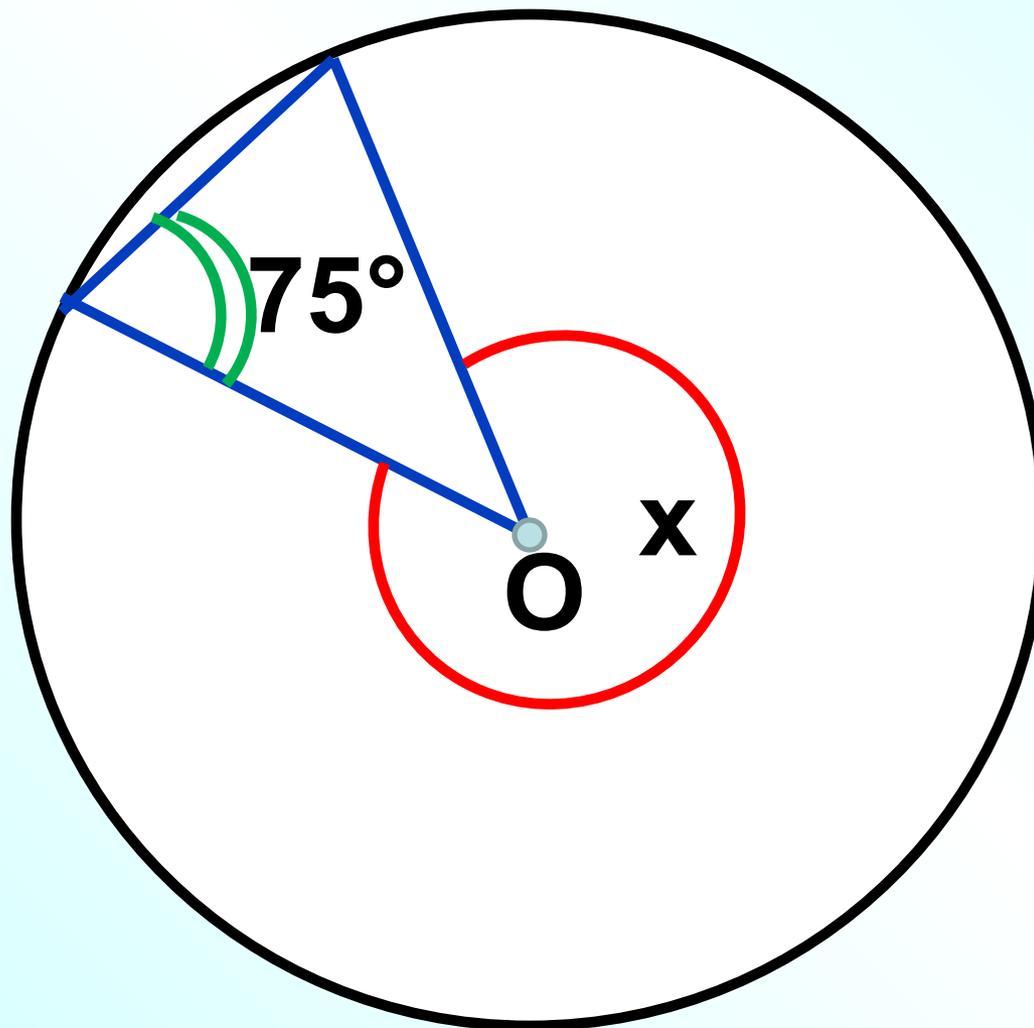
$240^\circ$

Найдите  $X$



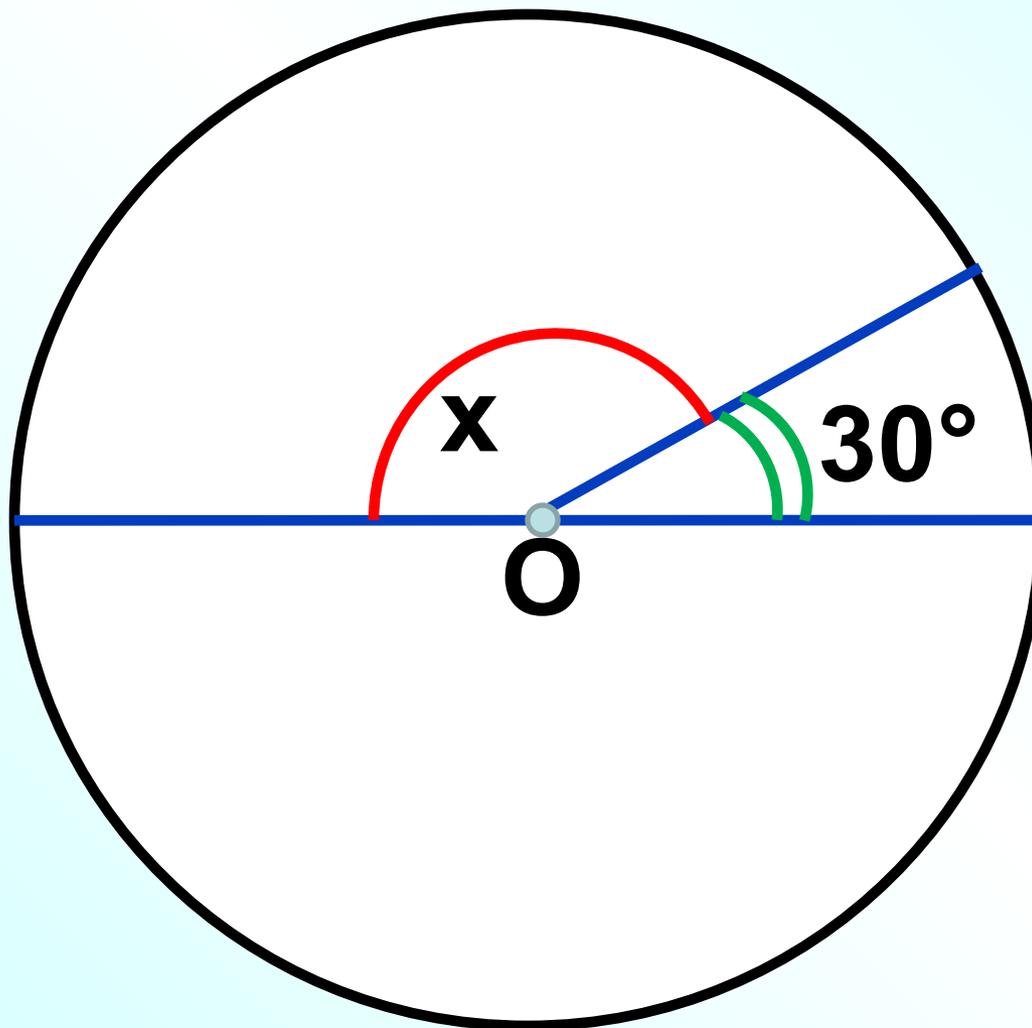
$90^\circ$

Найдите  $X$



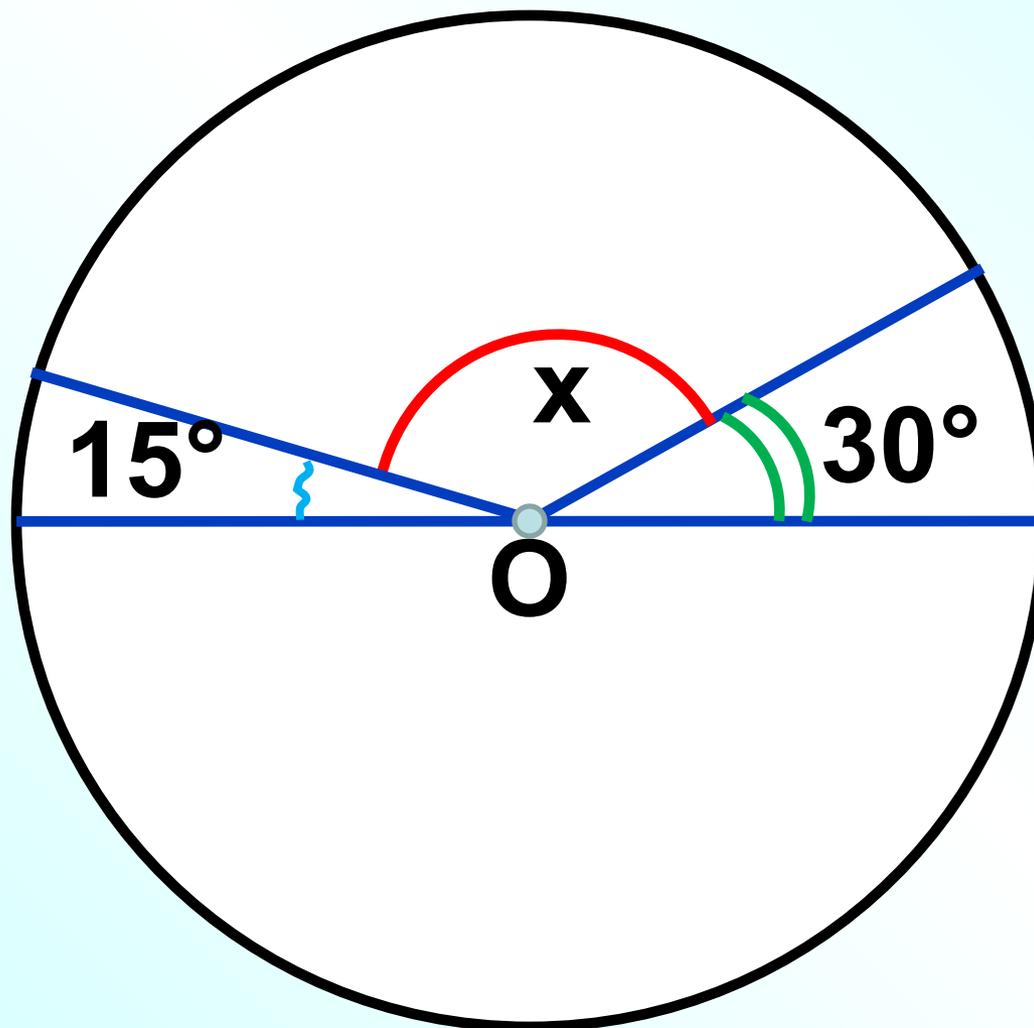
$330^\circ$

Найдите  $X$



