

*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный
Университет (Сибстрин)*

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА

ЛЕКЦИЯ 5. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ



Кафедра теоретической механики

План лекции

Введение

**Сложение параллельных сил, направленных
в разные стороны**

Пара сил. Момент пары сил

Теорема об эквивалентности пар сил

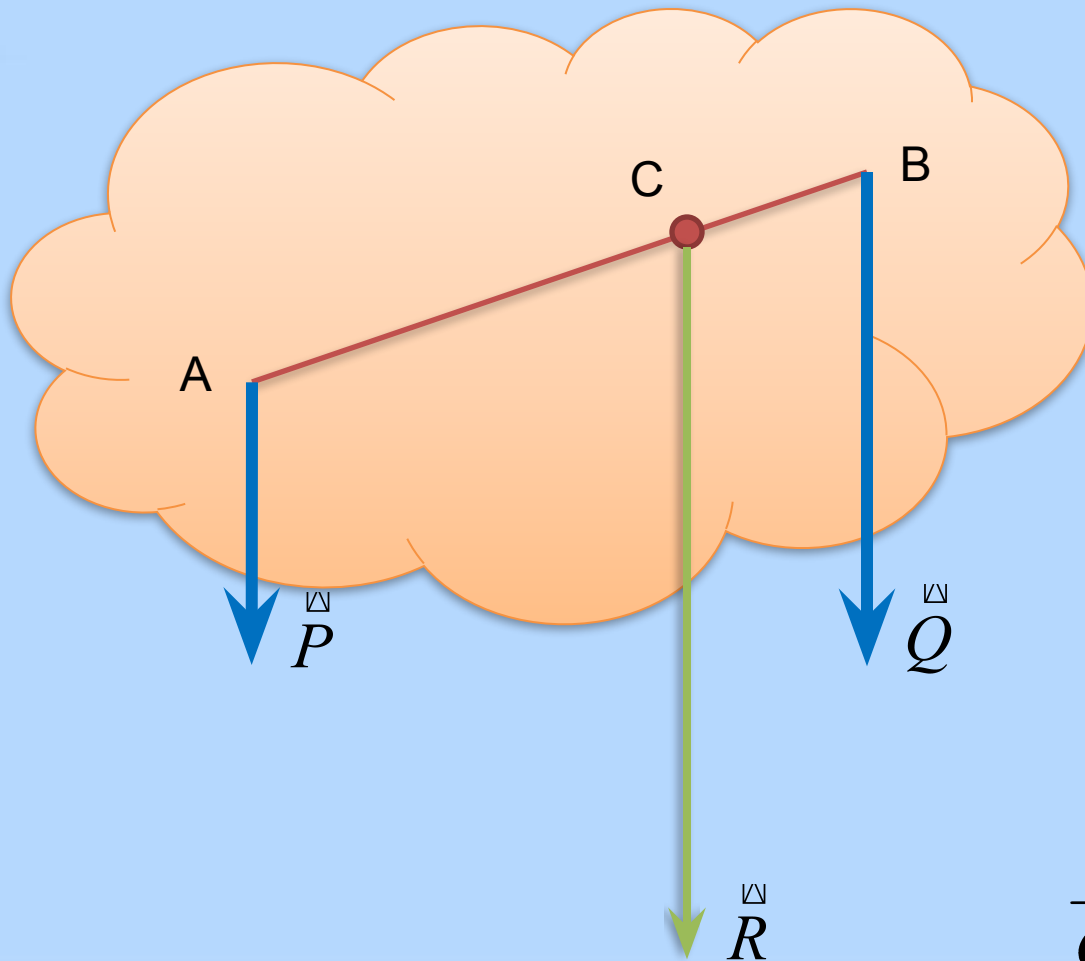
Теорема о сложении пар сил

**Условие равновесия тела под действием
системы пар сил**

Заключение

На предыдущей лекции

Сложение параллельных сил направленных в одну сторону



$$\vec{P} \parallel \vec{Q}$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

Цель лекции

Научиться работать с парами сил.

