ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ)

Некоторые свойства скалярных и векторных полей

1. Оператор Гамильтона
2. Градиент
3. Поток вектора
4. Дивергенция
5. Теорема Остроградского-Гаусса
6. Циркуляция
7. Ротор
8. Теорема Стокса

Оператор Гамильтона

Написание формул векторного анализа значительно упрощается и облегчается, если ввести векторный дифференциальный оператор ∇ или оператор Гамильтона.

«∇» – оператор «набла» («Гамильтониан», оператор Гамильтона)

Под этим оператором подразумевается вектор с компонентами:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Сам по себе этот вектор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетание со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается.

$$\nabla\varphi \equiv grad\,\varphi$$

$$\nabla\vec{a} \equiv div\,\vec{a}$$

$$[\nabla\vec{a}] \equiv rot\,\vec{a}$$

Оператор «набла» - дифференциальный оператор, влияющий на все функции, стоящие под ним.

Градиент

Градиент – дифференциальный векторный оператор, который используется для характеристики <u>скалярных</u> полей вида:

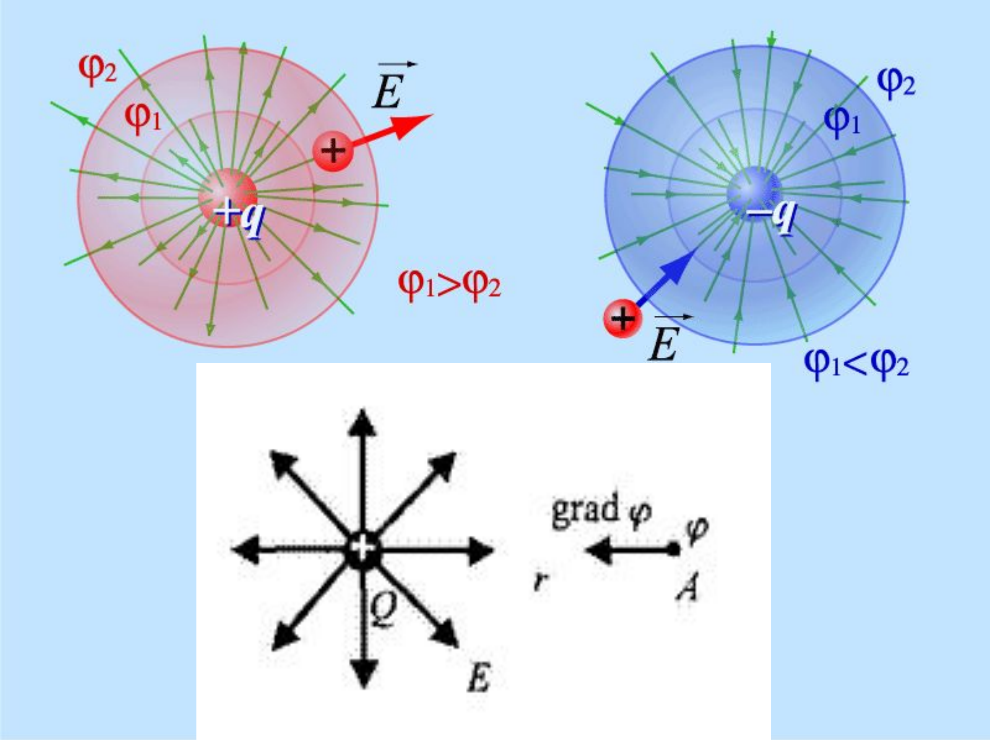
$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

$$\boldsymbol{grad\ \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Градиент показывает направление изменения скалярной величины.

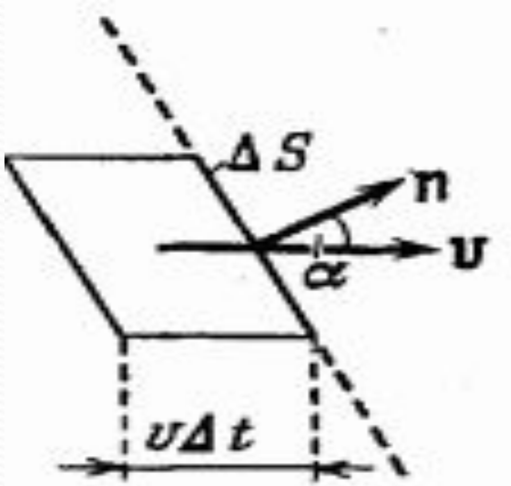
Например, в случае электрических полей градиент потенциала показывает направление изменения энергетической характеристики электрического поля – потенциала и одновременно представляет собой силовую характеристику – напряженность поля.

Таким образом, градиент позволяет связать между собой скалярные и векторные величины.



Поток вектора

Поток вектора – объем жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность *S*, называется потоком жидкости через эту поверхность (такое определение можно принять к рассмотрению с точки зрения гидродинамики).



Разобьем поверхность на элементарные участки величины ΔS. За время Δt через участок ΔS пройдет объем жидкости ΔV:

$$\Delta V = \Delta S\cos\alpha \cdot v\Delta t$$

Тогда поток через поверхность ΔS найдем по определению как элементарный объем ΔV, деленный на время Δt: $\Delta\Phi = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

$$\Delta\Phi = \Delta S \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha$$

Перейдя к элементарным приращениям, т.е. к дифференциалам, получим:

$$d\Phi = v \cdot \cos\alpha\, dS$$

Ели считать, что $\boldsymbol{v} \cdot \cos\alpha$ - это проекция $\vec{v}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS, то $d\Phi = v_n dS$

Введем понятие псевдовектора элементарной площадки :

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Модуль этого вектора равен абсолютному значению величины площади рассматриваемой элементарной поверхности, а направление псевдовектора совпадает с направлением внешней нормали к площадке.

$$\Phi_v = \int_s \vec{v}\, d\vec{S} = \int_s v_n dS$$

$$\Phi_a = \int_s \vec{a}\, d\vec{S} = \int_s a_n dS$$

Поток вектора – алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам. Принято вычислять поток, выходящий наружу, т.е. совпадающий с внешней нормалью. При изменении направления нормали изменяется знак потока.

Дивергенция – расхождение (лат.)

Дивергенция показывает наличие (отсутствие) источников (стоков) поля в данной точке объема *V*, ограниченном замкнутой поверхностью *S*.

$\Phi_a = 0$, если: 1) в объеме *V*, ограниченном *S*, жидкость не возникает и не исчезает;

2)внутри поверхности имеются <u>источники</u> или <u>стоки</u> жидкости, т.е. точки, в которых жидкость поступает в объем либо удаляется из объема; количество истоков равно количеству стоков;

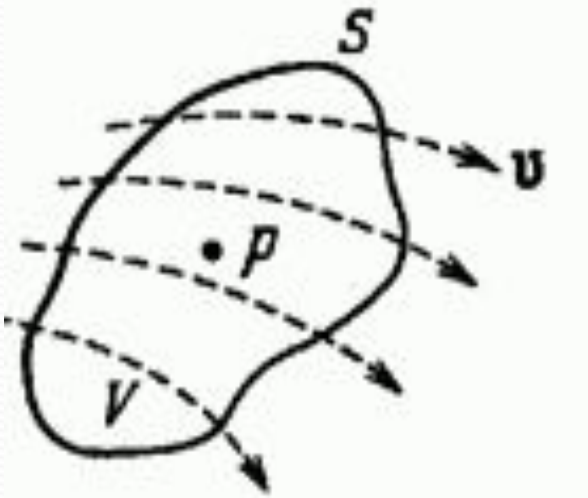
$\Phi_a > 0$ при преобладании источников над стоками.

$\Phi_a < 0$ при преобладании стоков над источниками.

Средняя удельная мощность источников, заключенных в объеме *V*: Φ_v/V

$$\mathbf{div}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_v}{V}$$

Возьмем в окружности т. *P* воображаемую замкнутую поверхность *S*.



$$div\,\vec{\boldsymbol{a}} = lim_{V\to 0}\frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \vec{\boldsymbol{a}}\,d\vec{\boldsymbol{S}}$$

Теорема Остроградского-Гаусса

Зная дивергенцию вектора в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров.

$div\,\vec{v}\,dV$ **- мощность источников, заключенных в элементарном объеме *dV*.**

Сумма таких произведений дает суммарную алгебраическую мощность источников, заключенных в объеме V. Т.к. жидкость несжимаема, то суммарная мощность источников равна потоку жидкости, вытекающему через поверхность, охватывающую данный объем.

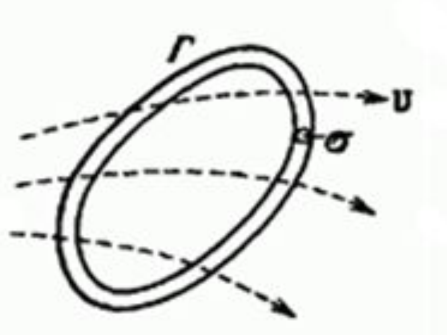
$$\oint_S \vec{v}\,d\vec{S} = \int_V div\,\vec{v}\,dV$$

$$\oint_S \vec{a}\,d\vec{S} = \int_V div\,\vec{a}\,dV$$

Интеграл в левой части вычисляется по произвольной замкнутой поверхности ***S***, а в правой части – по объему ***V***, ограниченному этой поверхностью.

Циркуляция

Представим себе замкнутую линию – контур Г. Предположим, что каким – либо способом заморозили мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением тонкого <u>замкнутого</u> канала постоянного сечения. В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в канале будет либо неподвижной, либо начнет двигаться (циркулировать) в одном из двух возможных направлений.



Циркуляция $\vec{\upsilon}$ по Г = $\upsilon \cdot l$, т.к. канал имеет постоянное сечение, то

$$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = const$$

В момент затвердевания стенок у частицы будет погашена составляющая υ, перпендикулярная к стенке, и останется лишь υ_l – касательная к контуру.

Импульс частицы жидкости меняет лишь направление, а не величину, т.к. жидкость идеальна:

$$\rho\sigma\upsilon l = \oint_{\Gamma} \rho\sigma\upsilon_l \, dl$$

Циркуляция $\vec{\upsilon}$ по $\Gamma = \upsilon l = \oint_{\Gamma} \upsilon_l \, dl$

Циркуляция $\vec{a}$ по $\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} a_l \, dl$

Свойство аддитивности: $C = \sum \Delta C_i$

Ротор

Аддитивность C позволяет ввести понятие удельной циркуляции $C = \frac{Ca}{S}$ где S – поверхность, «обтекаемая» циркуляцией:

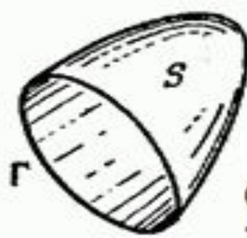
$$\lim_{S\to 0}\frac{Ca}{S}$$

которая ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которой берется циркуляция. Максимальное значение этой величины определяет модуль этого вектора, а направление задается направлением положительной нормали $\vec{n}$. Такой вектор называется ротором (вихрем) вектора $\vec{a}$:

$$(rot\,\vec{a})_n = lim_{S\to 0}\frac{Ca}{S} = lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{\Gamma}\vec{a}d\vec{l}$$

Циркуляция и ротор электростатического поля

Возьмем произвольную поверхность S, опирающуюся на контур Г, для которого вычисляется циркуляция. Согласно теореме Стокса:



$$\int_S [\nabla\vec{E}]d\vec{S} = \oint_{\Gamma}\vec{E}d\vec{l}$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{E}d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_S [\nabla\vec{E}]d\vec{S} = 0$$

- Это возможно, когда $rot\vec{E} = 0$ в любой точке поля.
- Отличительной особенностью электростатического поля является то, что оно безвихревое.

