

# Основные понятия деформации кручения

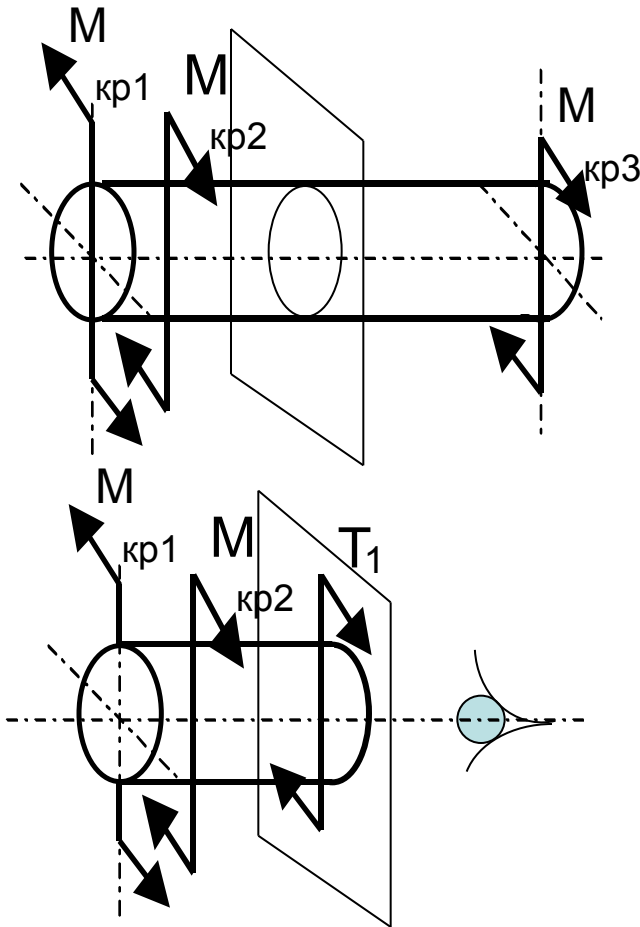
Под **кручением** понимают такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только один силовой фактор - это крутящий момент

Брус в поперечном сечении, которого действует крутящий момент, называется **валом**.

Крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от этого сечения.

$$T_1 = -M_{кр1} + M_{кр2}$$

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец вала со стороны сечения момент направлен по ходу часовой стрелки. Момент  $T_1$  – отрицательный



# Закон Гука при кручении

Основные допущения:

1. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации.
2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.
3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

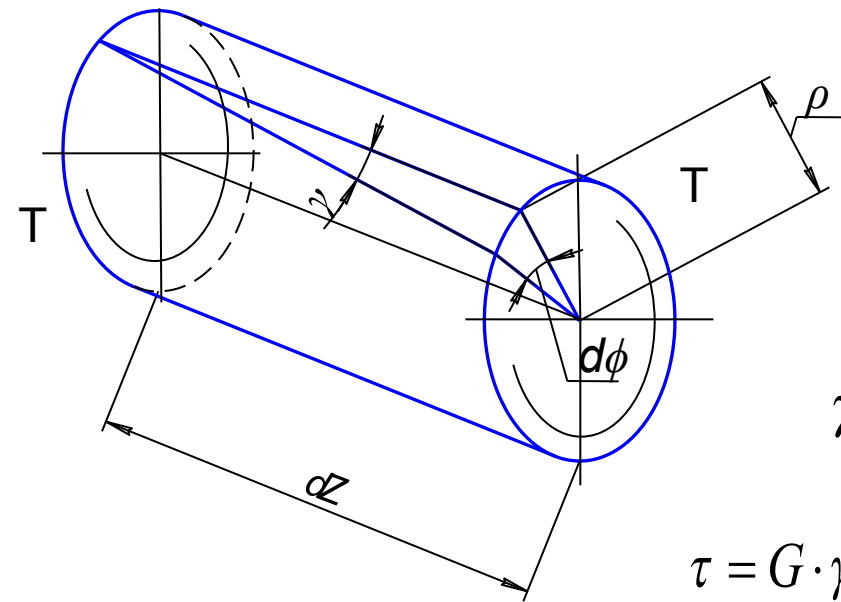
При кручении наблюдается плоское напряженное состояние чистого сдвига и соблюдается закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma,$$