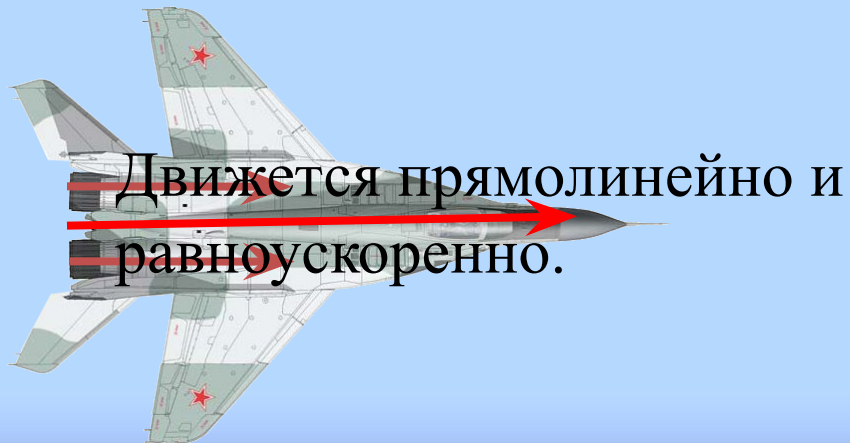
Актуальность. Практические примеры

Вы уже знаете...

...что тело под действием одной силы F (~системе сходящихся сил)



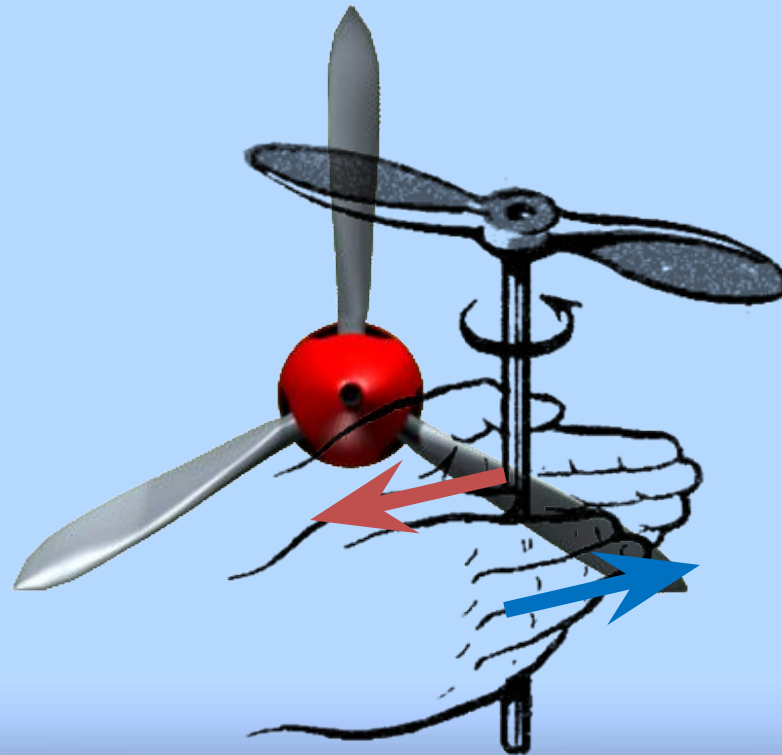
... что тело под действием системы параллельных сил



Актуальность. Практические примеры

В ЭТОЙ лекции вы узнаете...

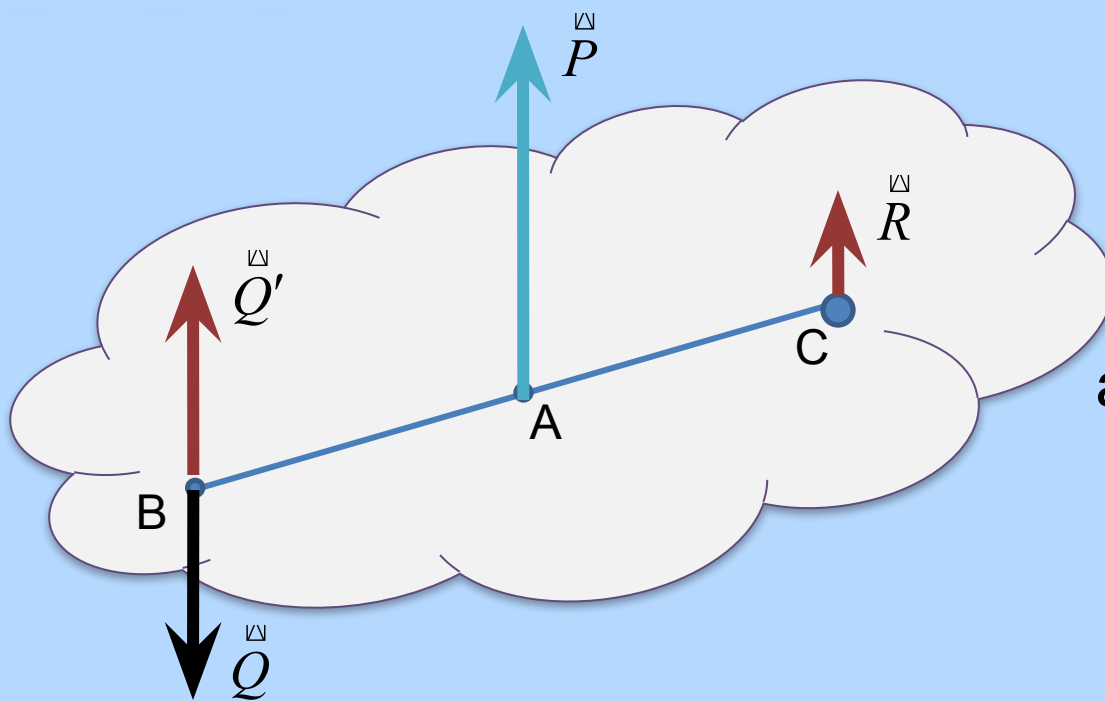
Какую систему сил необходимо приложить, чтобы заставить тело вращаться