Теорема Стокса

Зная ротор вектора в каждой точке некоторой поверхности ***S***, можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру, ограничивающему эту поверхность. Поверхность разобьем на элементарные площадки, которые можно считать плоскими, чтобы восстановить нормаль к каждой из этих элементарных площадок. Тогда циркуляция вектора по контуру, ограничивающему элементарную площадь:

$$\Delta C \approx (rot\vec{a})_n \Delta S = rot\vec{a}\Delta\vec{S}$$

Используя свойство аддитивности циркуляции С, получим для общего контура Г, ограничивающего всю поверхность S:

$$C = \sum \Delta C \approx \sum rot\vec{a}\,\Delta\vec{S}$$

Осуществим предельный переход, при котором все элементарные площадки ΔS стремятся к нулю:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{l} = \int_S rot\vec{a}\, d\vec{S}$$

Циркуляция вектора по произвольному контуру равна потоку вектора ротора через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.

Электрическое поле в вакууме

Электрический заряд

В настоящее время в современной физике приняты к рассмотрению четыре основных (фундаментальных) типа взаимодействий между элементарными частицами. Перечислим их по убыванию степени интенсивности:

- сильное,
- электромагнитное,
- слабое,
- гравитационное.

Каждый вид взаимодействия описывается при помощи определенных физических величин. Например, сила гравитационного взаимодействия прямо пропорциональна произведению масс частиц, а в случае электромагнитного взаимодействия эта сила прямо пропорциональна произведению зарядов этих частиц.

Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами.

Свойства электрического заряда:

1. **Заряд** всех элементарных частиц **одинаков по модулю**.
2. **Имеются два типа электрических зарядов: положительный** заряд, подобный возникающему заряду на стекле, потертом о кожу; **отрицательный** заряд, подобный возникающему на эбоните, потертом о мех.
3. **Электрический заряд квантуется**, т.е. принимает определенные дискретные значения. Всякий заряд образуется совокупностью элементарных зарядов => **q = N** ē, где ē – элементарный заряд (**ē = 1,6·10^{-19} Кл**). Величина ē очень мала => макроскопические заряды можно считать непрерывно изменяющимися.
4. **Электрический заряд релятивистки инвариантен.** Другими словами, величина заряда, измеряемая в различных ИСО (инерциальных системах отсчета), оказывается одинаковой и не зависит от выбора системы отсчета. Или, величина заряда не зависит от того, покоится этот заряд или движется относительно наблюдателя.
5. **Заряд аддитивен.** Алгебраическая сумма зарядов электрически изолированной системы не может изменяться – **закон сохранения электрического заряда.**

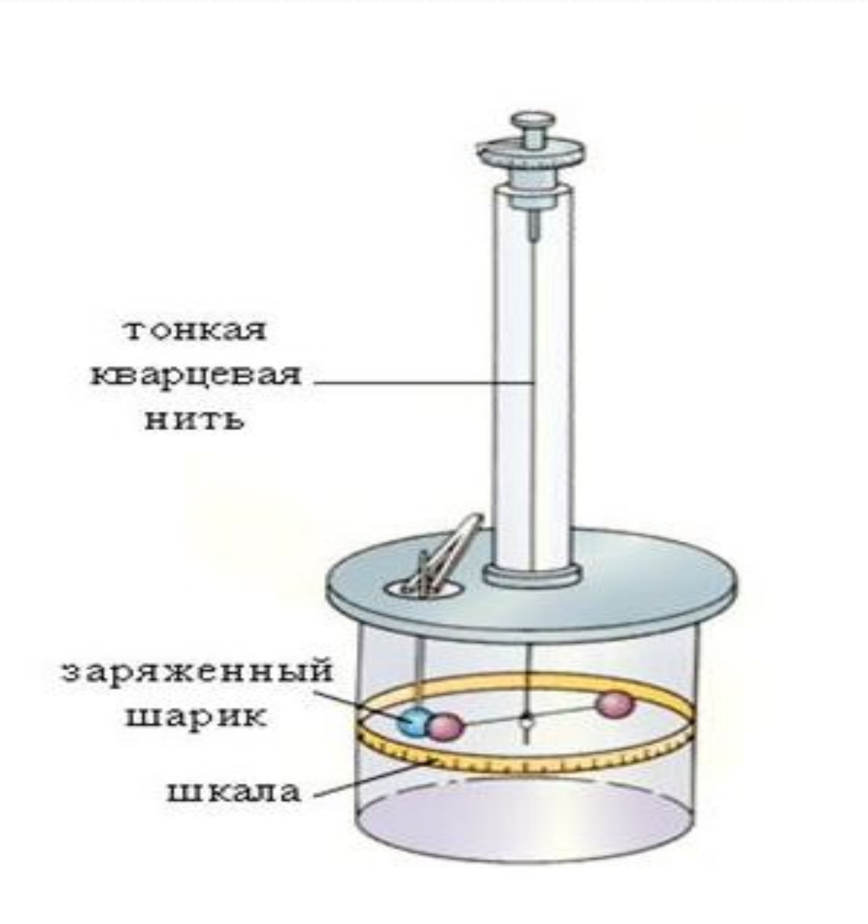
Точечный заряд

- **Точечный заряд** – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от него до других тел, несущих электрический заряд.
- **Точечный заряд** – физическая модель, которую вводят для удобства решения практических и теоретических задач.

Таким образом, электрический заряд является одним из фундаментальных понятий в физике. С одной стороны, электрический заряд мы рассматриваем как физический объект (особенно эта касается точечного заряда). С другой стороны, заряд представляет собой характеристику частицы (которая выступает сама как объект) и он определяется как физическая величина, принимающая числовые значения.

Закон Кулона – основной закон электростатики (1785 г.)

Крутильные весы



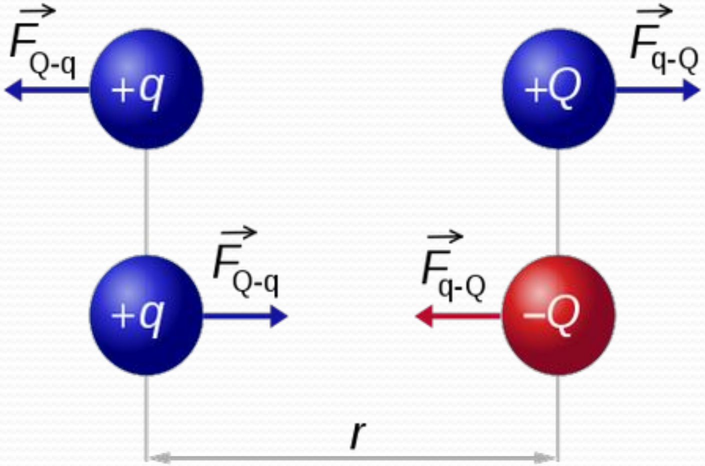
Генри Кавендиш

(1731 – 1810 гг.) – английский физик и химик открыл основной закон электростатики в 1771 г.

Шарль Огюстен Кулон (1736-1806) - французский физик и инженер

Сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов пропорциональна произведению модулей этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Кулоновская сила – центральная, направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды.



$$|\vec{F}_{Q\text{-}q}| = |\vec{F}_{q\text{-}Q}| = k\,\frac{|q \times Q|}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2};\ \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}\text{ или }\left(\frac{Ф}{м}\right)$$

Электрическое поле

Электрическое поле – особый вид материи, при помощи которой осуществляется взаимодействие между электрическими зарядами. Точно также как всякий объект, обладающий гравитационной массой $\boldsymbol{m}$, создает вокруг себя поле тяготения, так и всякий электрический заряд (в данном случае рассматриваем его как физический объект) меняет определенным образом свойства окружающего его пространства.

Свойства электрического поля

1. Электрические заряды – источники (стоки) поля, то есть другими словами, электрическое поле порождается электрическими зарядами.
2. Электрическое поле обнаруживается по действию на заряд.
3. Электрическое поле действует на внесенные в него заряды с некоторой силой.

Если заряды, создающие поле неподвижны относительно наблюдателя, то такое поле называется **электростатическим**.

Как и в случае гравитационных полей, электрическое поле имеет две основные характеристики: силовую (напряженность) и энергетическую (потенциал).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$$

$$[E]=[1\ \text{Н/Кл}]=[1\ \text{В/м}]$$

Чтобы сила, действующая на заряд, характеризовала поле в данной точке, этот заряд (пробный) должен быть точечным.

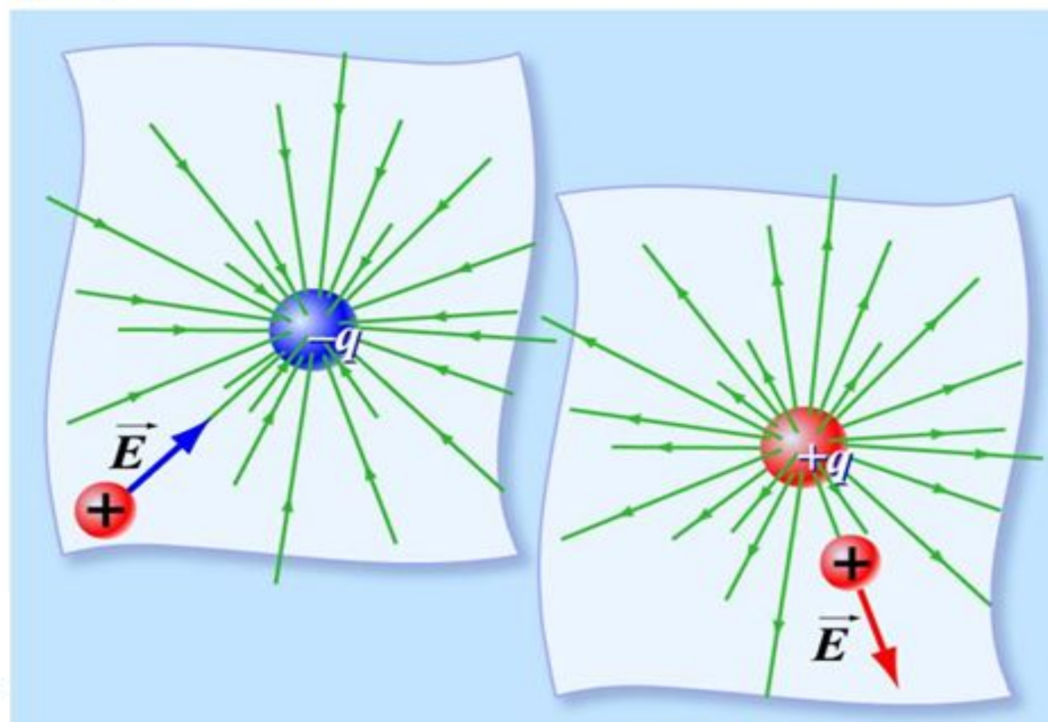
Вектор напряженности направлен от заряда, если заряд положительный, и к заряду, если он отрицательный

$$\vec{\mathcal{F}} = q_{\text{пр}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r\right)$$

Здесь $\vec{e}_r$ - орт $\vec{r}$.