Рассмотрим особенности деформации бруса при кручении

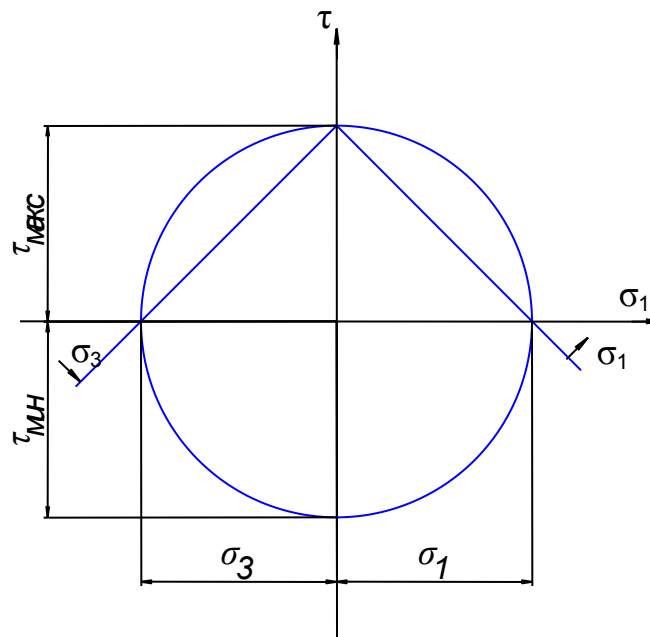
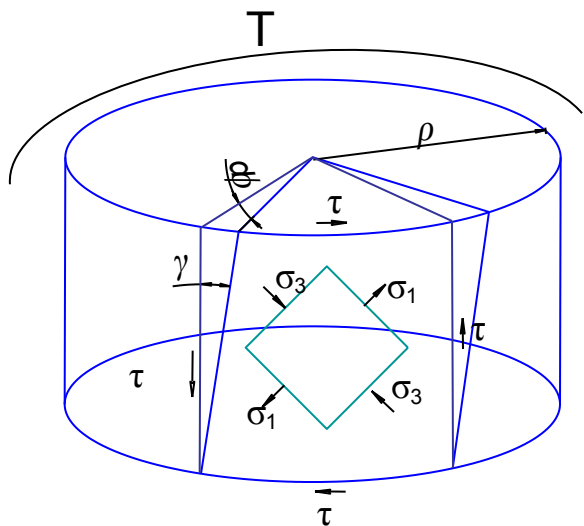
$$\gamma \cdot dz = d\varphi \cdot \rho \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \longleftarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho = \theta \cdot \rho$$



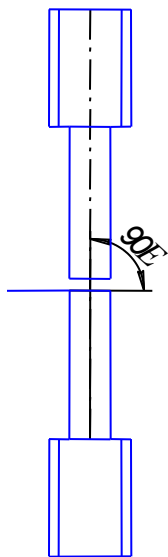
**В поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения, направление которых, в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эти точки с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра.**

# Напряженное состояние при кручении

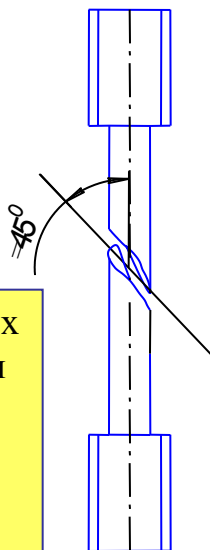


$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$

Возможны следующие варианты разрушения образцов

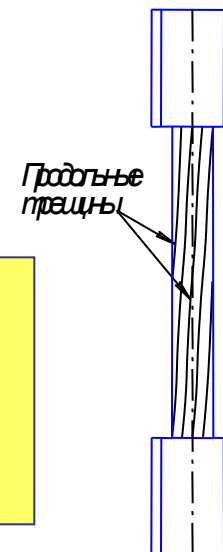


От действия касательных напряжений в плоскости поперечного сечения  
Пластичные материалы



От действия главных напряжения в плоскости наклоненной под  $45^\circ$  к оси образца.