Теорема о сложении двух сил, направленных в разные стороны, но линии действия которых параллельны

Система двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно, имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая лежит на продолжении отрезка АВ и делит этот отрезок внешним образом на части, обратно пропорциональные силам.

Доказательство



$$(\vec{Q}, \vec{P}), \vec{Q} \parallel \vec{P}, P > Q$$

Представим силу

$$\vec{P} \sim (\vec{Q}', \vec{R})$$

причем $\vec{Q}' = -\vec{Q}$

$$\text{Тогда } \vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$$

а точка ее приложения

$$AC = \frac{Q \cdot AB}{P - Q}$$

$$(\vec{Q}, \vec{P}) \sim (\vec{Q}, \vec{Q}', \vec{R})$$

Заметим, что $(\vec{Q}', -\vec{Q}) \sim 0$

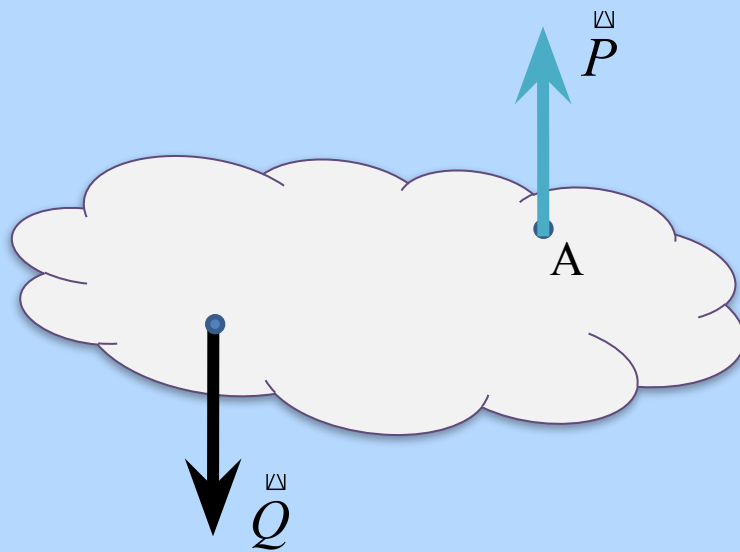
$$\Rightarrow (\vec{Q}, \vec{P}) \sim \vec{R}$$

Пара сил

Рассмотрим случай, когда $P = Q$

Тогда, из соотношений предыдущей теоремы $R = P - Q = 0$

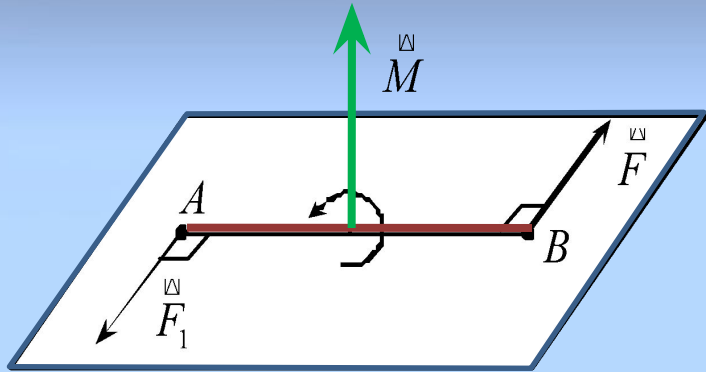
$$AC = \lim_{P \rightarrow Q} \frac{Q \cdot AB}{P - Q} = \infty$$



Такая система двух сил не имеет равнодействующей и называется **парой сил**.