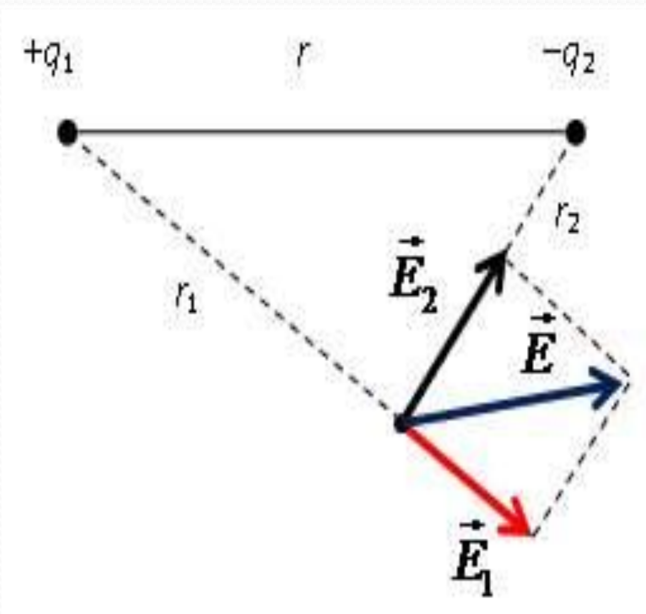
$$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{F}_+$$

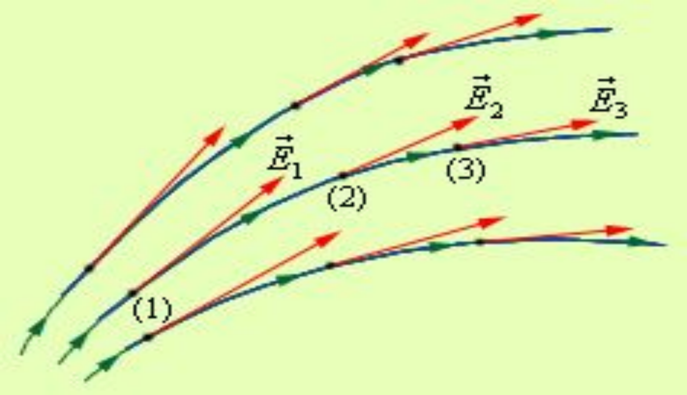
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$



Принцип суперпозиции электрических полей

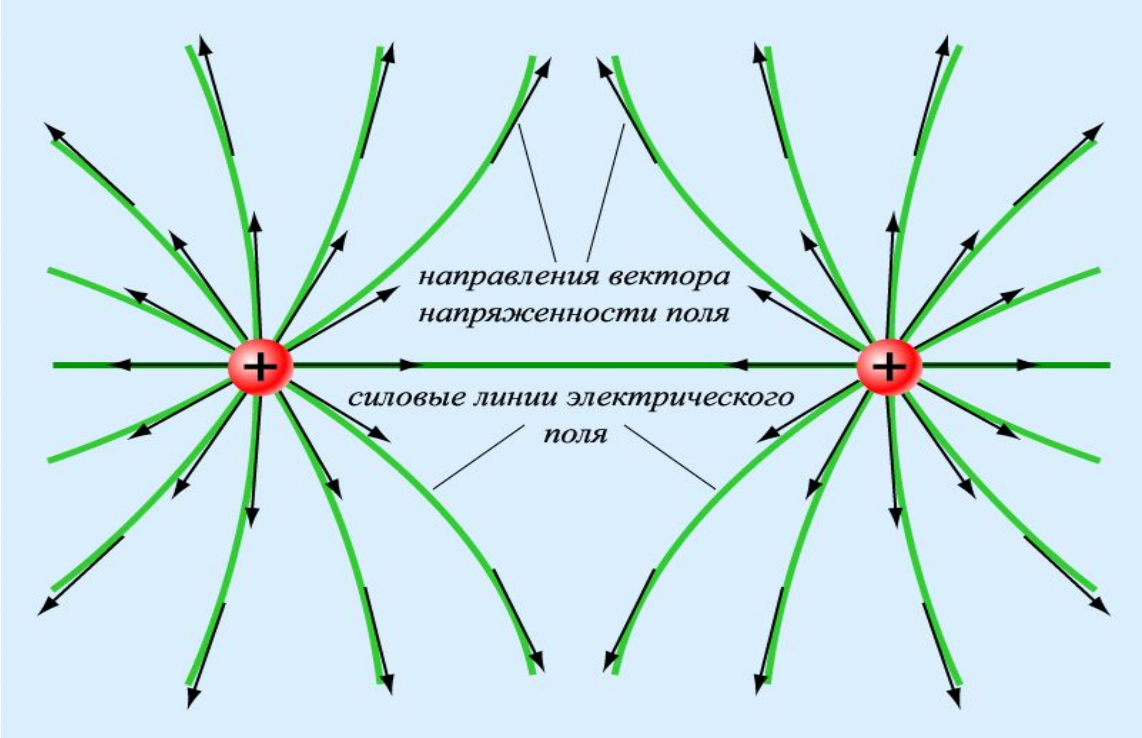
- *Напряженность поля системы зарядов равна* ***векторной*** *сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности.*

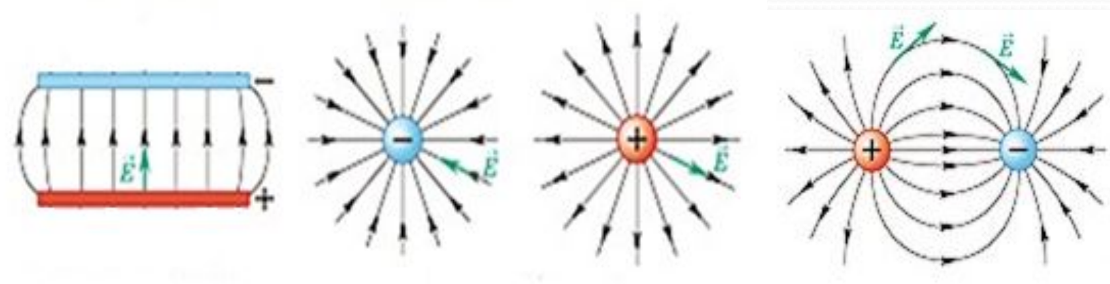




Графическое изображение электрических полей

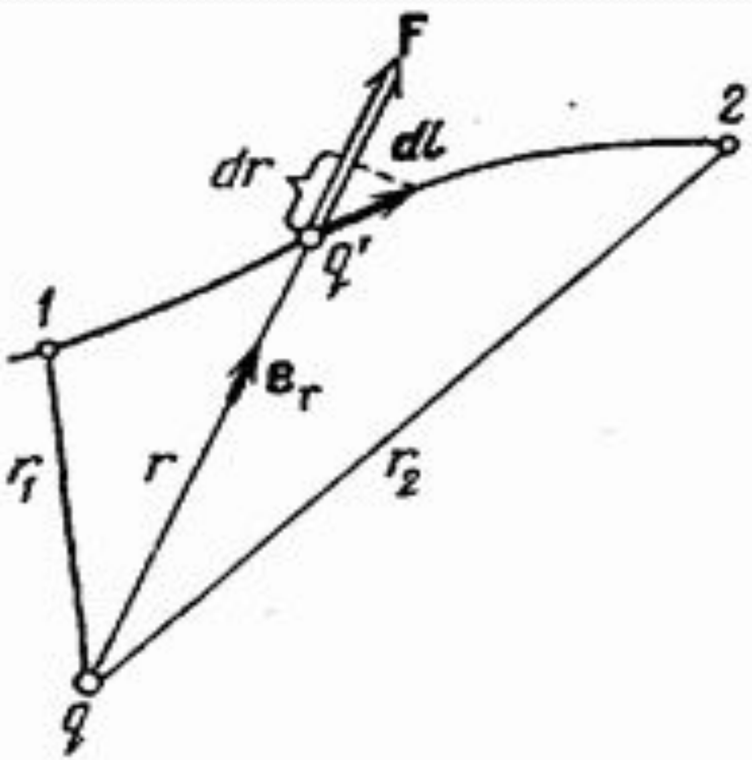
- Электрическое поле можно описать с помощью линий напряженности, которые называют **силовыми линиями**. Линии напряженности проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора напряженности. Густота линий выбирается таким образом, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно числовому значению вектора напряженности.





Потенциал электрического поля

Рассмотрим поле, создаваемое точечным неподвижным зарядом q.



$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r^2}\vec{e}_r = \mathcal{F}(r)\vec{e}_r ,$$

- где $\vec{e}_r$ - орт радиус – вектора , определяющего положение заряда q ‘ относительно заряда q.
- Эта сила центральная. Центральное поле сил консервативно => Работа *A*, которая совершается силами поля над зарядом q’ , не зависит от пути.
- $A_{12} = \int_1^2 \mathcal{F}(r)\vec{e}_r\, d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ - элементарное перемещение q’.

Работа сил поля

$$A_{12} = \int_1^2 \mathcal{F}(r)dr$$

$$A_{12} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{d_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\,q'}{r_1} - \frac{q\,q'}{r_2}\right)$$

Работу сил консервативного поля можно представить как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_1 - W_2$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r} + const$$

Потенциальная энергия электростатического поля

Значение константы выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль. Тогда

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r}$$

- Используем заряд q‘ в качестве пробного. Разные пробные заряды будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией, но

$$\varphi = \frac{W}{q_{пр}}$$ одно и то же

Энергетическая характеристика поля – потенциал – численно равен потенциальной энергии, который обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Физический смысл и единицы измерения потенциала

За **единицу потенциала** принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить *A = 1Дж*:

$$1[\varphi] = 1\text{В} = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

Используются единицы *W* и *A*:

1эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл · 1В = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж (*1кэВ, 1МэВ, 1ГэВ*)

$$W = q \cdot \varphi$$

$$A = W_1 - W_2 = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда q на ($\varphi_1 - \varphi_2$), т.е. на убыль потенциала.

Если заряд из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где $\varphi = 0$), то $A_\infty = q \cdot \varphi$ => потенциал численно равен *A*, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. Такую же работу *A* надо совершить против сил электрического поля, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Связь между силовой и энергетической характеристиками электростатического поля

Любое поле описывается при помощи двух основных характеристик: силовой (напряженности) и энергетической (потенциала)

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad W = q\varphi$$

$$\vec{F} = -\nabla W$$

$$q\vec{E} = -\nabla q\varphi$$

$$\underline{\vec{E} = -\nabla\varphi}$$

Работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из т.1 в т.2:

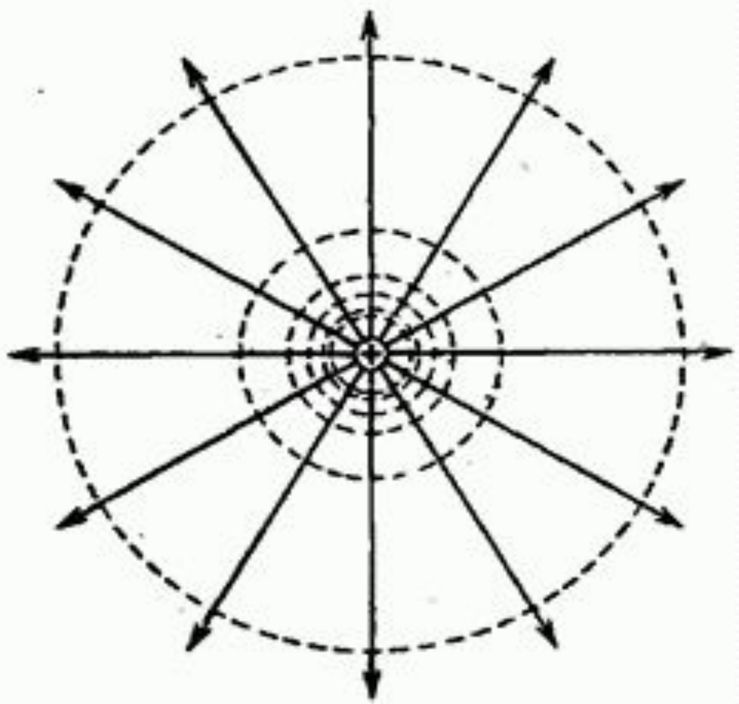
$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 q\vec{E}\,d\vec{l} \\ A_{12} &= q(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющий т.1 и т.2, т.к. работа сил поля не зависит от пути. При обходе по замкнутому контуру:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

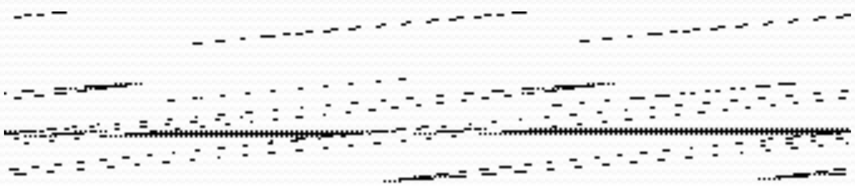
- **только для электростатического поля**

Эквипотенциальные поверхности



Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной. Эквипотенциальную поверхность, можно провести через любую точку поля => этих поверхностей может быть построено множество. Условились проводить поверхности так, чтобы разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ для двух соседних поверхностей была одна и та же. По густоте эквипотенциальных поверхностей судят о величине напряженности. Чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал φ => тем больше значение напряженности.