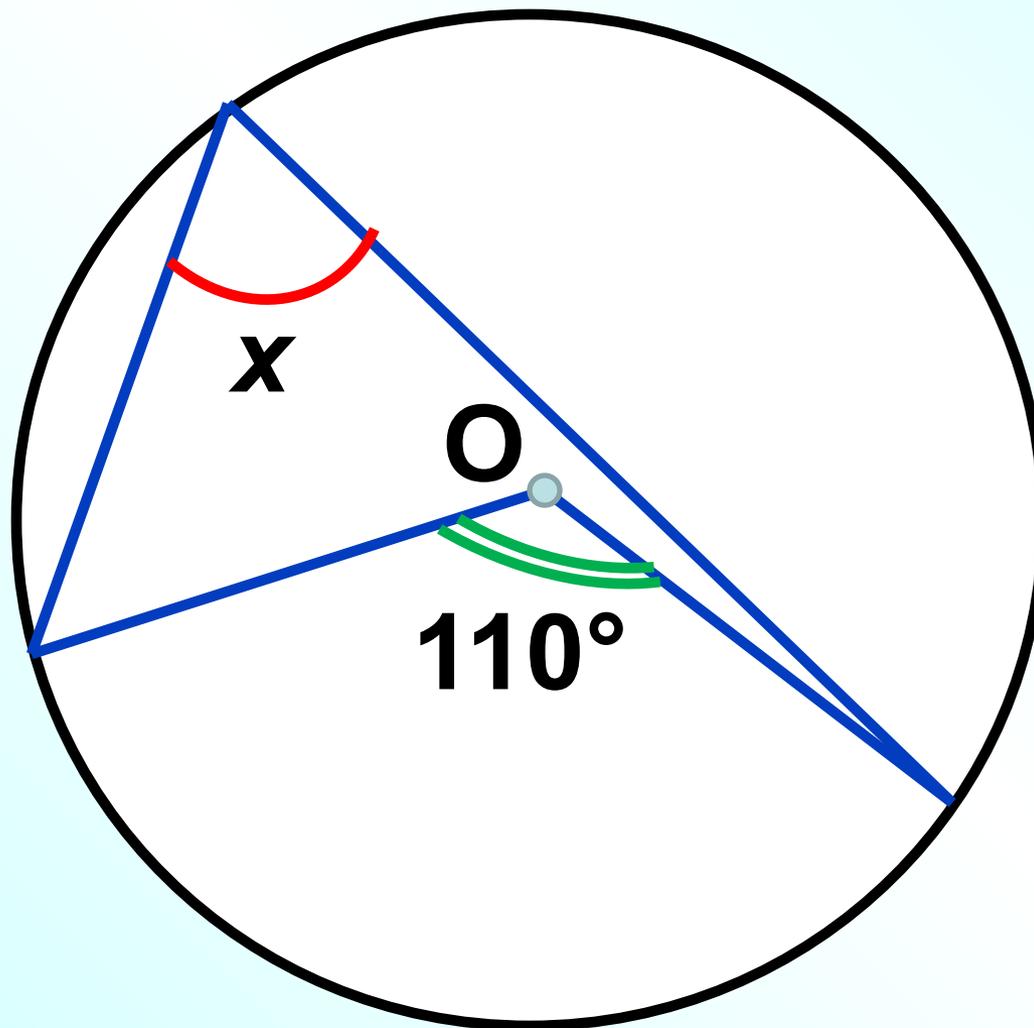
$150^\circ$

Найдите  $X$



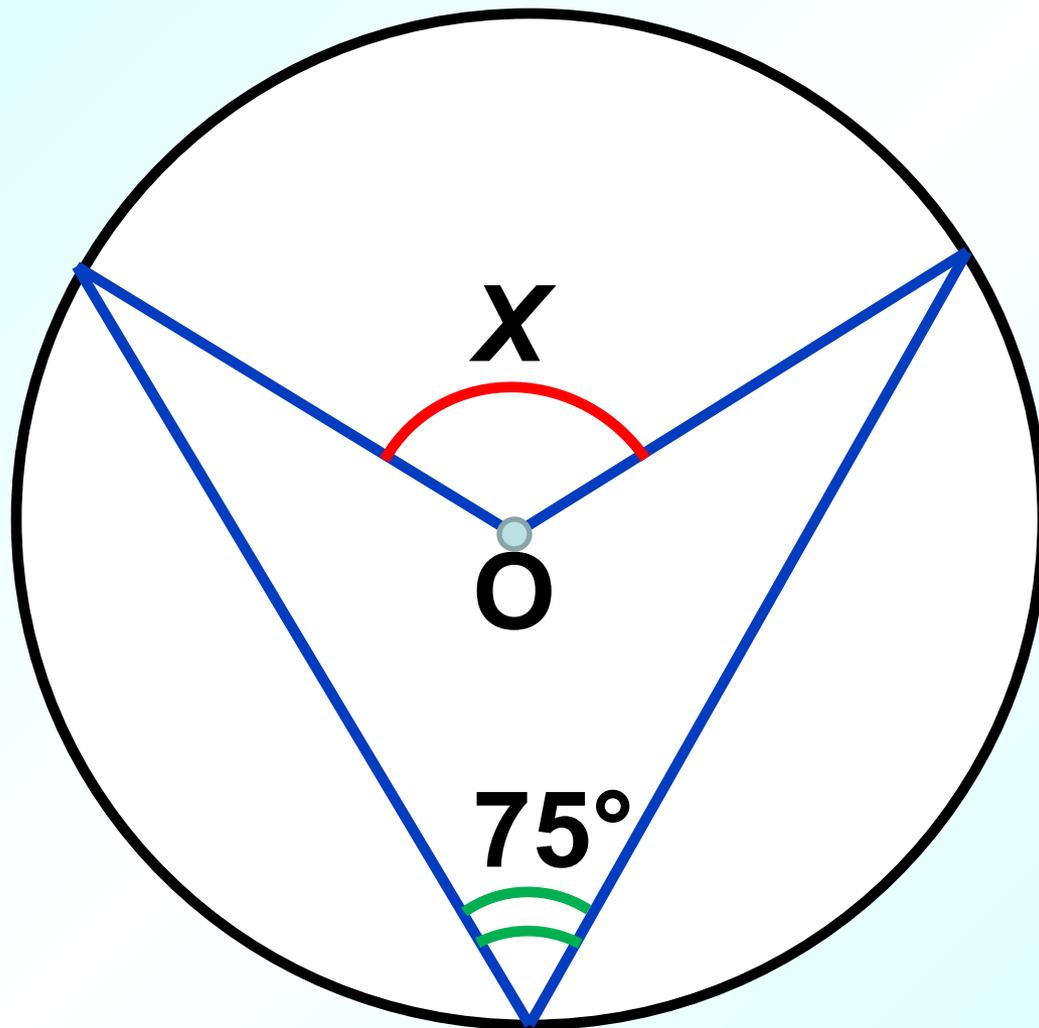
**$135^\circ$**

Найдите  $X$



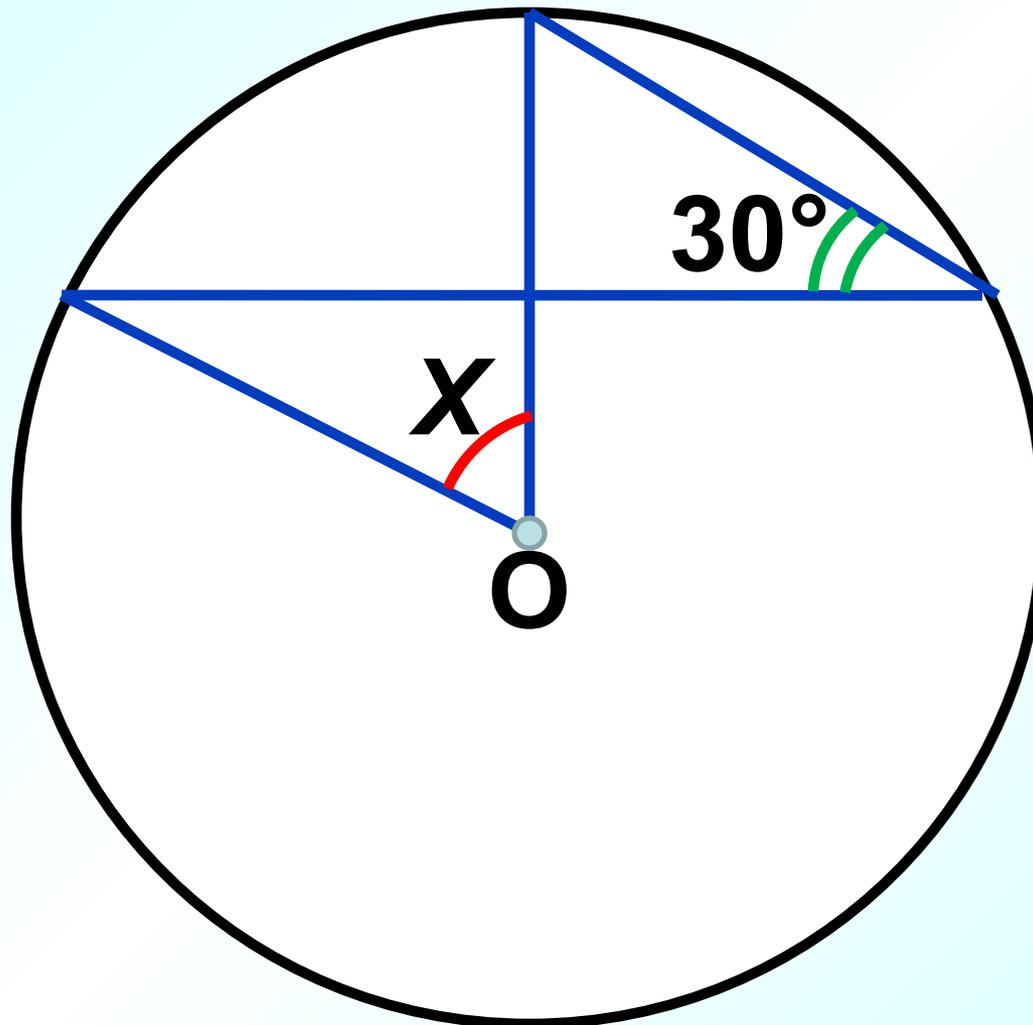
$55^\circ$

Найдите  $X$



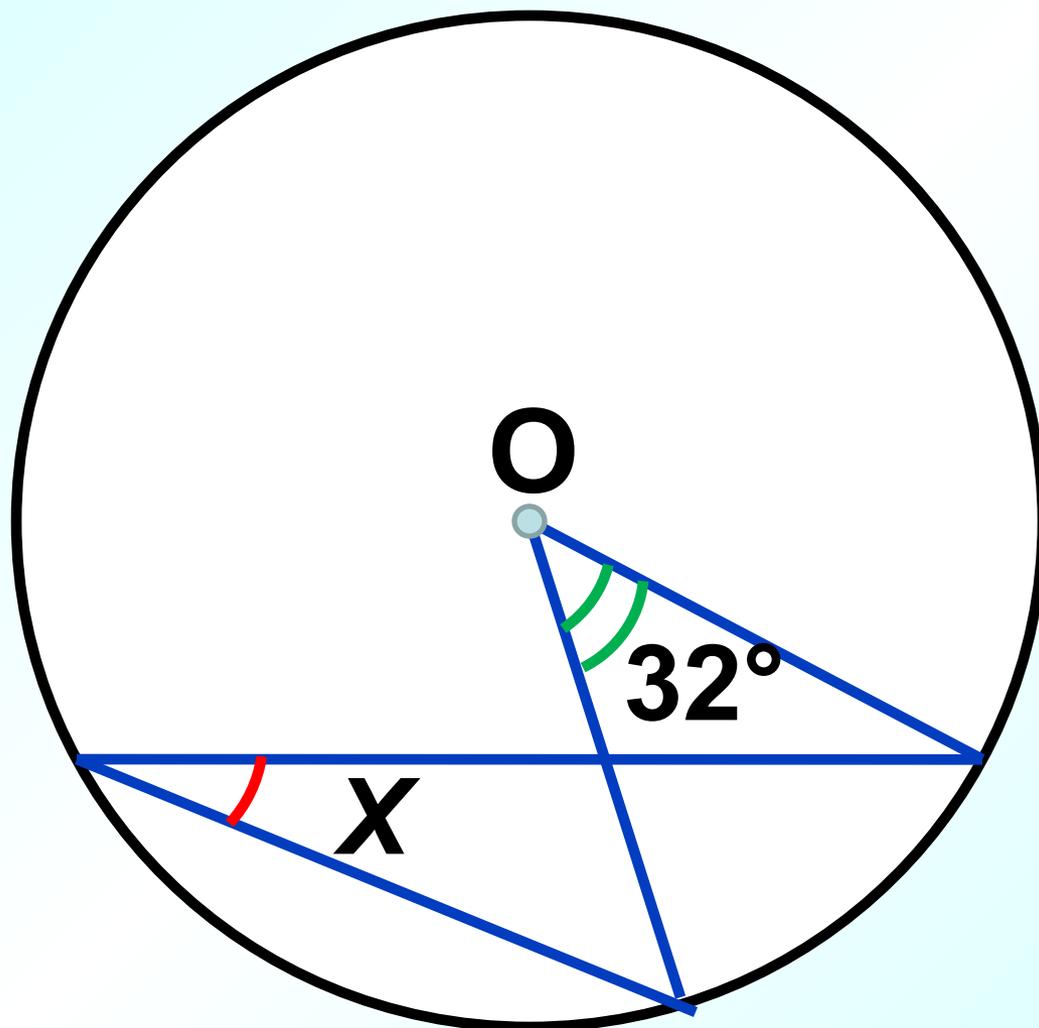