Пара сил приводит к вращению тела, которое характеризуется **моментом пары сил**

Пара сил. Момент пары сил



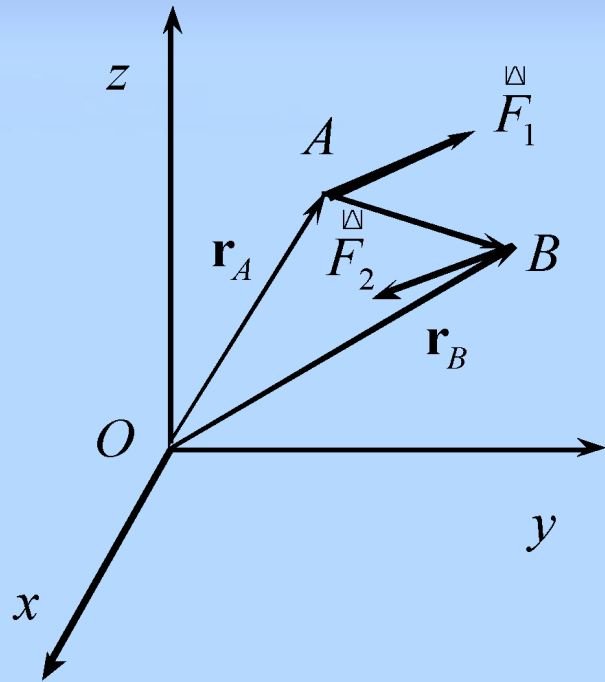
Плоскость, проходящая через линии действия сил, называется *плоскостью действия пары*.

Расстояние между линиями действия сил называется *плечом пары*.

Моментом пары сил называется вектор \vec{M} , модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары: $M = Fd$. Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки.

Для пар сил, расположенных в одной плоскости, как и для обычных сил, часто используют понятие алгебраического момента пары: $M = \pm Fd$. Знак "плюс" берется, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, "минус" – по ходу.

Пара сил. Вращательный эффект пары



Вращательный эффект пары складывается из вращательных эффектов составляющих ее сил

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{AB} \times \vec{F}_2 = (\vec{OB} - \vec{OA}) \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{OB} \times \vec{F}_2 - \vec{OA} \times \vec{F}_2 = \vec{OB} \times \vec{F}_2 + \vec{OA} \times \vec{F}_1 = \\ &= M_O(F_1) + M_O(F_2) \end{aligned}$$

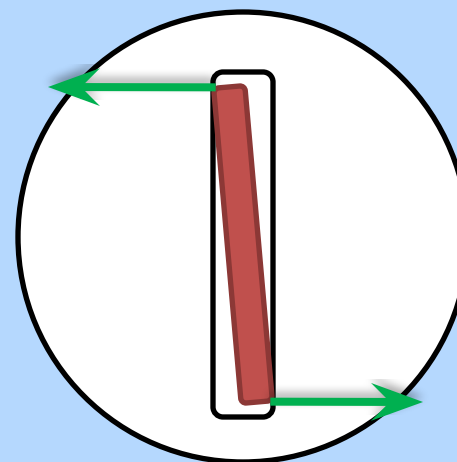
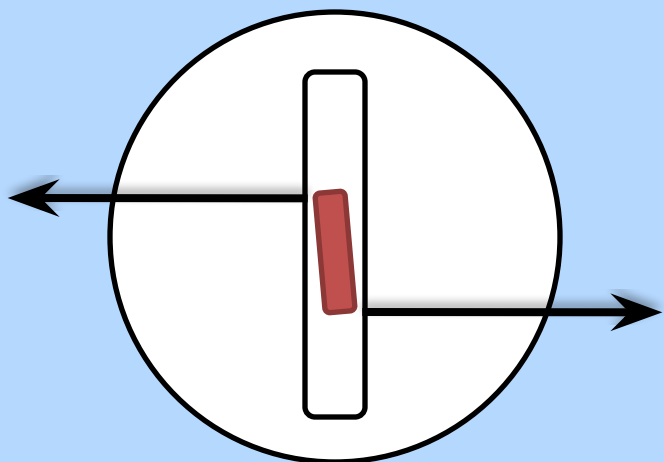
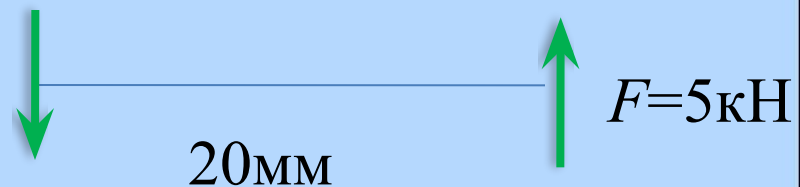
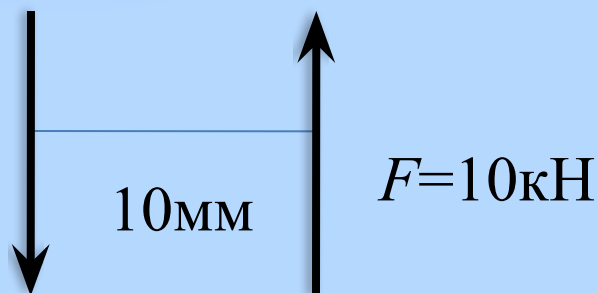
$$\Rightarrow \vec{M} = M_O(F_1) + M_O(F_2)$$