Электрический диполь – система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q, -Q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.



- Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от $-Q$ и $+Q$ и равный расстоянию между ними, называется плечом диполя .
- Вектор $\vec{P} = |Q|\vec{l}$, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению $|Q| \cdot \vec{l}$, называется электрическим моментом диполя или дипольным моментом.
- Согласно принципу суперпозиции:

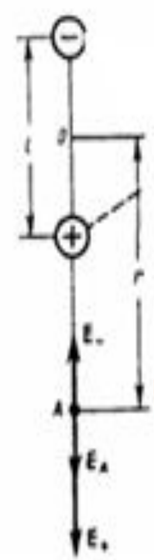
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Напряженность поля

на продолжении оси диполя в т. А

направлена по оси диполя и по модулю:

$$E_A = E_+ - E_-$$



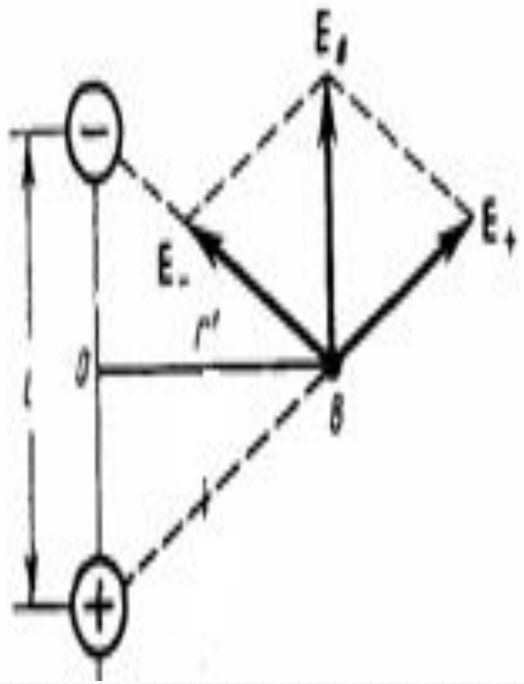
r – расстояние от т.А до середины диполя

$$\frac{l}{2} \ll r$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{Q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

Напряженность поля на перпендикуляре, восстановленном на оси из его середины



т.В равноудалена от зарядов =>

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r')^2+\frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r')^2}$$

где r' - расстояние от т. В до середины плеча диполя.

Из подобия равнобедренных треугольников

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{(r')^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r'} =>$$

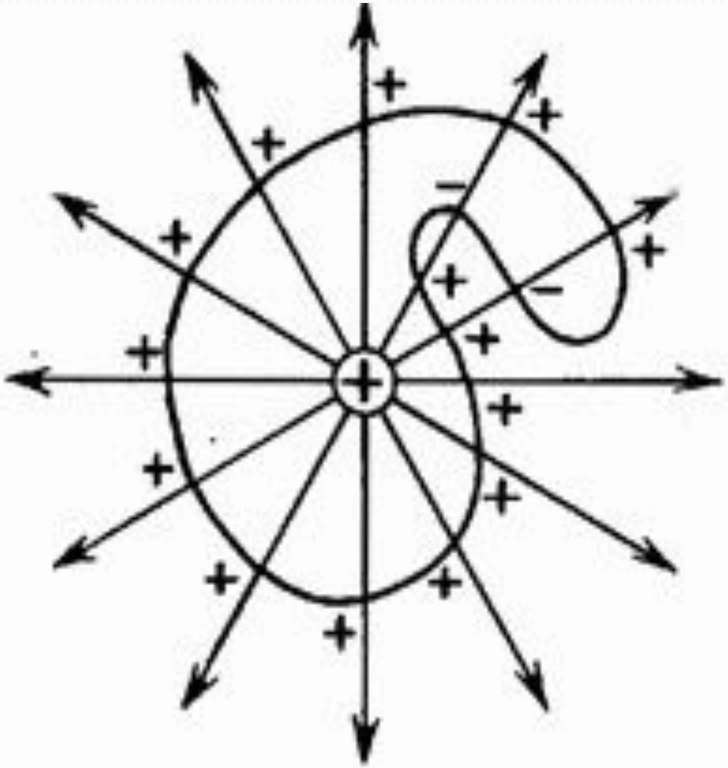
$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{(r')^3}$$

Теорема Гаусса

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(1777-1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист

Один из основных законов электродинамики, входящий в систему уравнений Максвелла



Поток вектора напряженности $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Знак потока совпадает со знаком заряда

Нечетное число пересечений, в конечном счете, сводится к одному пересечению, т.к. $\Phi_E > 0$, если линии E выходят из поверхности,

и $\Phi_E < 0$ для линий, входящих в поверхность.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее $\Phi_E = 0$, т.к. число линий напряженности $\vec{E}$ входящих в поверхность, равен числу линий напряженности $\vec{E}$, выходящих из нее.

Допустим, что внутри замкнутой поверхности находится N точечных зарядов $q_1, q_2, q_3 \ldots$

В силу принципа суперпозиции напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S \left(\sum \vec{E}_i\right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \vec{E}_i\, d\vec{S}$$

Теорема Гаусса (интегральная форма): поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, дел

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Теорема Гаусса для вектора напряженности в дифференциальной форме

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами, отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с конечной плотностью ρ.

Объемная плотность заряда определяется по аналогии с плотностью массы как отношение dq к физически бесконечно малому объему dV, в которой заключен этот заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV$$

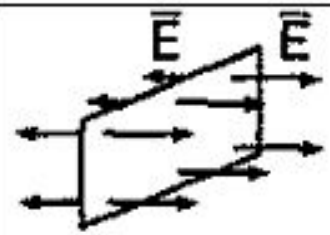
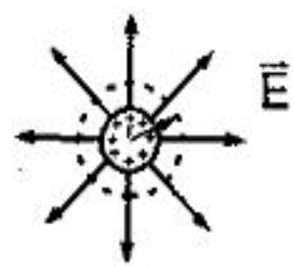
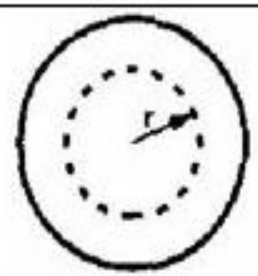
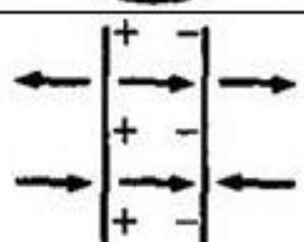
$$\Downarrow$$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Применение теоремы Гаусса

Электростатическое поле	*схема*	*пояснения*	*напряженность*	*примечания*
Бесконечной равномерно заряженной плоскости		σ – поверхностная плотность заряда σ - постоянна	$E = \frac{\lvert\sigma\rvert}{2\varepsilon_0}$	Е не зависит от расстояния до плоскости
Вне шара, равномерно заряженного по поверхности или объему		Шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре	$E = \frac{\lvert q\rvert}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	Напряженность одинакова, независимо от того, заряжен ли шар по объему или по поверхности
Внутри шара, равномерно заряженного по поверхности или объему		ρ – объемная плотность заряда $\rho = \frac{q}{V}$	$E = 0$	Шар равномерно заряжен по поверхности
			$E = \frac{\lvert\rho\rvert r}{3\varepsilon_0}$	Шар равномерно заряжен по объему
Двух параллельных разноименно и равномерно заряженных плоскостей		Поверхностные плотности зарядов на обеих плоскостях одинаковы	Внутри конденсатора $E = \frac{\lvert\sigma\rvert}{\varepsilon_0}$	Во внешнем пространстве результирующее поле равно 0

Электрическое поле в диэлектриках

Полярные и неполярные молекулы

- Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Идеальных изоляторов в природе нет. Все вещества могут проводить электрический ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят в 10^{15} - 10^{20} раз хуже, чем вещества, называемые проводниками.
- Если диэлектрик внести в электрическое поле, то и поле и диэлектрик претерпевают существенные изменения.
- Всякая молекула представляет собой систему с суммарным *q*=0. Линейные размеры системы ~ 10 Å.
- Поле, создаваемое подобной системой, определяется величиной и ориентаций дипольного эл. момента:

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r_i}$$

- Поведение молекулы во внешнем электрическом поле определяется дипольным моментом => молекула как в отношении создаваемого ею поля, так и в отношении испытываемых ею во внешнем поле сил эквивалентна диполю.
- «+» *q* этого диполя = суммарному *q* ядер и помещается в «центре тяжести» «+» зарядов; «-» *q*= суммарному *q* ē - в и помещается в «центре тяжести» «-» зарядов.
- *Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется: результирующий дипольный момент становится отличным от нуля.*
- В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, берут дипольный момент единицы объема – поляризованность диэлектрика :

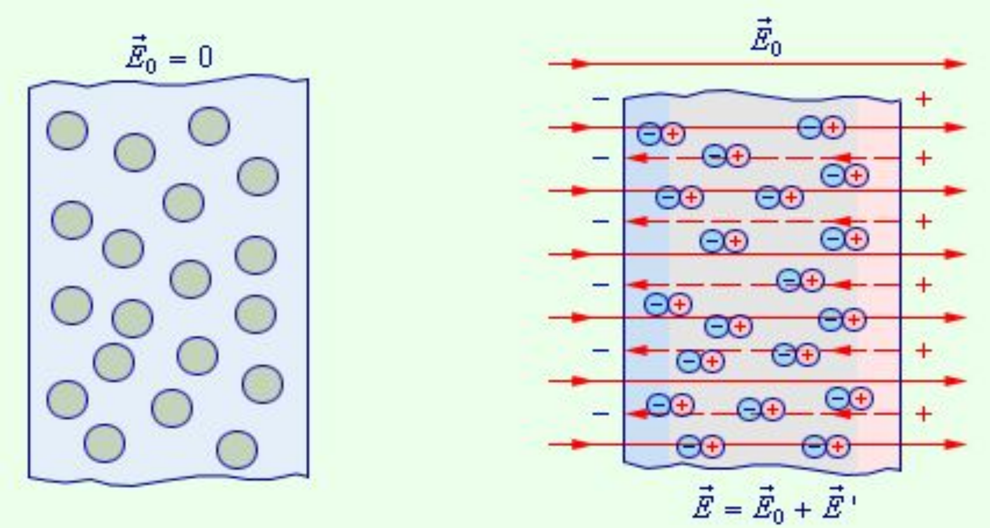
$$\vec{P}_V = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i ,$$