$150^\circ$

Найдите  $X$



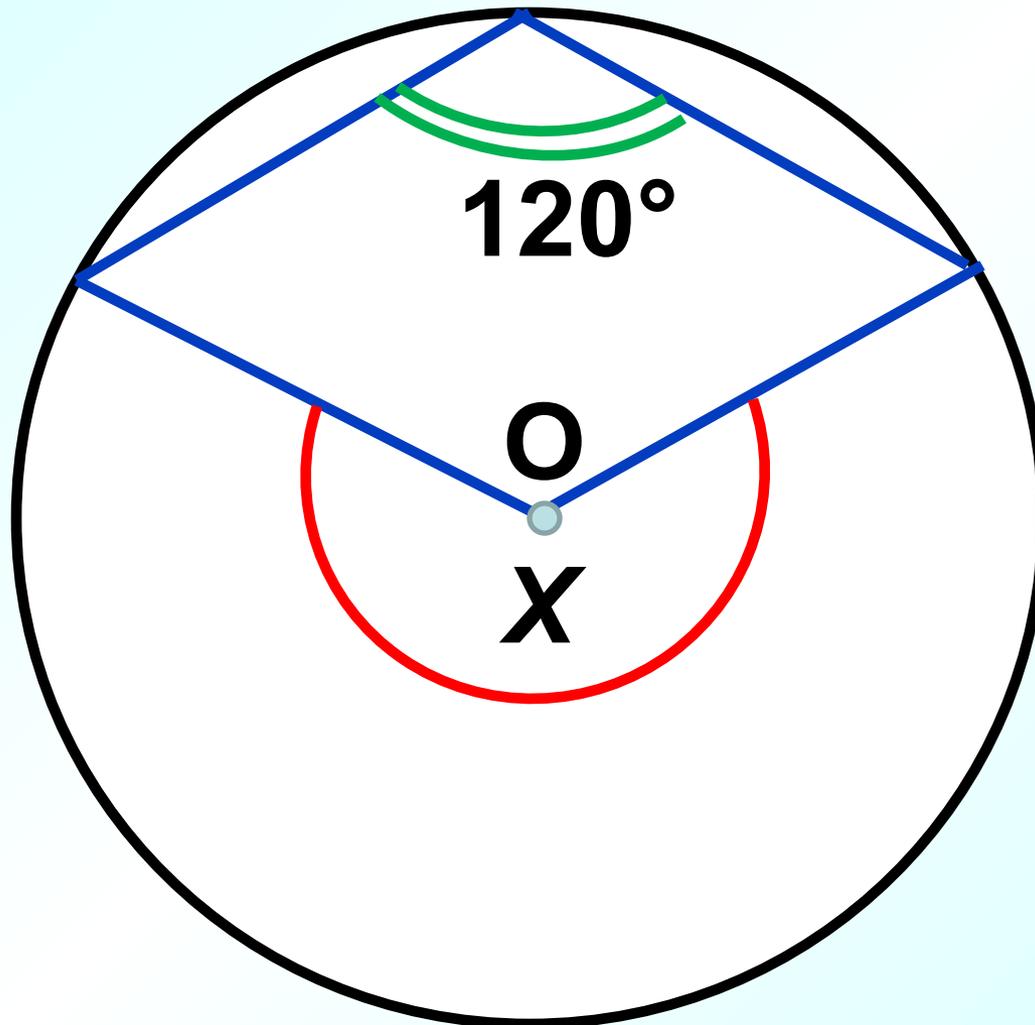
$60^\circ$

Найдите  $X$



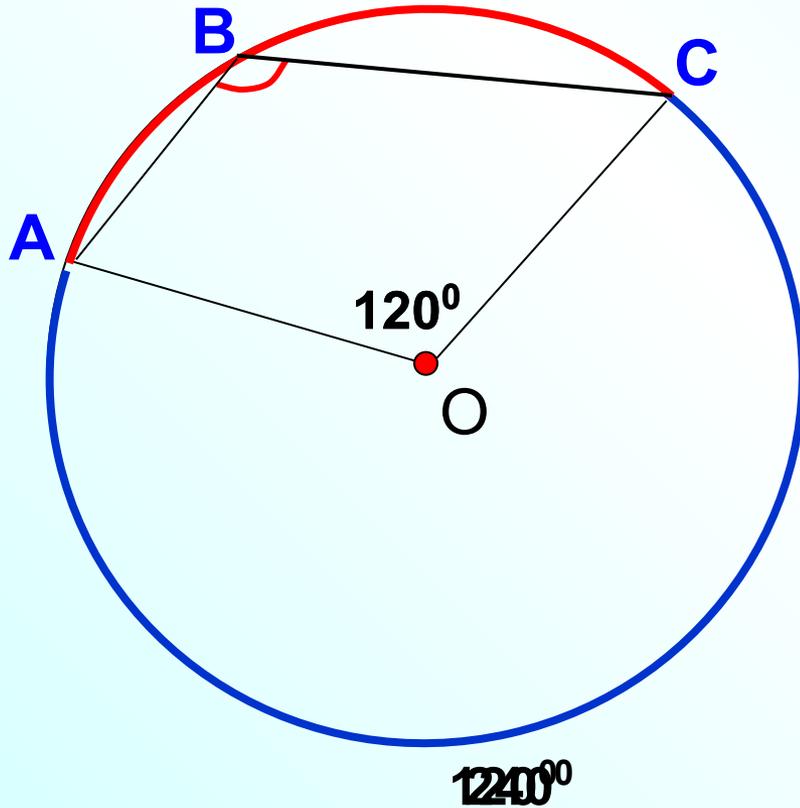
$16^\circ$

Найдите  $X$

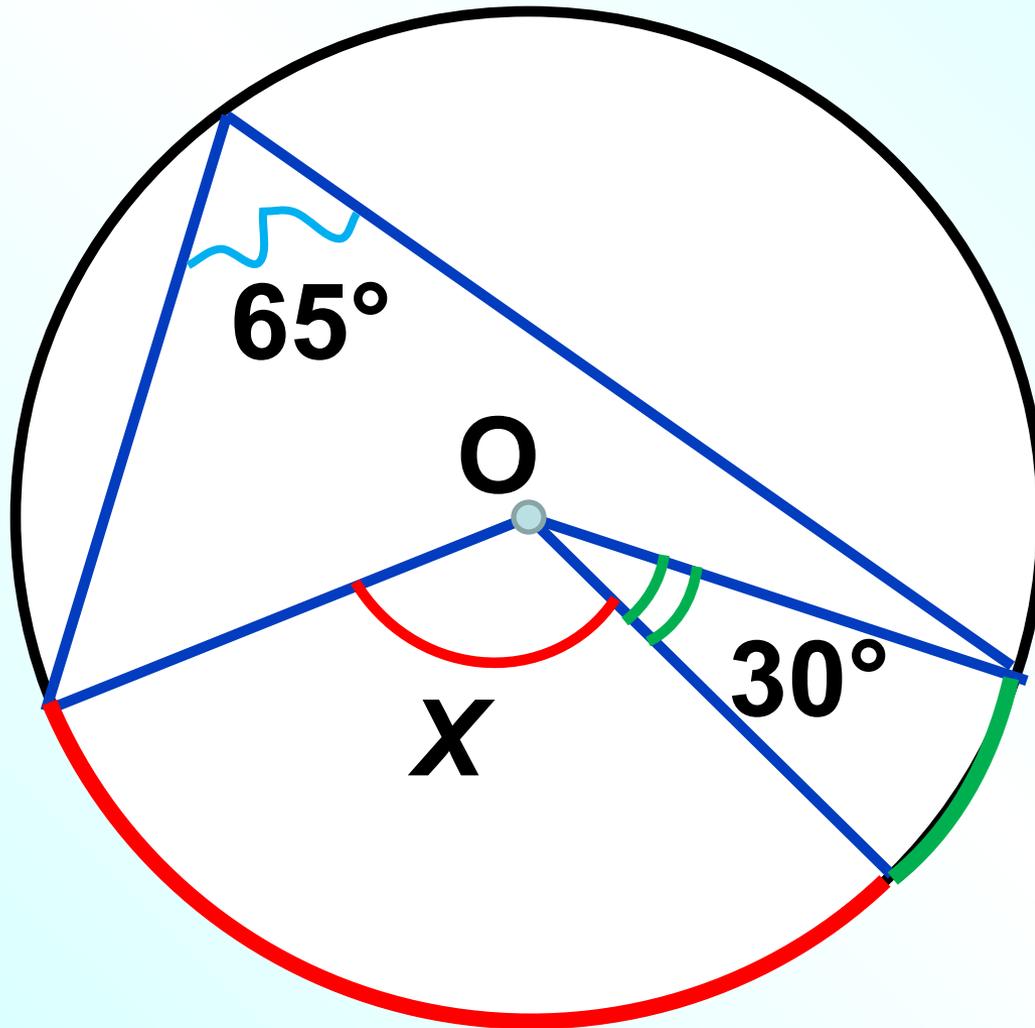


$240^\circ$