Сумма моментов сил пары относительно любой точки O равна моменту пары этих сил. Поскольку момент пары сил перпендикулярен плоскости пары, а его модуль равен $M = AB \cdot F_1 \sin(\angle AB, F_1)$, то момент пары не зависит от точек приложения сил пары. Он определяется лишь плечом пары.

Пара сил. Пример

Пример пар сил вызывающих одинаковое вращательное воздействие на тело (равные моменты)

Выбор отвертки



Теорема об эквивалентности пар сил

Все пары сил, имеющие один и тот же момент, эквивалентны.

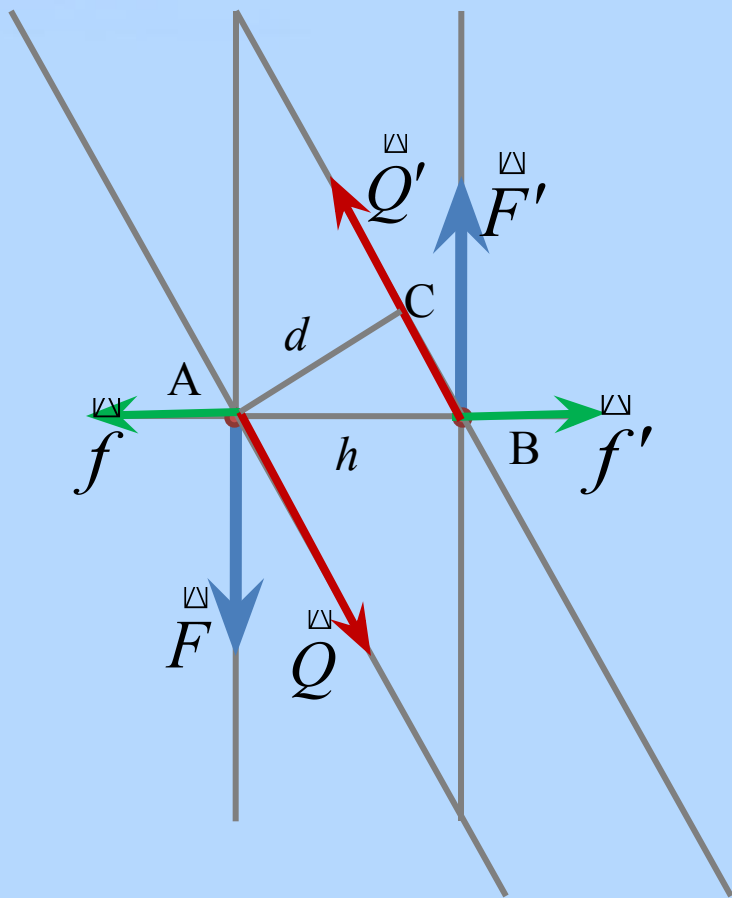
Доказательство проведем в два этапа:

1. Для случая когда плоскости действия пар совпадают.
2. Когда плоскости действия пар параллельны.

Так как вектор момента пары направлен перпендикулярно плоскости действия пары, то равенство моментов подразумевает, что плоскости действия пар либо совпадают либо параллельны.

Доказательство

ПЛОСКОСТИ ДЕЙСТВИЯ ПАР СОВПАДАЮТ



Пара сил (\vec{F}, \vec{F}') с моментом $m = Fh$

$$(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{f}, \vec{Q}, \vec{f}', \vec{Q}')$$