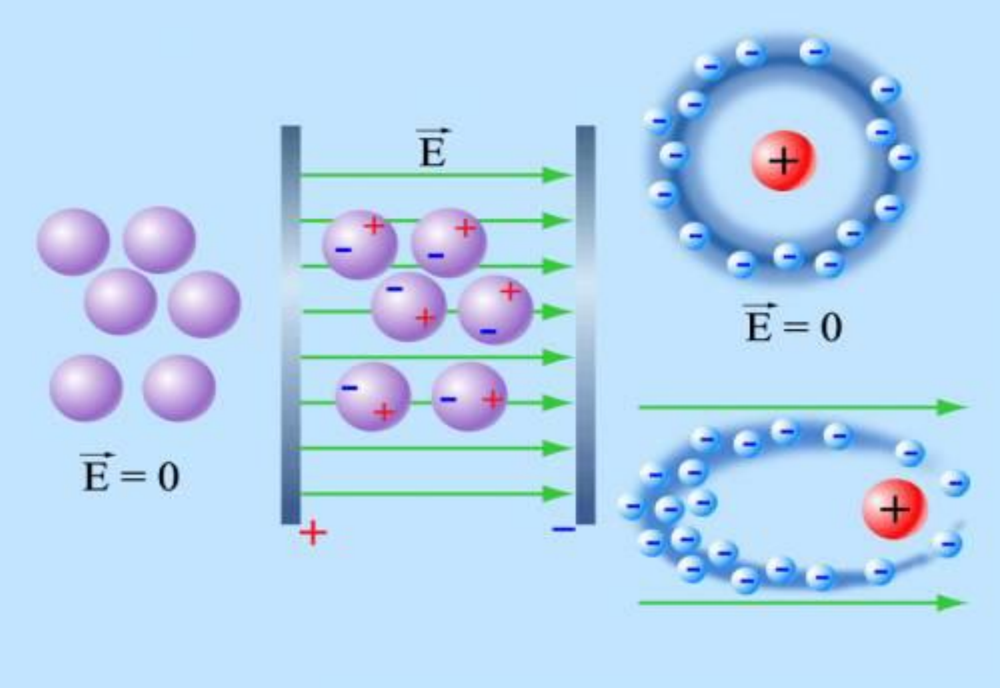
Неполярные молекулы

- У симметричных молекул (H_2, O_2, N_2) в отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести «+» и «-» зарядов совпадают. В этом случае такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом.
- Под действием внешнего электрического поля заряды в неполярной молекуле смещаются друг относительно друга: положительные по направлению поля, отрицательные – против. В результате молекула приобретает дипольный момент:

$$\vec{p} = \beta \varepsilon_0 \vec{E},$$

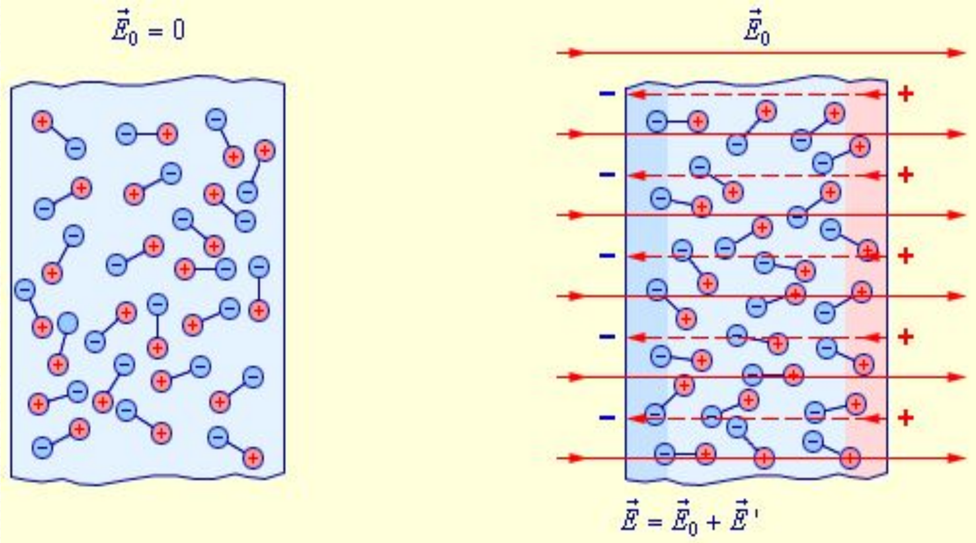
где β - поляризуемость молекулы.



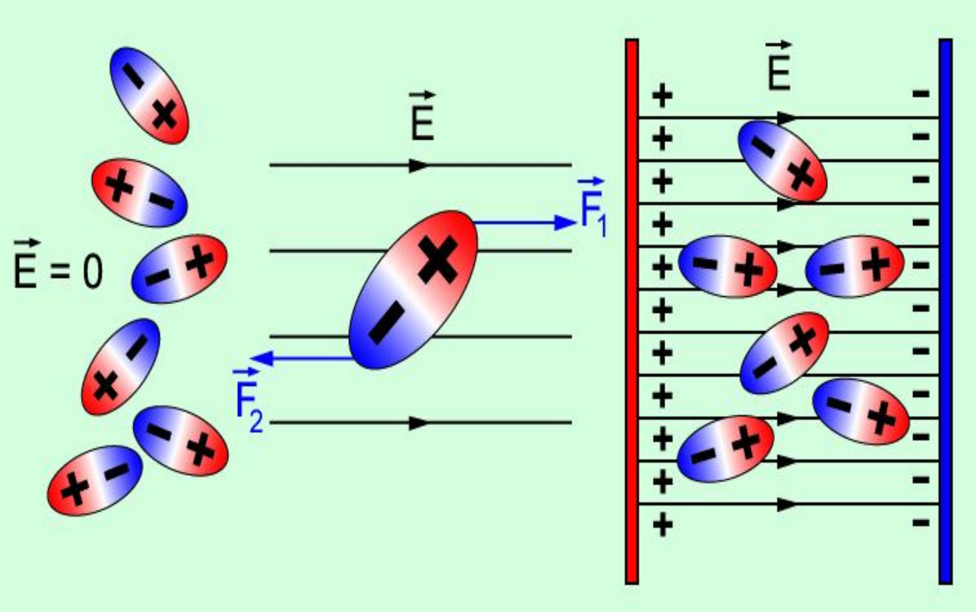


Полярные молекулы

- У несимметричных молекул (*CO, NH, HCl* и т.п.) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом.
- Процесс поляризации неполярной молекулы протекает таким образом, как если бы «+» и «-» заряды молекулы были связаны упругими силами – упругий диполь.
- В отсутствии внешнего поля дипольные моменты такого диэлектрика распределены в пространстве хаотично.



- Ориентирующему действию электрического поля стремится помешать тепловое движение молекул. В результате диполи преимущественно ориентируются по полю.
- Диэлектрическая восприимчивость обратно пропорциональна абсолютной температуре.



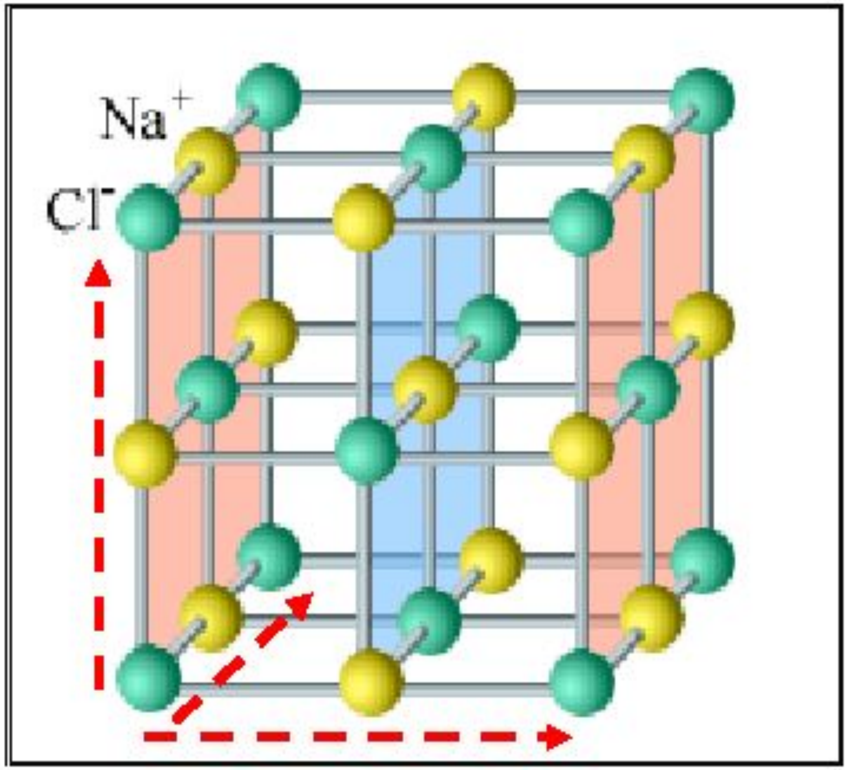
Ионные кристаллы

Третью группу диэлектриков (*NaCl*, *KCl*, *KBr*…) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. В ионных кристаллах отдельные молекулы утрачивают свою обособленность. Весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована «+», а другая «-» ионами. При действии на ионы кристалла внешнего поля обе решетки сдвигаются друг относительно друга, что приводит к поляризации диэлектрика.

Для изотроп риков любого типа:

$$\vec{p} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость, бе размерная величина, не зависящая от $\vec{E}$.



Поле внутри диэлектрика

- Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными. Связанные заряды в поле могут лишь немного смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.
- Заряды, которые, хотя и находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, называются сторонними (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.) или свободными.
- Поле в диэлектрике является суперпозицией поля $E_{стор.}$, создаваемого сторонними зарядами q, и поля $E_{связ.}$ связанных зарядов. В качестве характеристики поля используется усредненное по физически бесконечному малому объему V значение величины $\boldsymbol{E}$.

- Результирующее поле называется микроскопическим или истинным:

$$E_{микро} = E_{стор.} + E_{связ.}$$

$$\vec{E} = <\vec{E}_{стор}> + <\vec{E}_{связ}>$$

$$<\vec{E}_{стор}> \Rightarrow \vec{E}_0, \quad <\vec{E}_{связ}> \Rightarrow \vec{E}'$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

В отсутствие диэлектриков: $\vec{E} = \vec{E}_0$

Теорема Гаусса для поля вектора поляризованности P в интегральной и дифференциальной формах

Представим внутри диэлектрика замкнутую поверхность *S*. При включении поля эту поверхность пересечет связанный заряд q'

$$q'_{\text{выш}} = \oint_S dq' = \oint_S \vec{P}\,d\vec{S}$$

В результате в объеме *V*, ограниченном поверхностью *S*, возникнет избыточный связанный заряд:

$$q'_{\text{изб}} = -q'_{\text{выш}} = -\oint_S \vec{P}\,d\vec{S} = -\Phi_{\text{р}}$$

$$\int_V \rho'\,dV = -\oint_S \vec{P}\,d\vec{S}$$

Преобразуем поверхностный интеграл по теоре… …усса:

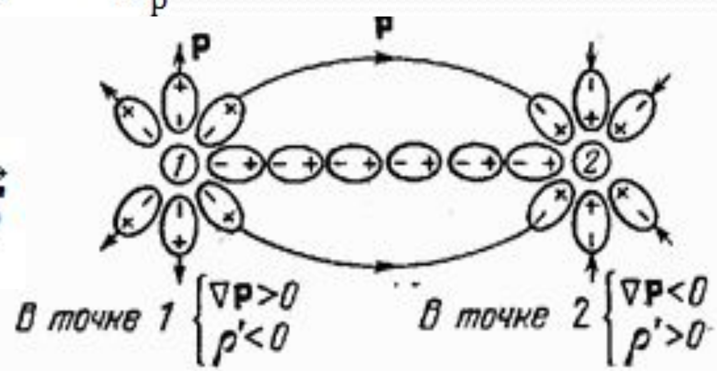
$$\int_V \rho'\,dV = -\int_V \nabla\vec{P}\,dV$$

$$\rho' = -\nabla\vec{P}$$

- теорема Гаусса для вектора поляризованности в дифференциальной форме.