Найдите градусную меру угла ABC

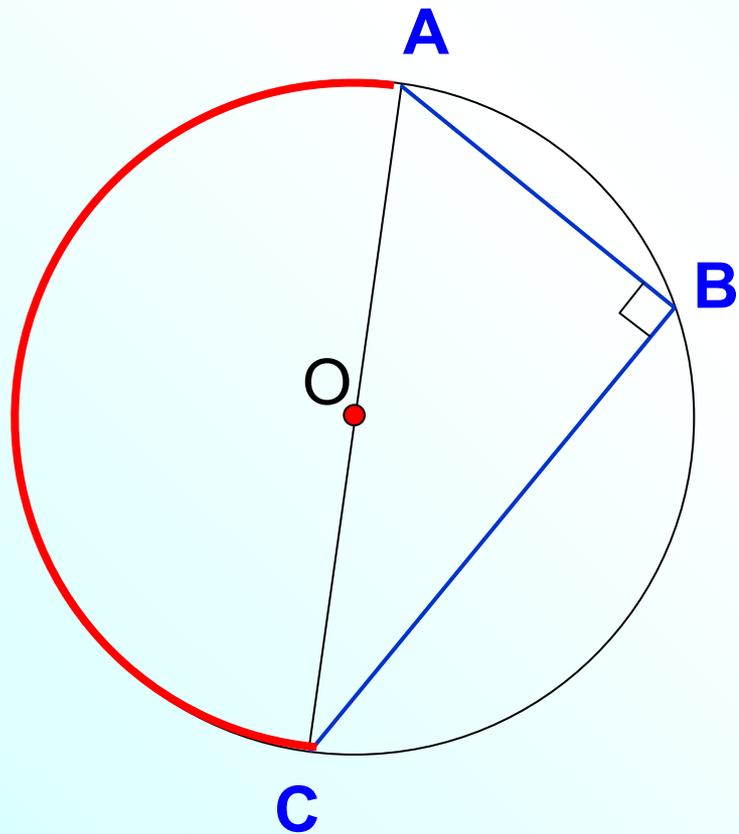


Найдите  $X$

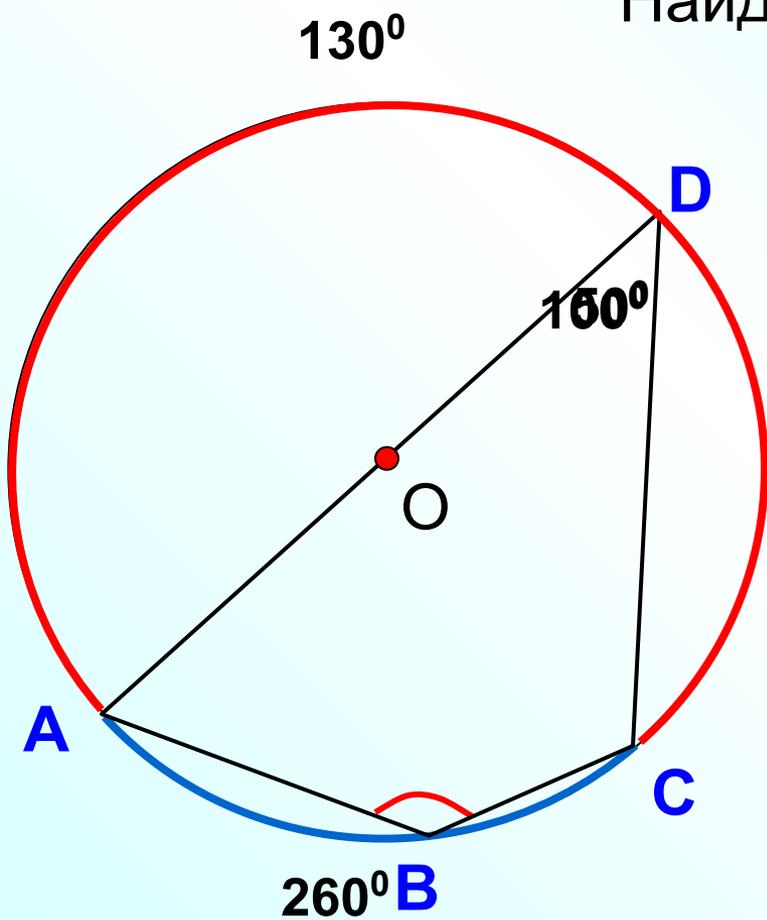


$100^\circ$

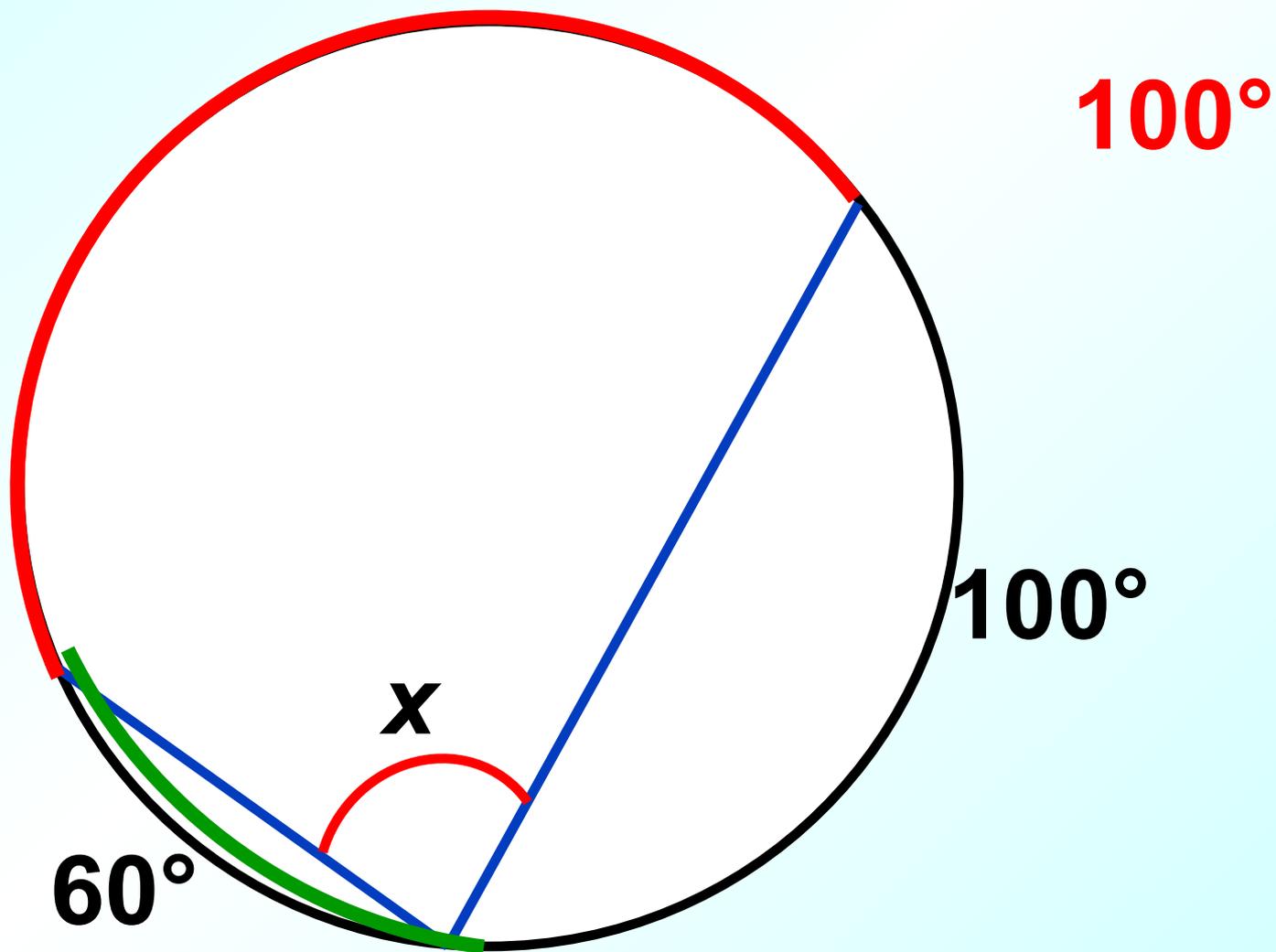
Найдите градусную меру угла  $ABC$ .