Так как $(\vec{f}, \vec{f}') \sim 0$ то

$$(\vec{f}, \vec{Q}, \vec{f}', \vec{Q}') \sim (\vec{Q}, \vec{Q}')$$

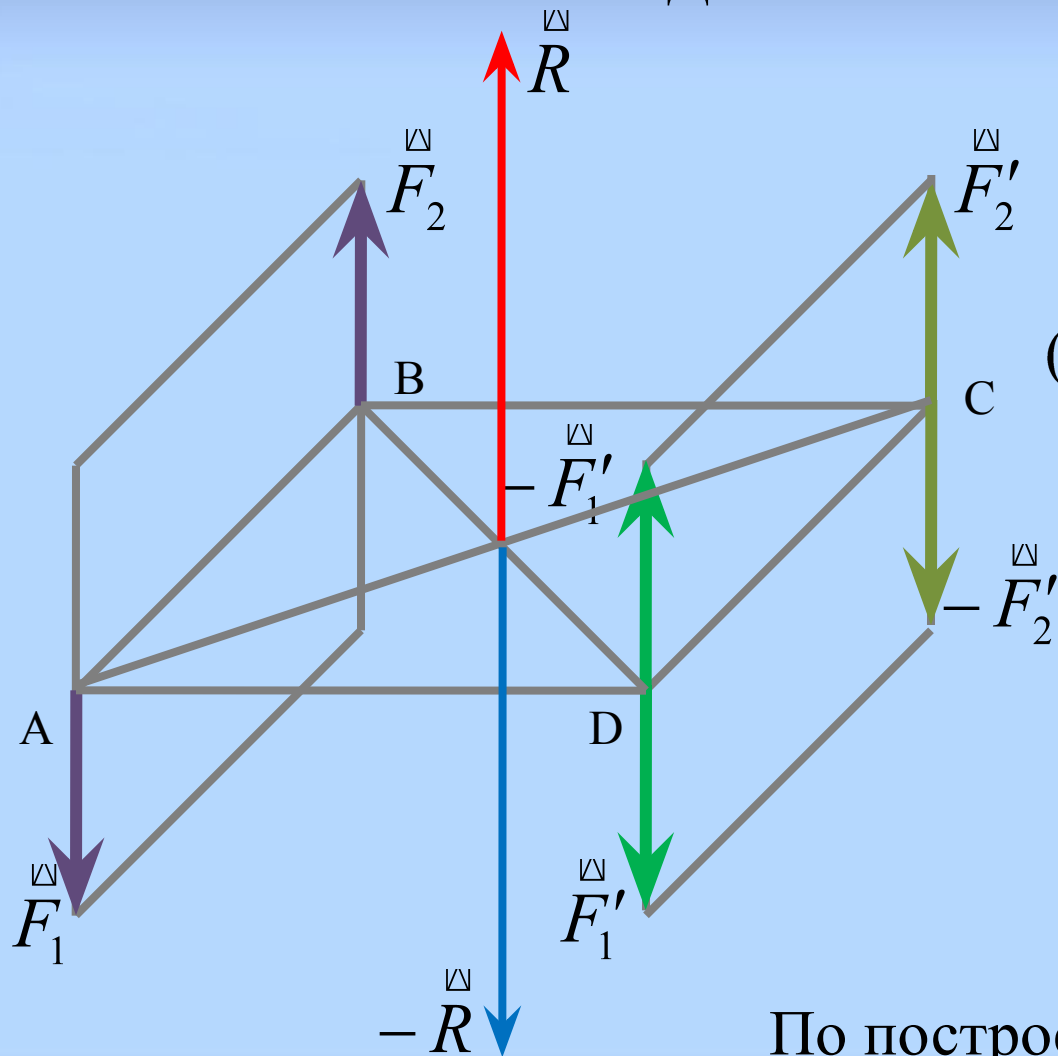
Момент пары (\vec{Q}, \vec{Q}') равен $m' = Qd$

Так как $\triangle ABC \sim \triangle FQf$ то $d = hF/Q$

$$\Rightarrow m' = Qd = Qh \frac{F}{Q} = Fh = m$$

Доказательство

плоскости действия пар параллельны



$$(\overset{\square}{F}_1, \overset{\square}{F}_2)$$

Добавим уравновешенную систему сил

$$(\overset{\square}{F}_1, \overset{\square}{F}_2) \sim (\overset{\square}{F}_1, \overset{\square}{F}_2, \overset{\square}{F}'_1, \overset{\square}{F}'_2, -\overset{\square}{F}'_1, -\overset{\square}{F}'_2)$$

Заметим, что

$$(\overset{\square}{F}_2, -\overset{\square}{F}'_1) \sim \overset{\square}{R}, (\overset{\square}{F}_1, -\overset{\square}{F}'_2) \sim -\overset{\square}{R}$$