Физический смысл теоремы:

источниками (стоками) поля вектора поляризованности являются отрицательные (соответственно положительные) связанные заряды.



Теорема Гаусса

для вектора электрического смещения D в дифференциальной и интегральной формах

Источниками поля служат не только сторонние, но и связанные заряды:

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho')$$

Эта формула малопригодна для нахождения вектора *E* => необходимо ввести новую величину, источниками которой являются только сторонние заряды $q_{сторон}$.

$$\rho' = -\nabla \vec{P}$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \vec{P}) => \nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho,$$

где $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{\mathcal{D}}$ - вектор электрической индукции (электрического смещения) $[\vec{\mathcal{D}}] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} => \vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi)\vec{E}$$

Здесь $\varepsilon = 1 + \chi$ - относительная диэлектрическая проницаемость (диэлектрическая проницаемость среды)

$$\Downarrow$$

Для изотропных диэлектриков: $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ уравнение материальной среды (для анизотропных диэлектриков вектора $\vec{\mathcal{D}}$ и $\vec{E}$ неколлинеарны).

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad => \quad \nabla \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\Downarrow$$

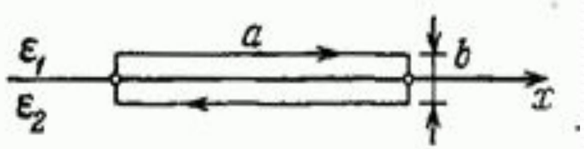
$$\int_V \nabla \vec{\mathcal{D}}\, d\vec{V} = \int_V \rho dV$$

Теорема Гаусса в интегральной форме: $\oint_S \vec{\mathcal{D}} d\vec{S} = \oint_V \rho dV$ ⇒ $\Phi_{\mathcal{D}} = \sum q_i$

Условия на границе двух диэлектриков

Вблизи раздела двух диэлектриков $\vec{E}$ и $\vec{D}$ должны удовлетворять граничным условиям исходя из: $[\nabla\vec{E}] = 0;\ \nabla\vec{D} = \rho$

Рассмотрим границу между двумя диэлектриками с ε_1 и ε_2. Ось *x* – произвольно направлена. Возьмем небольшой прямоугольный контур длины ***a*** и ширины ***b***. Ось размещена через середину ***b***.



$$[\nabla\vec{E}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_l \vec{E}d\vec{l} = 0$$

При малых размерах контура и выбранном обходе:

$$\oint E_l\, dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle \cdot 2b$$

$$b \to 0: \quad E_{1x} = E_{2x}$$

Значения $E1_x$ и $E2_x$ берутся в непосредственной близости к границе диэлектриков. Это равенство выполняется при произвольном выборе оси ***x***, необходимо лишь, чтобы эта ось находилась в плоскости раздела диэлектриков.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1\tau}; \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2\tau}$$

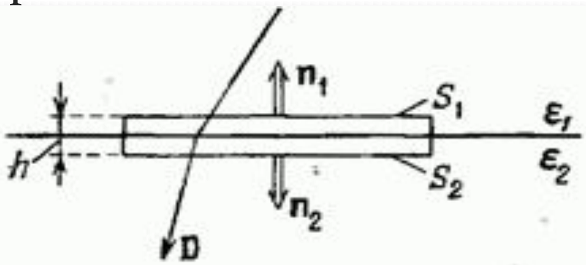
Т.к. $E_{1x} = E_{2x}$, то $E1_\tau = E2_\tau$

Т. к. $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, то

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Нормальная составляющая $\vec{D}$ ведет себя непрерывно, тангенциальная составляющая этого вектора претерпевает разрыв при переходе через границу раздела диэлектриков.

- Возьмем на границе диэлектриков воображаемую цилиндрическую поверхность высоты *h*.



$S_1 = S_2 = S$

- настолько малы, что в пределах любого из них поле однородно.

Применим т.Гаусса: $\Phi_{\mathcal{D}} = \sum q_i$

Сторонних зарядов на границе нет: $\Sigma\, q_i=0$ => $\Phi_D = 0$

$$\Phi_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{1n}S + \mathcal{D}_{2n}S + \langle \mathcal{D}_n \rangle S_{бок}=0$$

Если *h*—>0, то $S_{бок.}$—> 0 => $\mathcal{D}_{1n} = -\mathcal{D}_{2n}$

При проектировании вектора *D* на одну и ту же нормаль: $\mathcal{D}_{1n} = \mathcal{D}_{2n}$

- Т. к. $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ и $\mathcal{D}_{1n} = \mathcal{D}_{2n}$ то

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

- ***Тангециальная составляющая вектора $\vec{E}$ изменяется непрерывно, нормальная составляющая того же вектора претерпевает разрыв при переходе через границу раздела двух диэлектриков.***

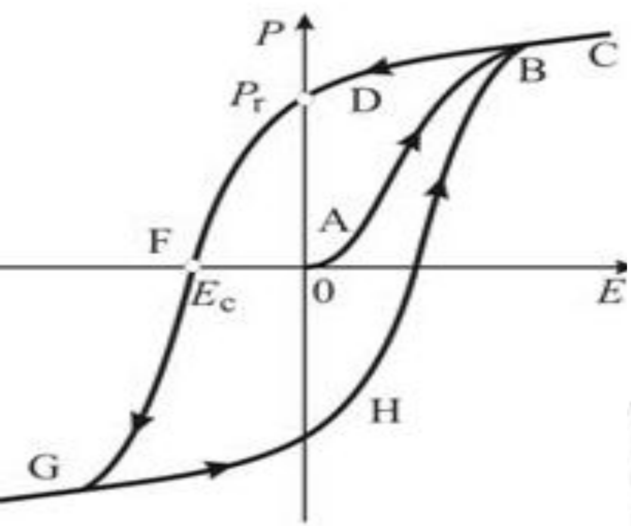
Сегнетоэлектрики

Существует группа веществ, которые могут обладать спонтанной поляризованностью в отсутствие внешнего поля, это явление впервые было открыто для сегнетовой соли, в связи с чем подобные вещества получили название **сегнетоэлектриков.**

Кривая $P(E)$ – петля гистерезиса.

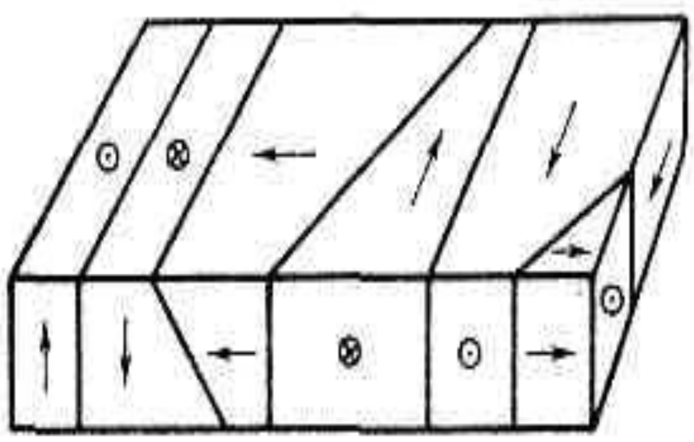
P_r – остаточная поляризованность – значение поляризованности при $E = 0$.

E_c – коэрцитивная сила – значение напряженности противоположно направленного поля, при котором $P = 0$.



Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей:

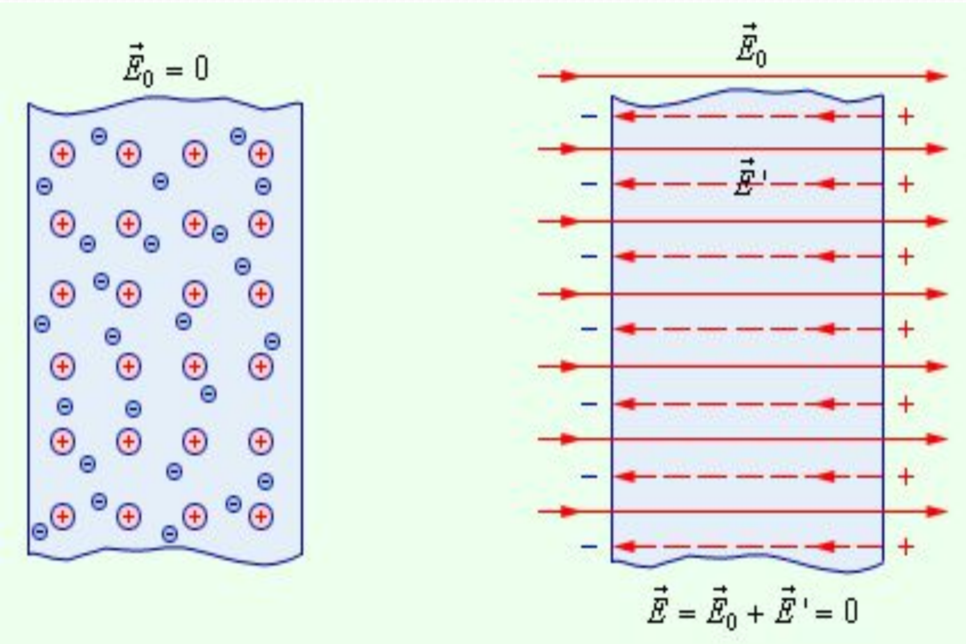
1) ε ~ нескольких тысяч (обычные диэлектрики имеют ε~ несколько единиц или нескольких десятков в редких случаях);
2) $P = f(E)$ – не линейна => $\varepsilon = f(E)$;
3) При изменениях поля поляризованность и электрическое смещение зависят от предыстории диэлектрика (см. рисунок);
4) для каждого сегнетоэлектрика: T_c – точка Кюри – температура, при которой сегнетоэлектрик становится диэлектриком в результате фазового перехода II рода (сегнетова соль – сегнетоэлектрик в диапазоне T_c от -15°C до +22,5°C).



Сегнетоэлектрики - кристаллические вещества, у которых отсутствует центр симметрии. Особенности сегнетоэлектриков объясняются доменной структурой – областями спонтанной поляризации.

Проводники
в электрическом
поле

во внешнем электрическом поле



При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные - в направлении поля; отрицательные – против поля => у концов проводника возникают заряды противоположного знака – индуцированные. Поле этих зарядов противоположно внешнему полю => накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля.

Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не выполняются условия:

1) $\vec{E} = 0$ (внутри проводника);
2) $\vec{E} = \vec{E}_n$ (напряженность поля на поверхности проводника должна быть в любой точке направлена по нормали к поверхности).

Нейтральный проводник, внесенный в электрическом поле, разрывает часть линий $\vec{E}$ - они заканчиваются на «-» индуцированных зарядах, а начинаются на «+» зарядах вновь.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее $\vec{E}$ = *0*. На этом основывается **электростатическая защита**.

Перераспределение зарядов на поверхности проводника во внешнем электростатическом поле – электростатическая индукция.

Электроемкость

Сообщенный проводнику заряд распределяется по его поверхности так, чтобы внутри проводника $\vec{E} = 0$ – единственно возможно! => если проводнику, уже имеющему заряд, сообщить еще заряд такой же величины, то он должен распределяться по проводнику так же, как и первый заряд (это справедливо для удаленного от других тел проводника!). Если вблизи находятся другие тела, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов на этих телах.

- Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике таким образом, чтобы отношение плотностей зарядов в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда было бы одним и тем же) $\varphi \sim q$!

$$q = C \cdot \varphi \Rightarrow C = \frac{q}{\varphi}$$

С - электроемкость

Емкость численно равна заряду, при сообщении которого проводнику потенциал проводника повышается на единицу.