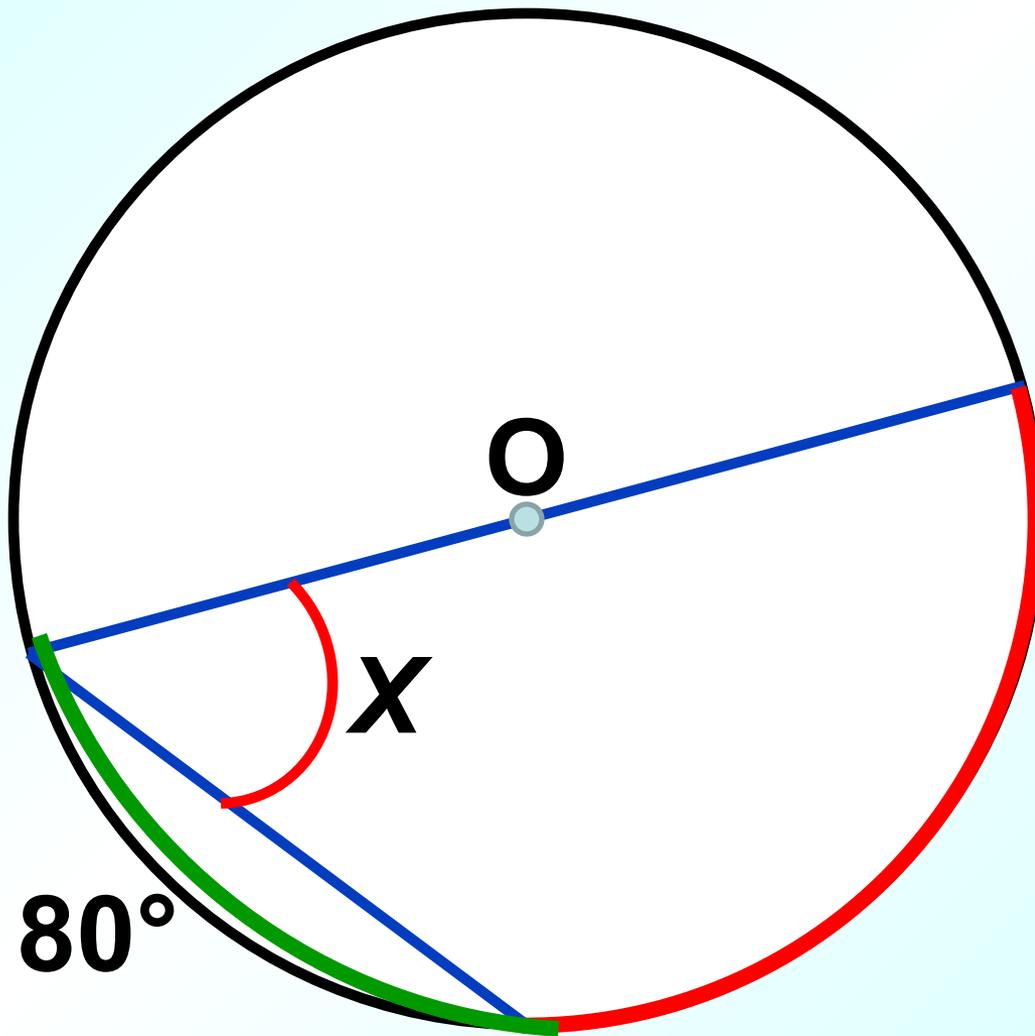
Найдите градусную меру угла ABC



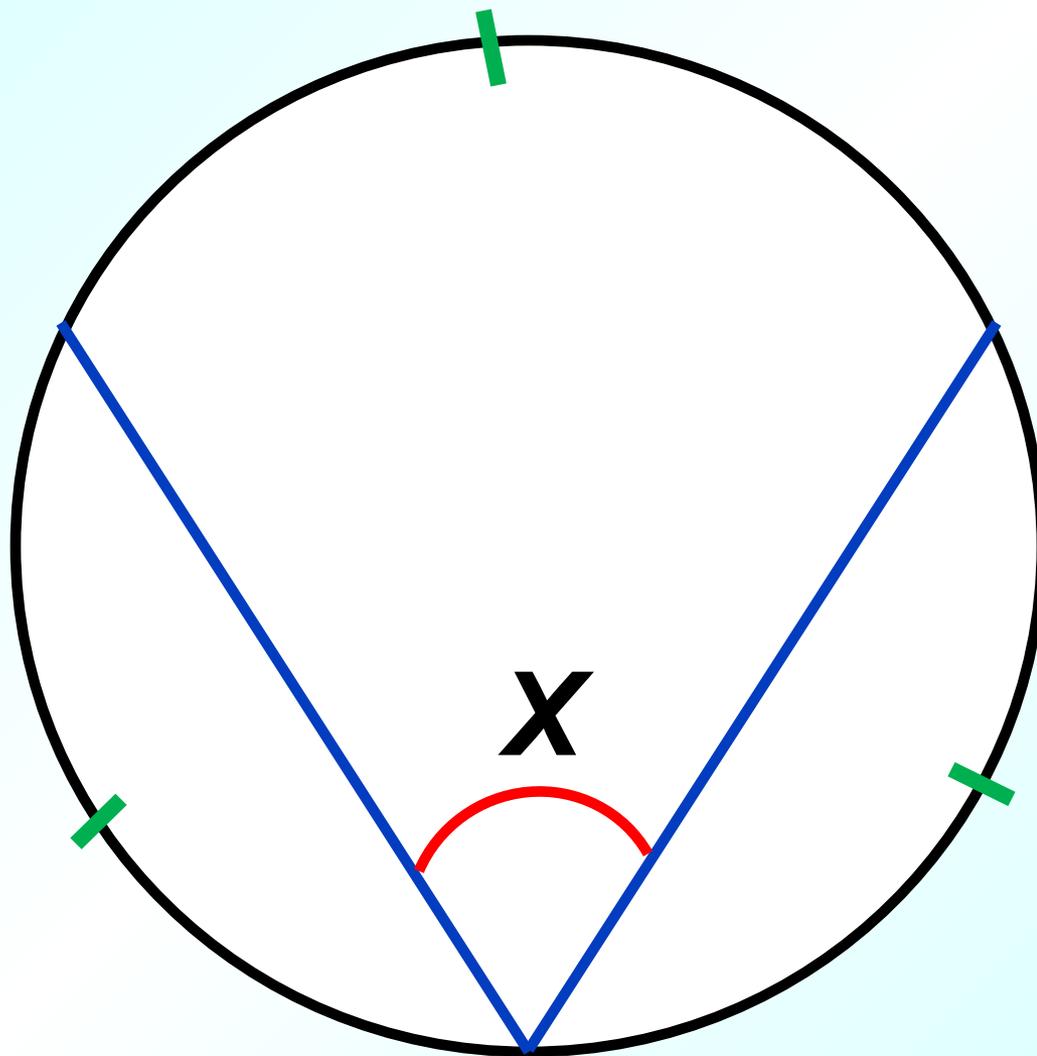
Найдите  $X$



Найдите  $X$

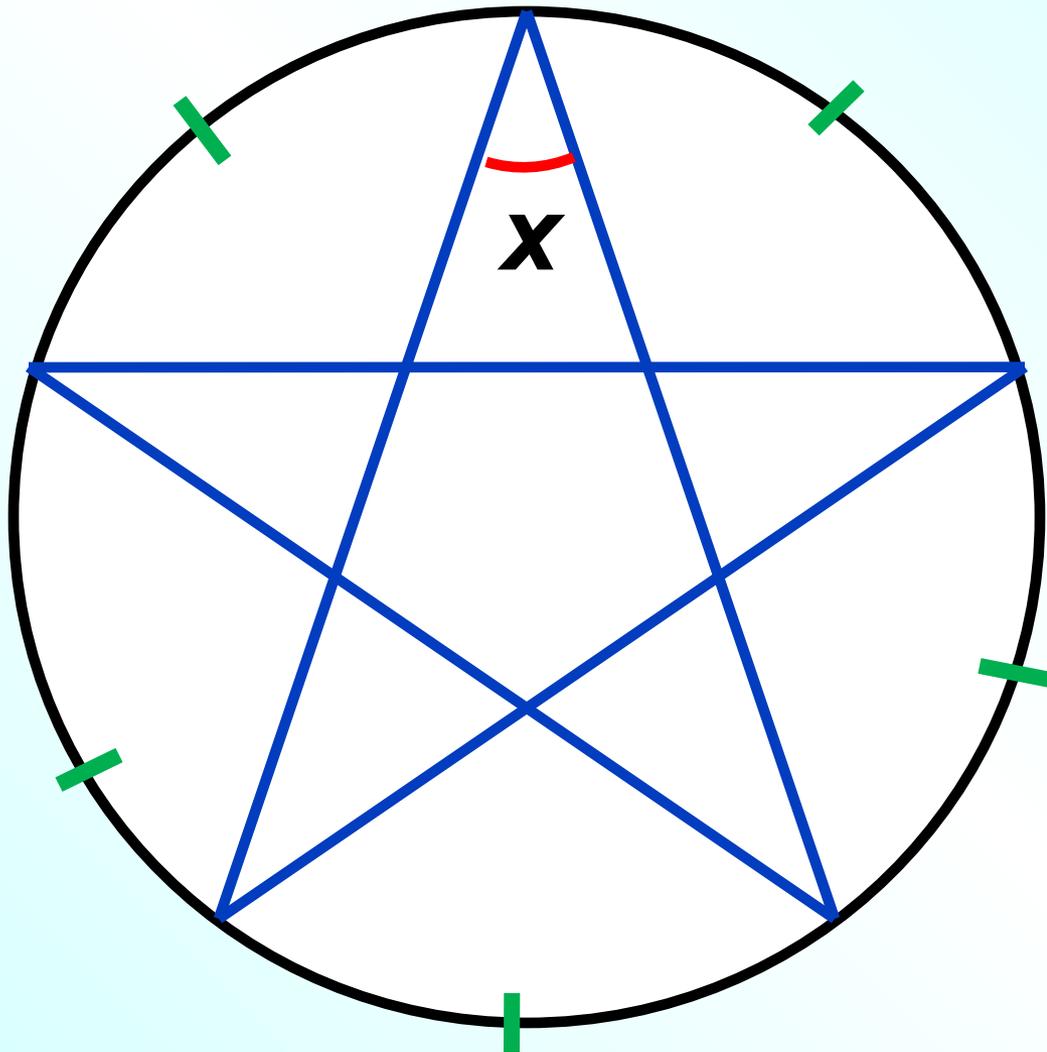


Найдите  $X$



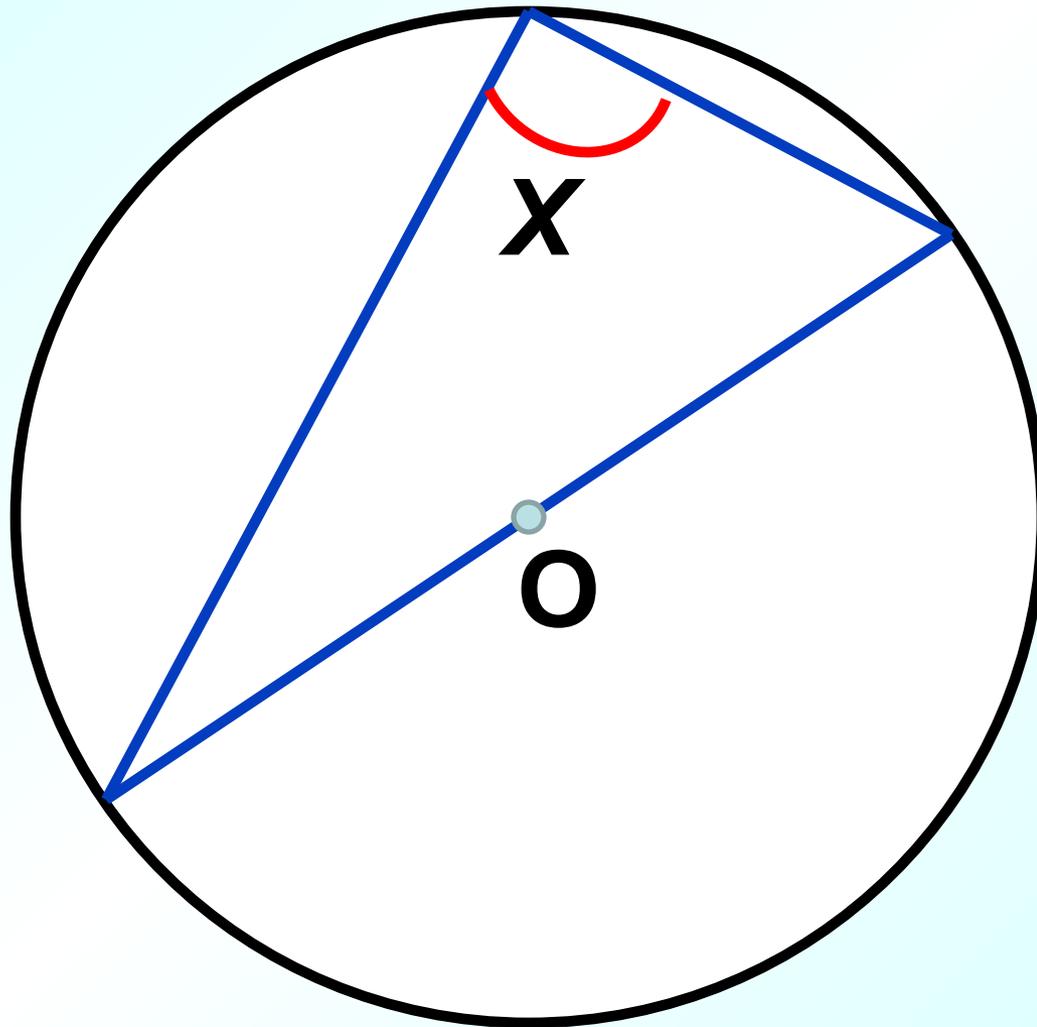
$60^\circ$

Найдите  $X$