Тогда

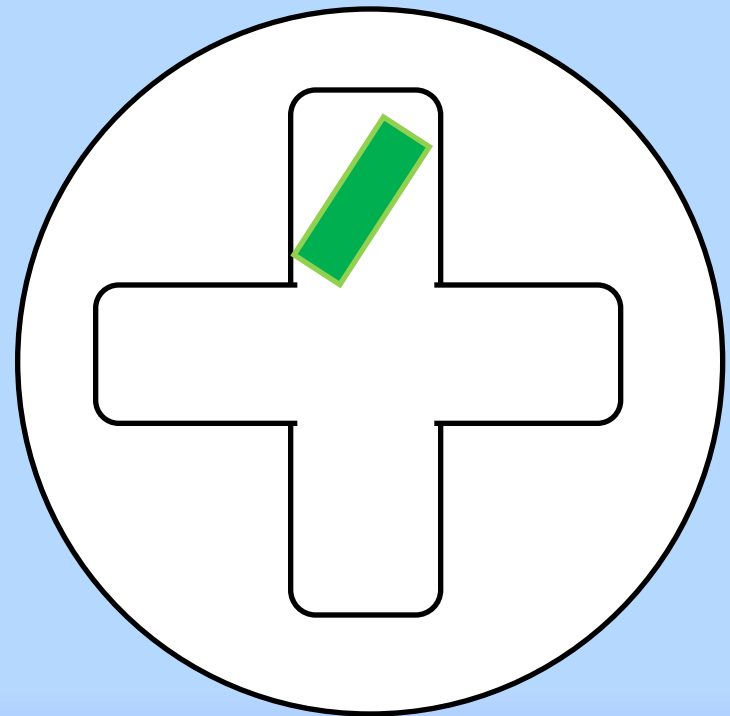
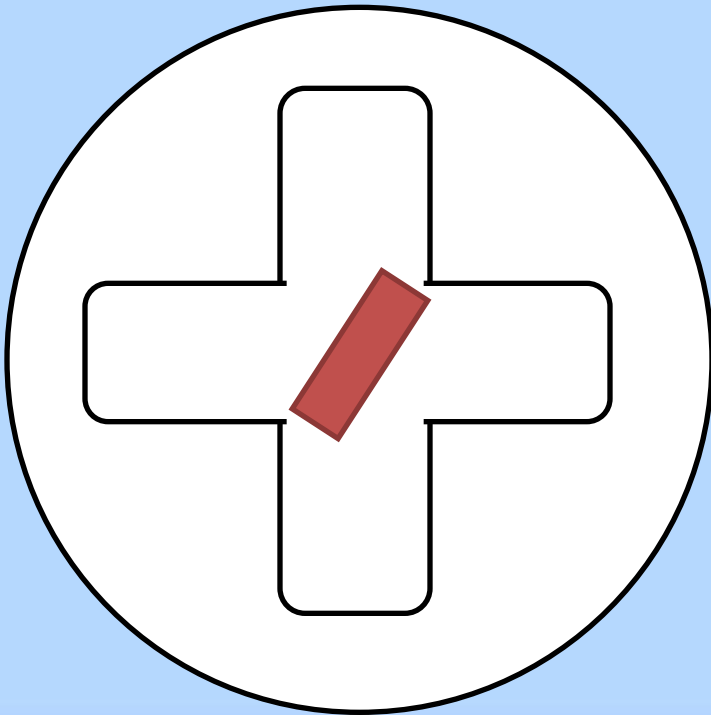
$$\begin{aligned} & (\overset{\square}{F}_1, \overset{\square}{F}_2, \overset{\square}{F}'_1, \overset{\square}{F}'_2, -\overset{\square}{F}'_1, -\overset{\square}{F}'_2) \sim \\ & \sim (\overset{\square}{R}_1, \overset{\square}{R}_2, \overset{\square}{F}'_1, \overset{\square}{F}'_2) \sim (\overset{\square}{F}'_1, \overset{\square}{F}'_2) \end{aligned}$$

По построению $M(\overset{\square}{F}'_1, \overset{\square}{F}'_2) = M(\overset{\square}{F}_1, \overset{\square}{F}_2)$

Теорема об эквивалентности пар сил

Применение теоремы об эквивалентности пар сил

Если нет крестовой отвертки, а есть только плоская с узким шлицем. Воспользуемся теоремой и перенесем усилие...