Потенциал заряженного шара радиуса ***R***

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R} \quad \Rightarrow$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon R$$

$$1\,[C] = 1\,Ф = \frac{1\,Кл}{1\,В}$$

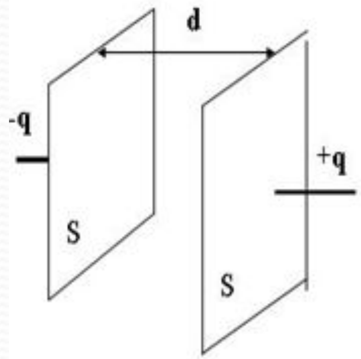
Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар R = $9 \cdot 10^9$ м, т.е. радиусом, в 1500 раз большим радиуса Земли.

Конденсаторы – устройства, способные накапливать заряд.

На практике возникает необходимость в устройствах, которые при небольшом потенциале накапливали бы заметные заряды. В основу конденсаторов положен факт возрастания C проводника при приближении к нему других тел. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. При поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал φ уменьшается по абсолютной величине => увеличивается C проводника.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Учтем, что $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение .

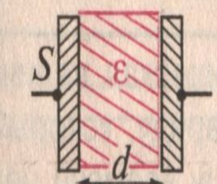


Плоский конденсатор

Конденсатор представляет собой два проводника, разделенные слоем диэлектрика. Проводники в этом случае называются ***обкладками конденсатора***.

1. Электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора.
2. У сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер, все поле сосредоточено между ними.
3. Под зарядом конденсатора понимают абсолютное значение заряда одной из обкладок.

Электроемкость плоского конденсатора



$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

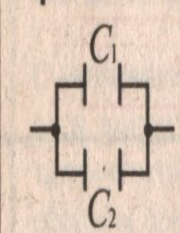
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot S}{d}}$$

Соединение конденсаторов

параллельное

$U_1 = U_2 = U$

$q = q_1 + q_2$

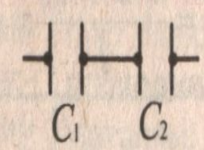


$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

последовательное

$U = U_1 + U_2$

$q_1 = q_2 = q$



$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Энергия заряженных проводника и конденсатора

Заряд, находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов, т.е. энергия взаимодействия системы зарядов:

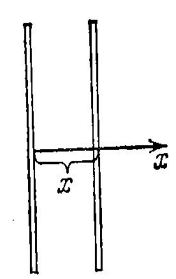
$$W = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$$

Здесь φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в той точке, где помещается q_i.

- Поверхность проводника - эквипотенциальная, тогда => ***энергия проводника***:

$$W = \frac{1}{2}\varphi\sum q_i = \frac{1}{2}\varphi q$$

$$W = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}$$



Для конденсатора: φ_1 – потенциал обкладки конденсатора с «+» q;

φ_2 – потенциал обкладки конденсатора с «-» q.

***Энергия заряженного конденсатора*:**

$$W = \frac{1}{2}[(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qU = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

- Механическая (пондеромоторная) сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга
- Приложенная к обкладке конденсатора сила совершает работу $dA = \mathcal{F}dx = -dW$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = -\frac{dW}{dx}$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$$

- Знак «-» показывает, что пондеромоторная сила – сила притяжения.

Энергия электрического поля

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd$$

$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$, где V – объем, занимаемый полем.

- Если поле однородно (плоский конденсатор), то заключенная в нем энергия распространяется в пространстве с постоянной плотностью w, равной энергии поля, деленной на V:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

В изотропном диэлектрике($\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{D}$):

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\vec{E}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}$$

$\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$ - плотность энергии поля в вакууме.

$\frac{\vec{E}\vec{P}}{2}$ – энергия поляризации диэлектрика.

Работа $dA = \sum_{V=1} q_i \vec{E}\, d\vec{r_i} = \vec{E} d(\sum_{V=1} q_i \vec{r_i})$

$$dA = \vec{E} d\vec{P} = \vec{E} d(\varkappa \varepsilon_0 \vec{E}) = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{E} =$$

$$= d\left(\frac{\varkappa \varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\vec{E}\vec{P}}{2}\right)$$

Энергия электрического поля:

$$W = \int_V w\, dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV$$

Постоянный ток

Электрический ток

Если через некоторую воображаемую поверхность переноситься суммарный *q≠0*, то через эту поверхность течет электрический ток (может протекать в металлах, полупроводниках, электролитах и газах).

Носители тока: $\bar{e}$; ионы; макроскопические частицы, несущие на себе избыточный заряд (заряженные пылинки и капельки) необходимы для протекания тока.

Ток возникает, когда внутри тела существует электрическое поле. В результате теплового движения через произвольную площадку проходит одинаковое количество носителей разного знака. При наложении поля к хаотическому движению $\vec{v}$ присоединяется упорядоченное движение $\vec{u}$. Тогда скорость носителей: $\vec{v} + \vec{u}$

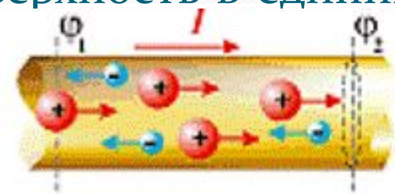
Т.к. $\langle \vec{v} \rangle = 0$, то

$$\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle \quad =>$$

- Электрический ток определяется как упорядоченное движение электрических зарядов.

Сила тока ***I*** – количественная характеристика электрического тока – величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}$$



Направление тока – направление положительных зарядов.

- Вектор плотности тока :

$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dS} \qquad \vec{j} \text{ сонаправлен } \vec{u}^{+}$$

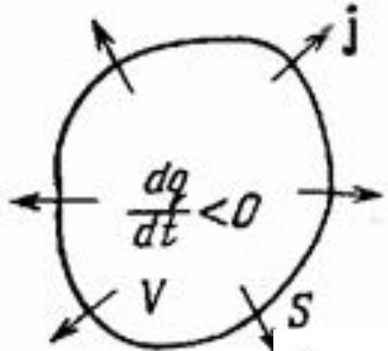
$$I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

- Ток, не меняющийся со временем, называется постоянным.

$$I = \frac{q}{t}$$

1 [I] = **1**А = **1** Кл/с

Уравнение непрерывности



В силу сохранения заряда:

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

т.к. $\rho = \rho(x, y, z, t)$

- По т. Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{j}dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

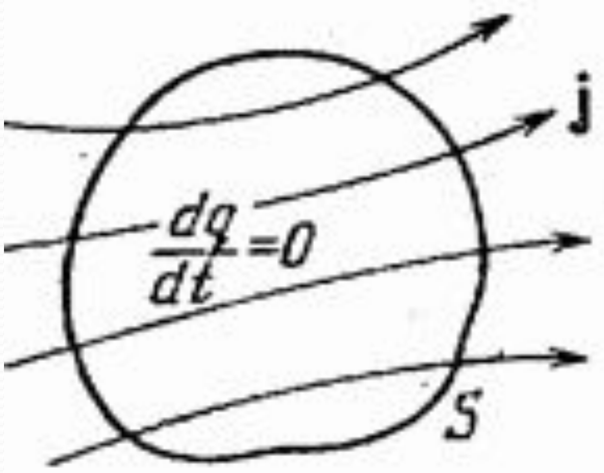
$$\nabla\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- уравнение непрерывности

Физический смысл:

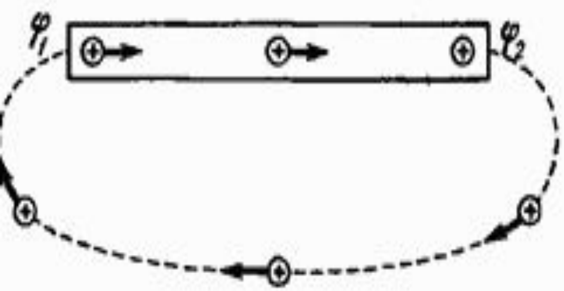
в точках, которые являются источниками $\vec{j}$, происходит убывание заряда.

В случае постоянного тока вектор $\vec{j}$ не имеет источников. Линии постоянного тока всегда замкнуты.



$$\nabla\vec{j} = 0$$

Электродвижущая сила (ЭДС)



Чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, необходимо от конца проводника с меньшим потенциалом (носители – «+» заряды) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно их подводить. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока замкнуты.

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

амкнутой цепи наряду с участками, на которых «+» заряды двигаются в сторону убывания потенциала , должны иметься участки, на которых перенос «+» зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля. Такое перемещение возможно при помощи сил неэлектростатического происхождения, называемых **сторонними силами**, которые действуют либо на всей цепи, либо на отдельных участках. Они обусловлены либо химическими процессами, либо диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, либо электрическими полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями.

ЭДС = работе сторонних сил по перемеще
единичного положительного заряда: $\mathcal{E} = \dfrac{A}{q}$

$1\,[\mathcal{E}] = 1\,[\text{В}]$

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде: $\vec{F}_{\text{ст}} = q\,\vec{E}^*$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}}\,d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}^*\,d\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}^*\,d\vec{l}$$

$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^*\,d\vec{l}$ - ЭДС, действующая в цепи.

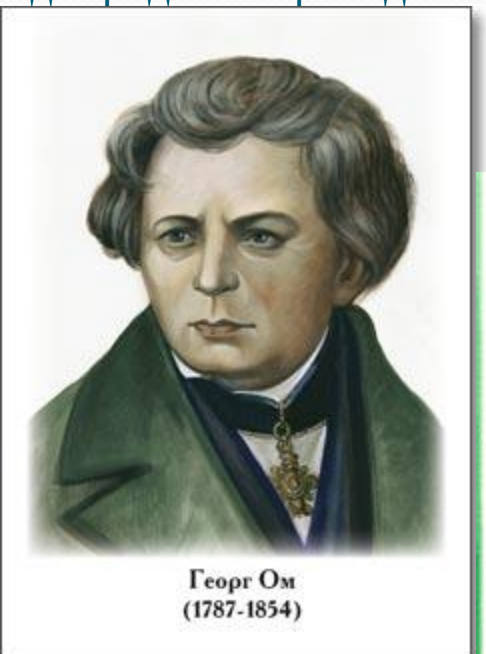
Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического пол $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{ст}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*)$.

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}^*\,d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}$$

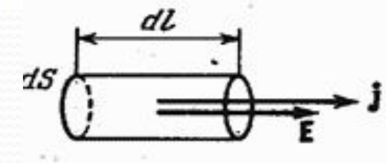
Закон Ома. Сопротивление

Участок, на котором не действуют сторонние силы, называются **однородным**. В случае однородного проводника : $U = \varphi_1 - \varphi_2$

В изотропном проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направление $\vec{E}$ => $\vec{j}$ сонаправлен $\vec{E}$



Выделим мысленно в окрестности некоторой точки элементарный цилиндрический объем с образующими $\| \vec{j}$ и $\vec{E}$



Через поперечное сечение цилиндра идет ток: $jdS = I$

$U = Edl;$ $R = \rho \frac{dl}{dS}$ → *в закон Ома*

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl} Edl \quad => \quad j = \frac{1}{\rho} E$$

Т.к. $\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{E} \; => \; \vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma \vec{E}$ - з-н Ома в дифференциальной форме

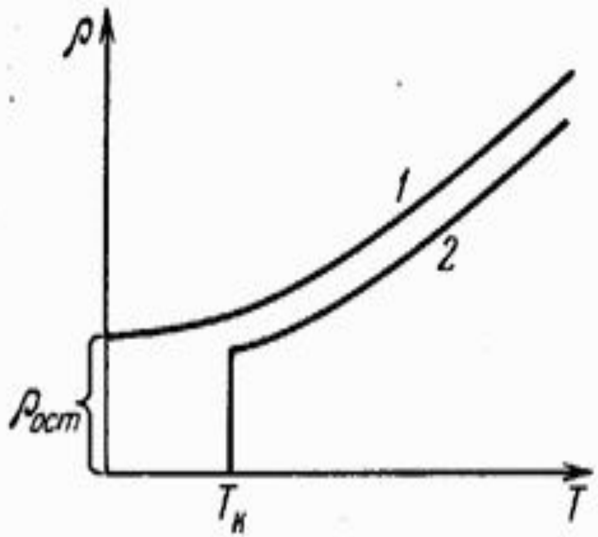
$\sigma = \frac{1}{\rho}$ *удельная электрическая проводимость*

$$1 \; [\sigma] = 1 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

ρ и σ определяются хим. природой вещества и условиями (в частности температурой), при которых они находится.