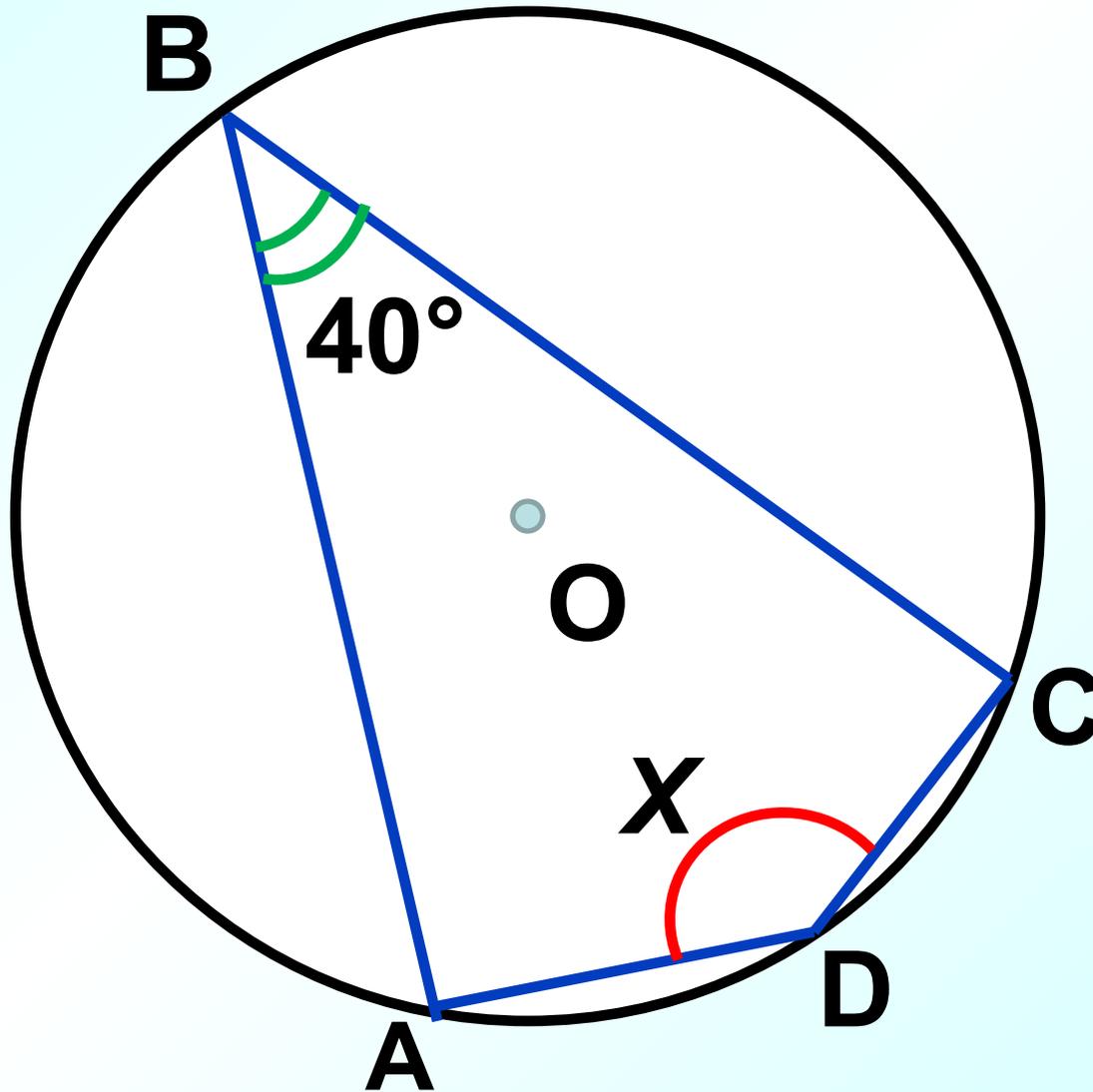
$36^\circ$

Найдите  $X$



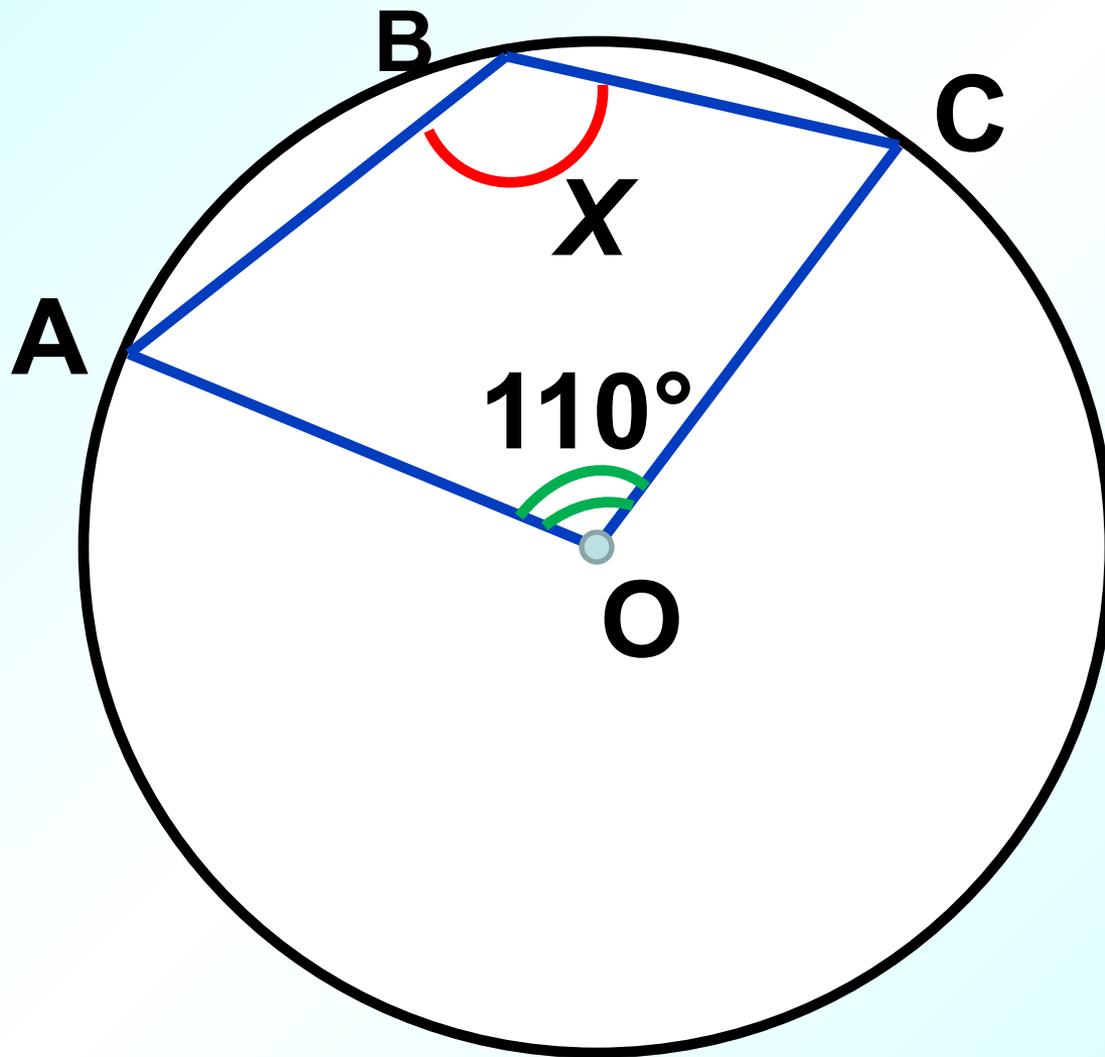
$90^\circ$

Найдите  $X$



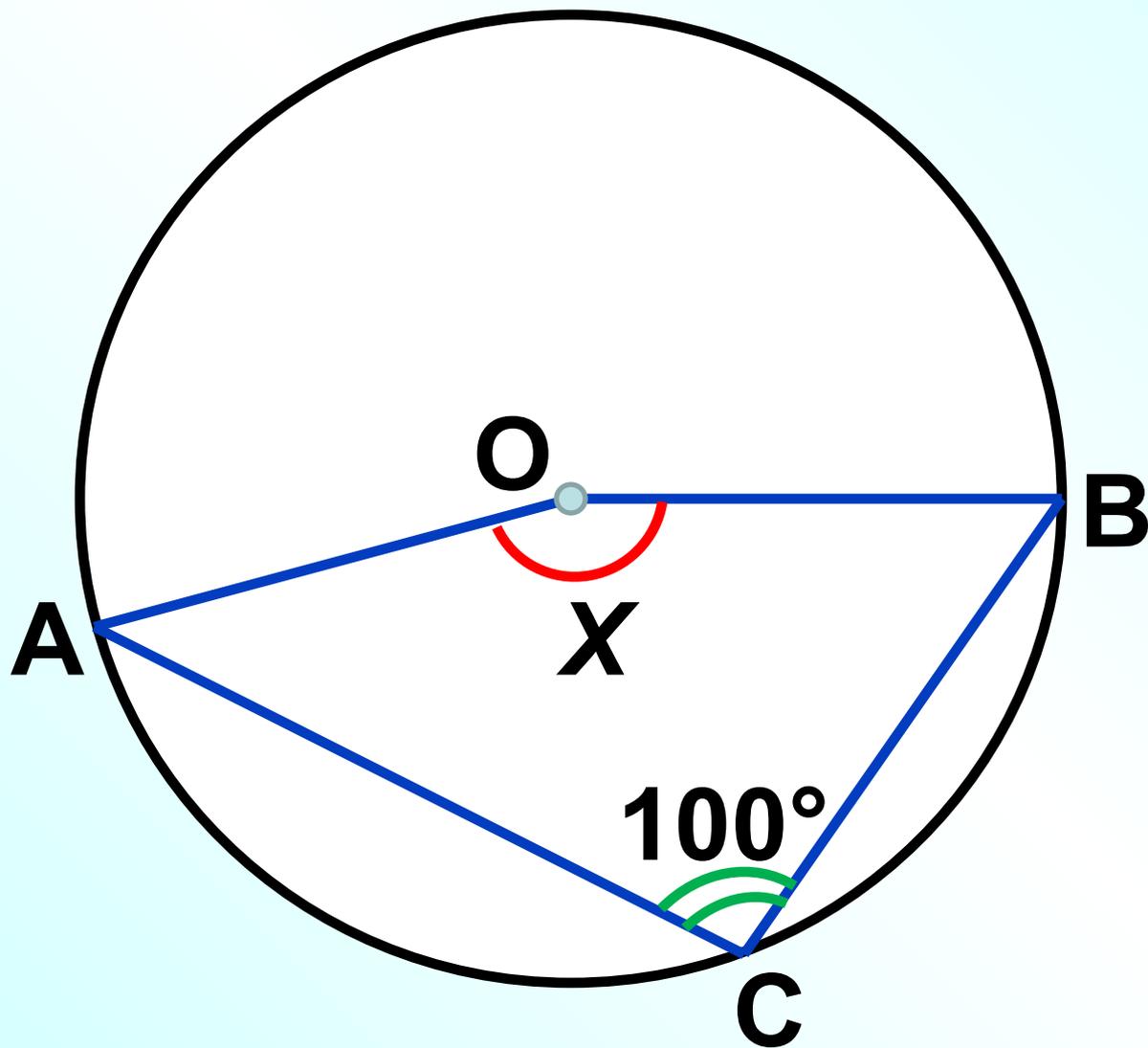
$140^\circ$

Найдите  $X$



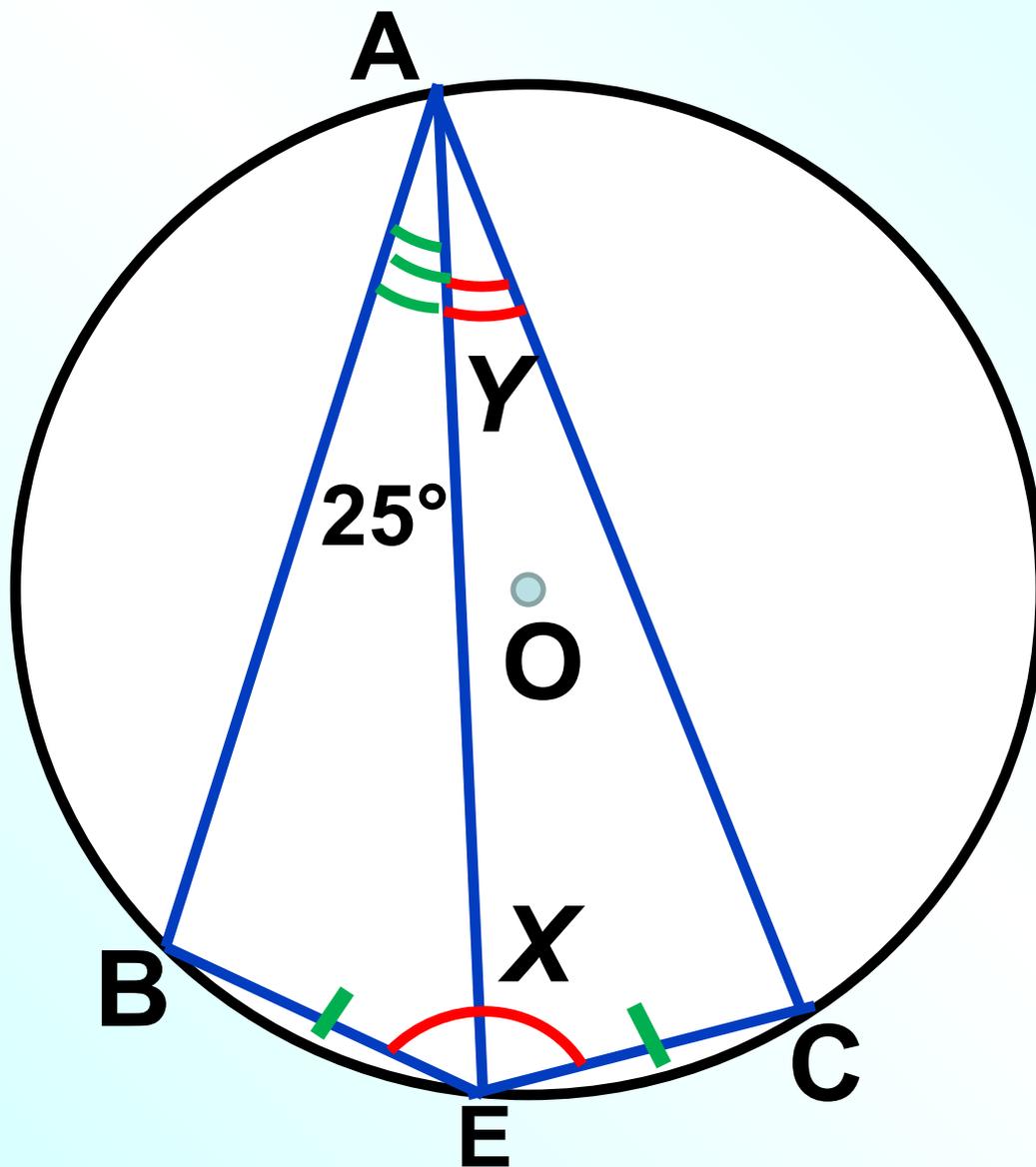
$125^\circ$

Найдите  $X$



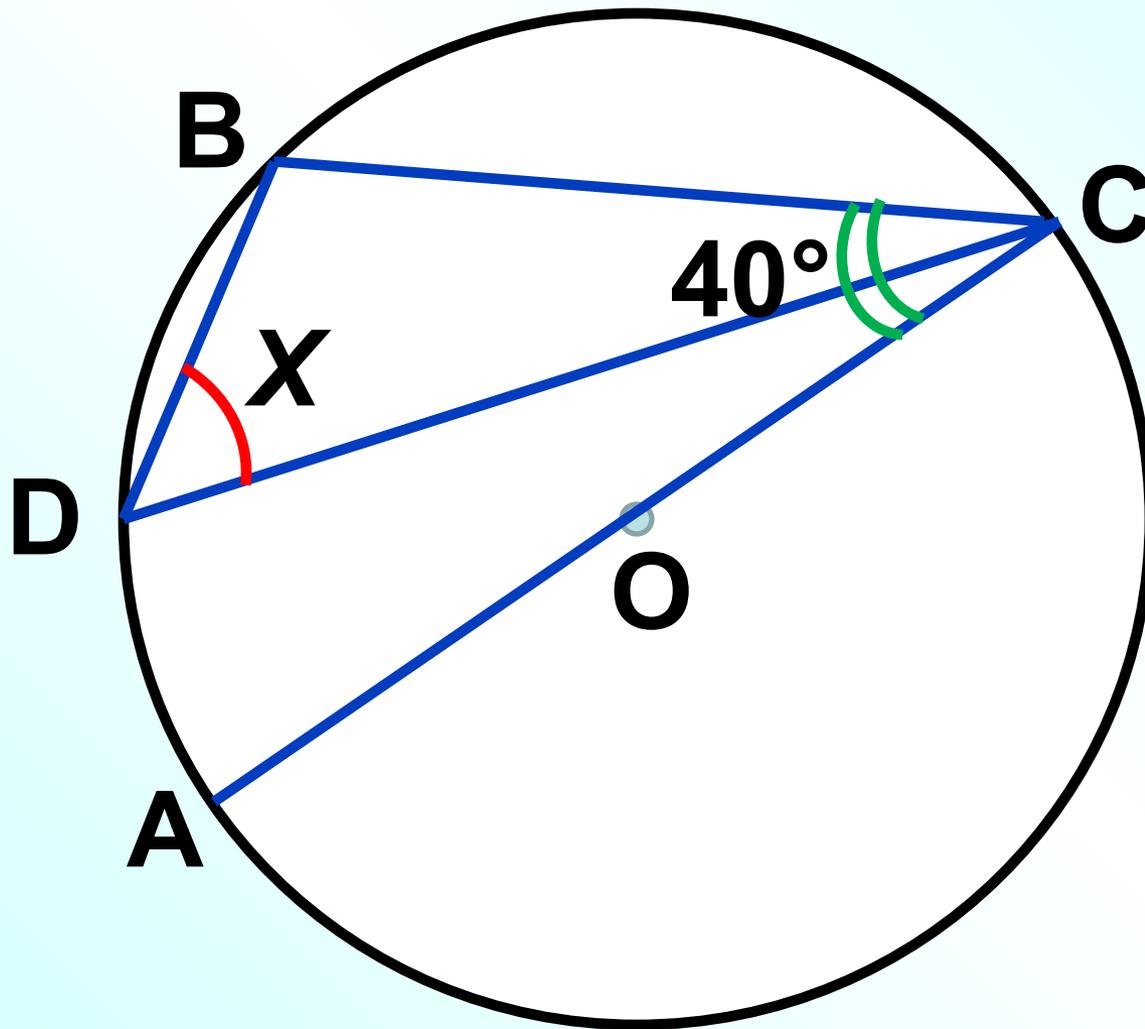