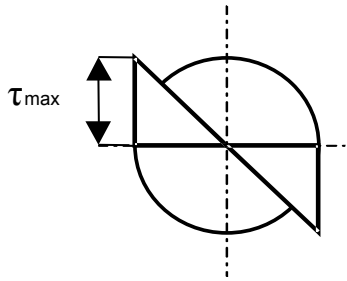
Хрупкие материалы (чугуны, закаленные стали)



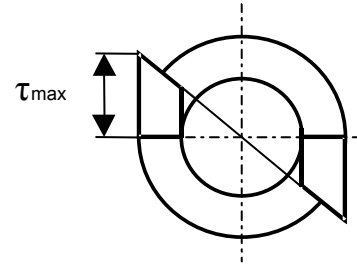
От действия касательных напряжений в плоскости параллельной образующей

Анизотропные материалы (древесина)

# Напряжения при кручении



$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$



**Полярный момент инерции** характеризует, влияние размеров и форма поперечного сечения вала на его способность сопротивляться угловым деформациям

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ Для круглого сечения}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4 (1 - \alpha^4)}{32} \text{ Для трубчатого сечения}$$

$$2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = I_p$$

здесь  $\alpha = d_1/d$ ,  $d_1$  – внутренний диаметр трубы,  $d$  – наружный диаметр трубы  
Полярный момент инерции выражается в  $\text{м}^4$  ( $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ).

**Полярный момент сопротивления** характеризует влияние геометрических размеров и формы поперечного сечения вала на его прочность.

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \text{ Для круглого сечения}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3 (1 - \alpha^4)}{16} \text{ Для трубчатого сечения}$$

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  прямо пропорциональны крутящему моменту  $T$  в опасном сечении и обратно пропорциональны полярному моменту сопротивления сечения  $W_p$ :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

# Условие прочности при кручении

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брусе не должны превышать соответствующих допускаемых значений

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

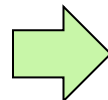
Допускаемые  
напряжения

$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{по 3 теории прочности}$$

$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad \text{по 4 теории прочности}$$

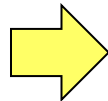
Из условия прочности вытекает три типа *задач при кручении*

. Задача проектного расчета



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau_p]}}$$

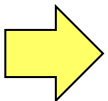
Для круглого сечения



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau_p]}}$$

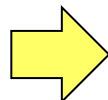
Для трубчатого сечения

. Задача проверочного расчета



$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

. Определение допускаемого момента



$$[T] \leq [\tau_{кр}] W_p$$

# Деформации при кручении.

## Условие жесткости при кручении

При кручении различают угол закручивания  $\varphi$  и относительный угол закручивания  $\theta$

Закон Гука при кручении

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Напряжения при кручении

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

$$\theta = \frac{T}{GI_p}$$

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

**Условие жесткости при кручении.**

Наибольший относительный угол закручивания, возникающий в скручиваемом брусе не должен превышать соответствующих допусковых значений

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

Где  $[\theta]$  – допусковые относительный угол закручивания.  $[\theta]=0,0045 \dots 0,02$  рад/м

# Потенциальная энергия деформации

Полная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{T \cdot \varphi}{2} = \frac{T}{2} \cdot \frac{Tl}{GI_p} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

Удельная потенциальная энергия (полная)

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right]$$

$$u = \frac{1}{2E} \left[ 2\tau^2 + 2\mu\tau^2 \right] = \frac{(1+\mu)}{E} \tau^2$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) =$$
$$= \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (2\tau^2 + \tau^2) = \frac{1+\mu}{E} \tau^2$$

При кручении

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$