Теорема о сложении пар сил

**Действие на тело системы пар с
моментами**

$$M_1, M_2, \dots, M_N$$

**эквивалентно действию одной
пары с моментом**

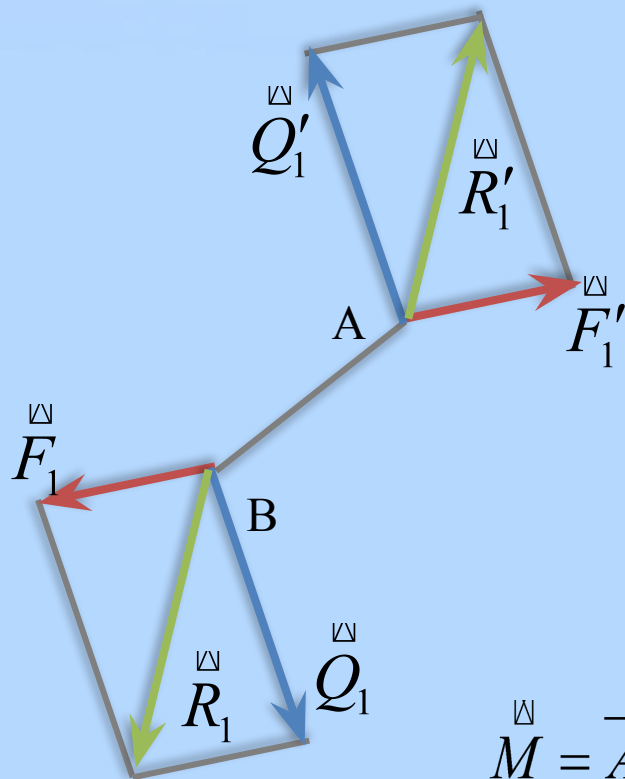
$$M = \sum_{k=1}^N M_k$$

Доказательство

Докажем сначала теорему для двух пар сил

$$(\overset{\curvearrowright}{F}_1, \overset{\curvearrowright}{F}'_1) \text{ и } (\overset{\curvearrowright}{Q}_1, \overset{\curvearrowright}{Q}'_1)$$

Из теоремы об эквивалентности пар следует, что для доказательства достаточно рассмотреть две пары, точки приложения сил которых A и B совпадают.



Действие рассматриваемых двух пар эквивалентно действию одной пары $(\overset{\curvearrowright}{R}_1, \overset{\curvearrowright}{R}'_1)$ момент которой равен

$$\overset{\curvearrowright}{M} = \overrightarrow{AB} \times \overset{\curvearrowright}{R}_1 = \overrightarrow{AB} \times (\overset{\curvearrowright}{F}_1 + \overset{\curvearrowright}{Q}_1) = \overrightarrow{AB} \times \overset{\curvearrowright}{F}_1 + \overrightarrow{AB} \times \overset{\curvearrowright}{Q}_1 = \overset{\curvearrowright}{M}_1 + \overset{\curvearrowright}{M}_2$$

Доказательство для общего случая N пар теперь можно просто получить по индукции.

Условия равновесия тела под действием системы пар сил

Для того чтобы тело под действием системы пар M_1, M_2, \dots, M_N находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы результирующая пара была эквивалентна нулю:

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^N \vec{M}_k = 0$$

Для проекций на оси координат получаем три скалярных уравнения:

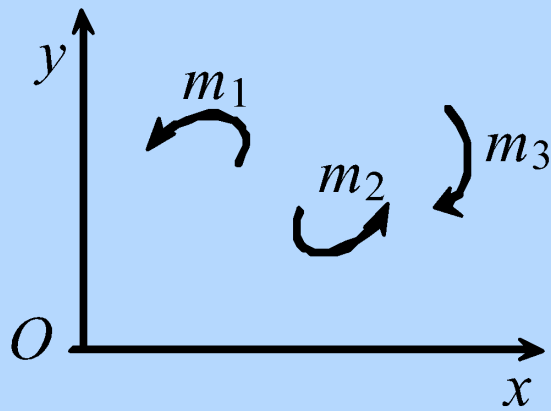
$$M_x = \sum_{k=1}^N M_{kx} = 0 \quad M_y = \sum_{k=1}^N M_{ky} = 0 \quad M_z = \sum_{k=1}^N M_{kz} = 0$$

Условия равновесия тела под действием системы пар сил

Пример решения задачи

Задача. В плоскости Oxy расположены три пары сил.

Определить момент пары m_3 , при котором эта система пар находится в равновесии, если $m_1 = 510 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_2 = 120 \text{ Н}\cdot\text{м}$



Решение. Моменты пар m_1 , m_2 положительны. Следовательно, уравнение равновесия пар имеет вид:

$$510 + 120 - m_3 = 0$$

$$\rightarrow m_3 = 670 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае можно найти равнодействующую двух сил, направленных в противоположные стороны, линии действия которых параллельны?
2. Чему равна эта равнодействующая?
3. Можно ли силу разложить на две ей параллельные, но направленные противоположно?
4. Что такое пара сил?
5. Как найти плечо пары?
6. Чему равен момент пары?
7. Какие пары являются эквивалентными?

Вопросы для самоконтроля

8. Почему момент пары сил называют свободным вектором?
9. Как сложить пары?
10. Могут ли две эквивалентные пары иметь разные плечи?
11. Можно ли пару сил уравновесить одной силой?
12. Сформулируйте условия равновесия тела под действием системы пар. Запишите уравнения равновесия тела под действием системы пар.

Тема следующей лекции

***Приведение произвольной
системы сил к центру***

Спасибо за внимание!