$160^\circ$

Найдите  $X$  и  $Y$



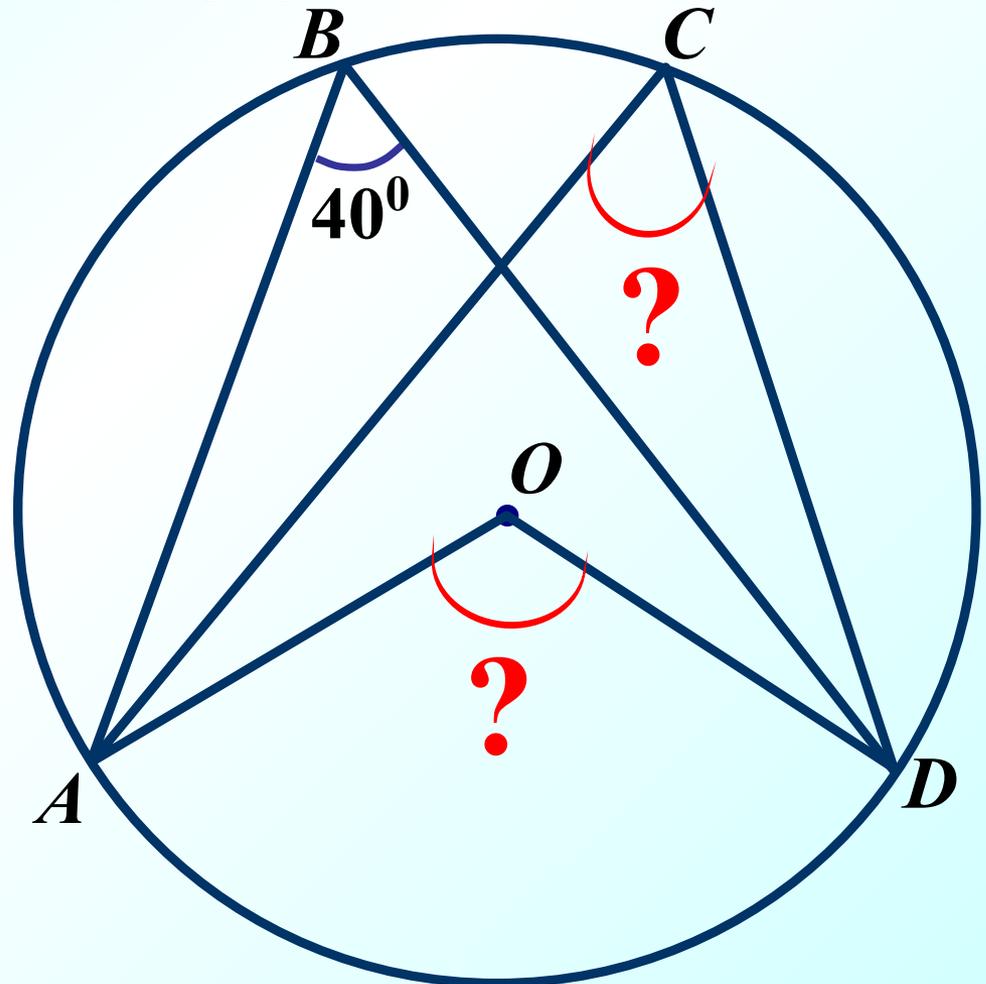
$Y=25^\circ$   
 $X=130^\circ$

Найдите  $X$



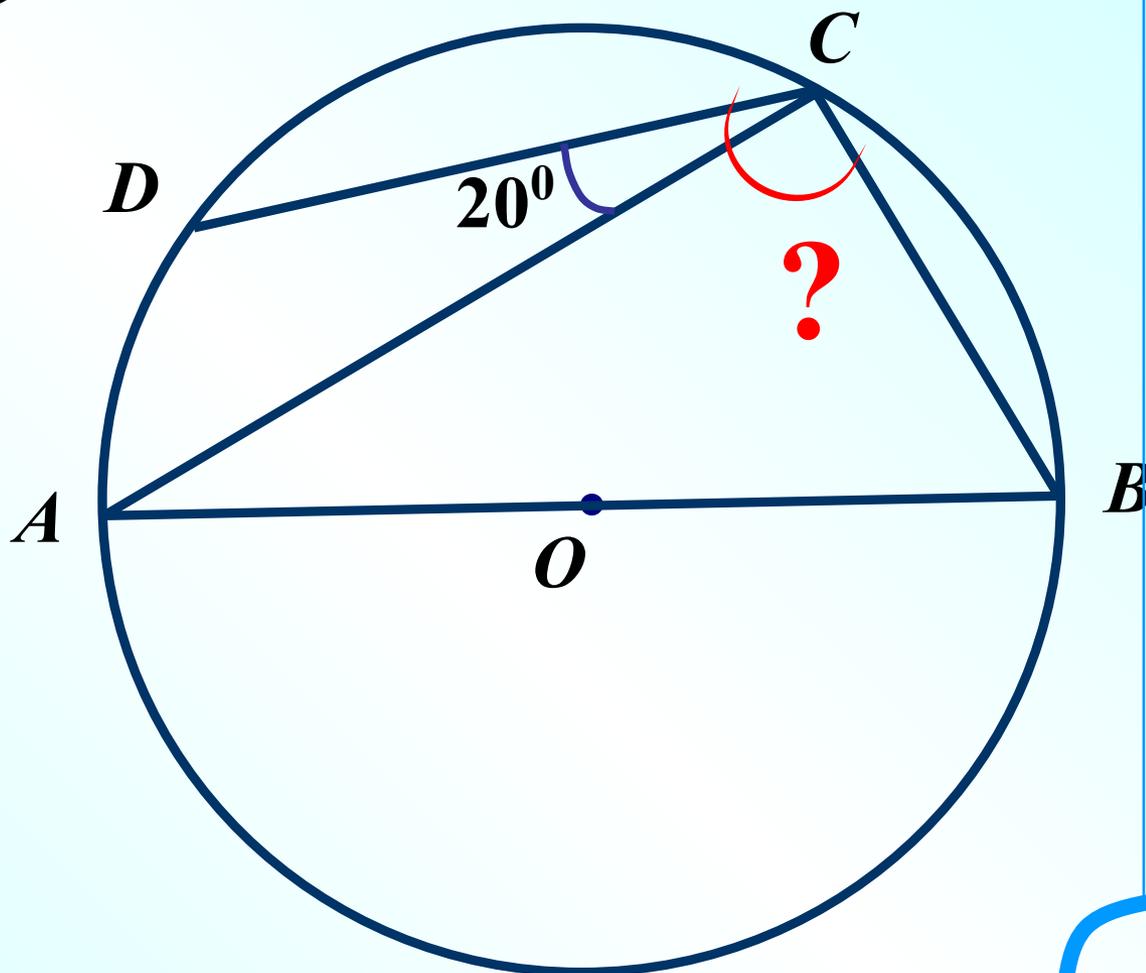
**Дано:** Окр.  $(O, R)$

**Найти:**  $\angle AOD$ ,  $\angle ACC$



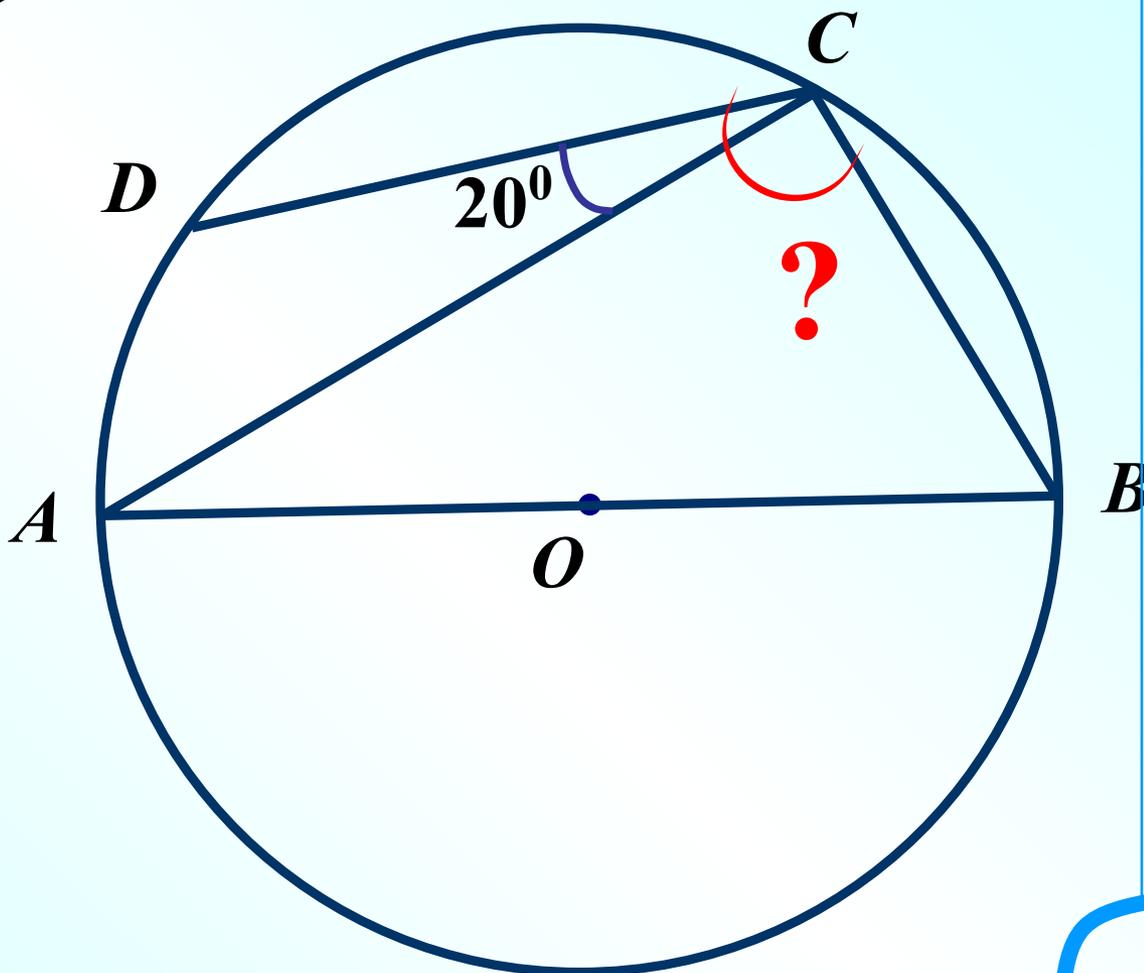
**Дано:** Окр.  $(O, R)$

**Найти:**  $\angle BCD$



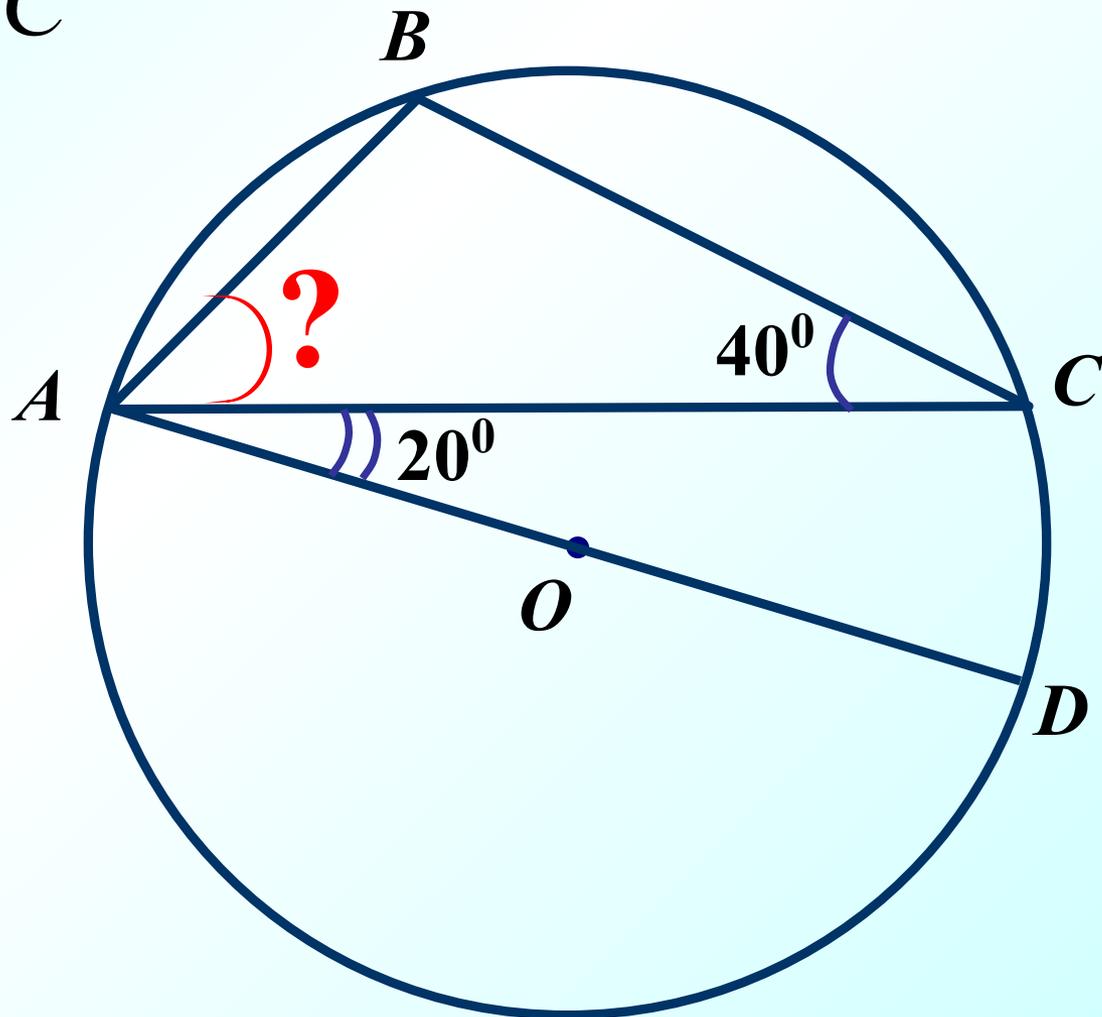
**Дано:** Окр.  $(O, R)$

**Найти:**  $\angle BCD$



**Дано:** Окр.  $(O, R)$

**Найти:**  $\angle BAC$



**Дано:** Окр.  $(O, R)$ ,  $\cup CD = 100^\circ$

**Найти:**  $\cup BE$