Сверхпроводимость

Хейке Камерлинг – Оннес – голландский физик , лауреат Нобелевской премии за 1913 г.

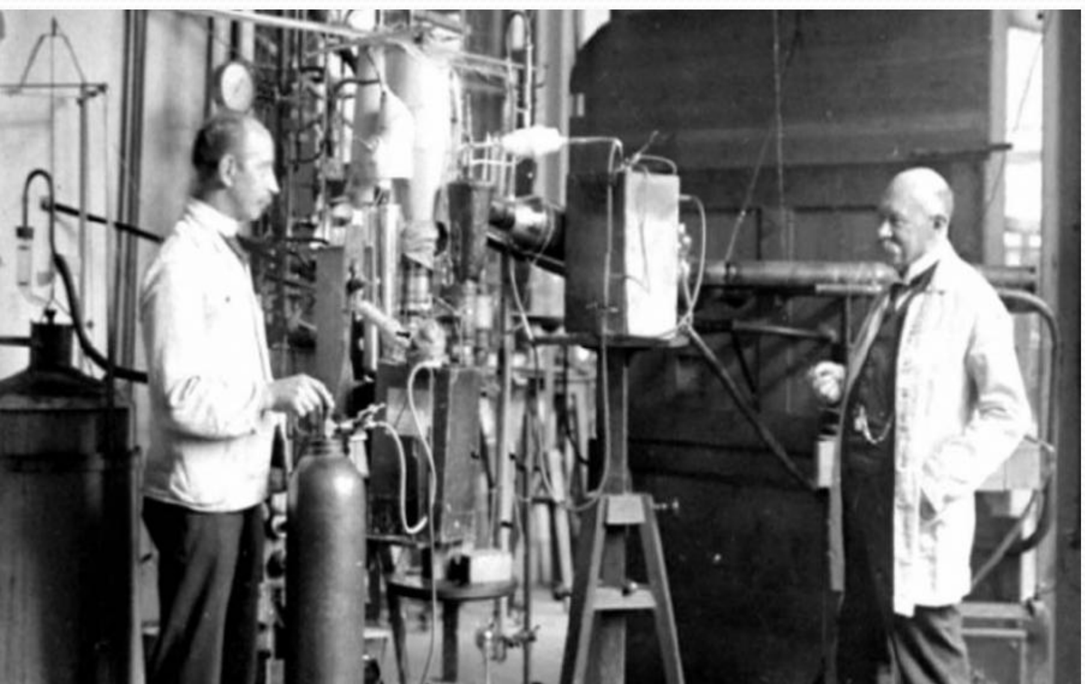


Изучая поведение ртути, охлаждаемой до гелиевых температур, Камерлинг – Оннес в 1911 г. впервые наблюдал у образцов скачкообразное уменьшение сопротивления практически до нулевых значений. Такое явление было названо сверхпроводимостью. Т. е. образец становился практически проводником.

Камерлинг – Оннес так описал свои опыты: «При Т = 4,3 К сопротивление ртути уменьшается до 0,084 Ом, что составляет 0,0021 от значения сопротивления, которое имела бы твердая ртуть при 0°С(39,7 Ом).

Обнаружено, что при 3 К сопротивление падает при $3 \cdot 10^{-6}$ Ом, что составляет 10^{-7} от значения при 0^0С».

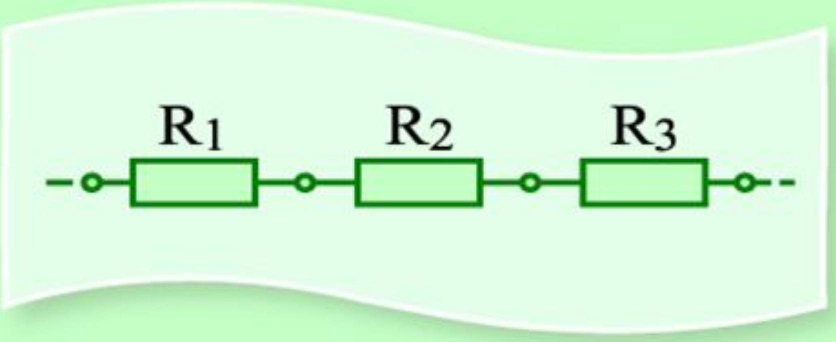
Температурный интервал, в котором сопротивление уменьшалось до нуля, очень узок, и для некоторых металлов составляет порядка 10^{-3} К.



$\rho_{ост.} \sim$ от чистоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho_{ост.} = 0$.

Сверхпроводимость обнаружена у *Pb, Zn, Al*, а также у ряда сплавов. При действии магнитного поля на сверхпроводник сверхпроводящее состояние нарушается.

Последовательное соединение проводников

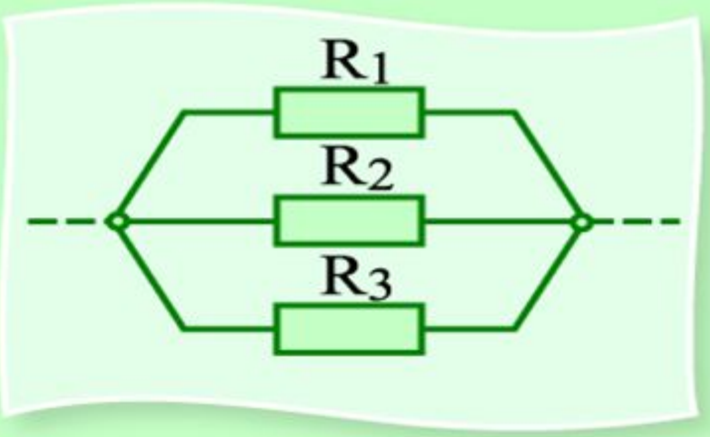


$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Параллельное соединение проводников

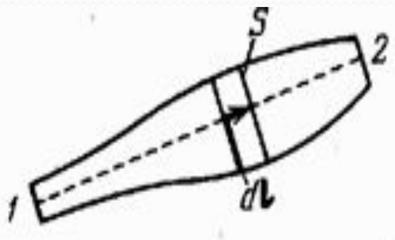


$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$U = U_1 = U_2 = U_3$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

для неоднородного участка цепи



На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электростатических сил $e\vec{E}$, сторонние силы $e\vec{E}^*$. Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей:

$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$ кон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи.

Рассмотрим неоднородный участок цепи. Допустим, что $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{E}^*$ в любой точке направлены по касательной к контуру: $j_l = \sigma\left(E_l + E_l^*\right)$

Вследствие сохранения заряда I в любом сечении одинакова =>

$I =$ $j_l S = const$ вдоль контура.

$$I = \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*$$

закон Ома

для неоднородного участка цепи:

$$I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 E_l^* dl \Rightarrow IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \Rightarrow I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}$$

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Рассмотри произвольный участок цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение *U*. За время *dt* через каждое сечение проводника пройдет заряд *dq* = *Idt*. Тогда ***работа***, которую совершают силы электростатического поля и сторонние силы:

$$dA = Udq = UIdt = I^2Rdt$$

Разделим работу *dA* на время *dt*, за которое она совершается, тогда ***мощность тока***:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I$$

Если проводник неподвижен и в нем не происходит химических реакций, то вся работа идет на нагревание, т.е. на увеличение его внутренней энергии, при этом выделяется тепло:

$$dQ = UIdt = RI^2dt$$

– ***закон Джоуля – Ленца*** (получен экспериментально в 1840 г.).

Если *I* = *I*(*t*), то $Q=\int_0^t RI^2dt$

Выделим в проводнике элементарный объем в виде цилиндра.

Тогда согласно закону Джоуля-Ленца за *dt*

$$dQ= RI^2dt = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2dt = \rho j^2dVdt \;\; |: dV \text{ и } dt$$

$$Q_{уд.} = \rho \vec{j}^2$$

Закон Джоуля – Ленца
в дифференциальной форме

Правила Кирхгофа

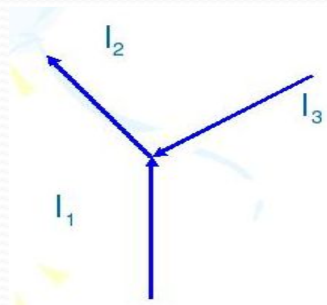
$$\sum I_k = 0$$

Узел – точка, в которой сходится более чем два проводника.

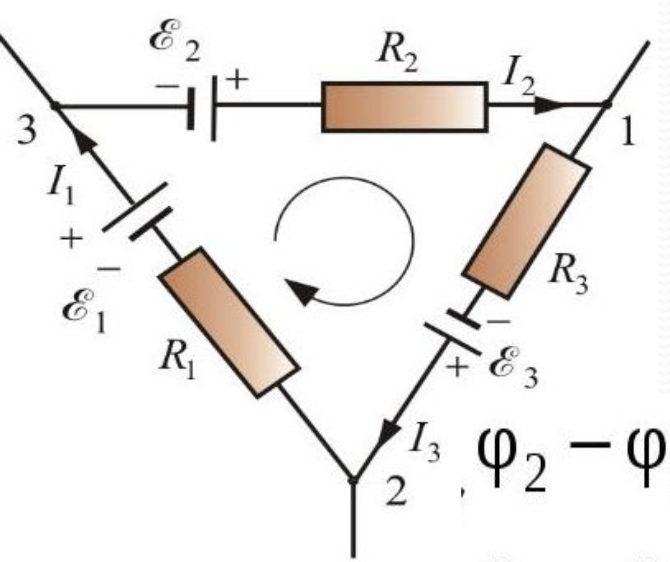
Первое правило

(следствие уравнения непрерывности и закона сохранения заряда):

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.



$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$



Второе правило

(обобщение закона Ома для разветвленных цепей):

В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i, на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathcal{E}_k$, встречающихся в этом контуре.

$$\varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1 = I_1 R_1;$$

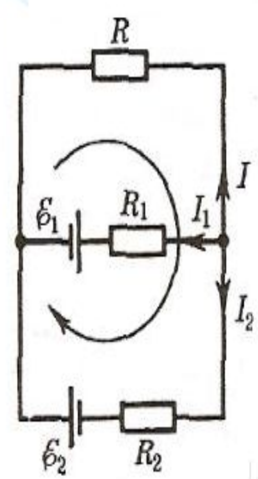
$$\varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_2 = I_2 R_2;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3 = I_3 R_3.$$

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$$

Пример расчета цепи постоянного тока

- 1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; настоящее направление токов определится по окончании решения задачи: если ток при решении получится положительным, то его направление было выбрано истинно, в противном случае - направление тока противоположно выбранному.
- 2. Выбрать направление обхода контура и строго придерживаться его; *IR > 0*, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и, наоборот; ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, будем считать положительными, против – отрицательными.
- 3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу их искомых величин (в систему входят все сопротивления и ЭДС); каждый контур должен содержать хотя бы один новый элемент, не встречающийся в предыдущих уравнениях.



$$I + I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{cases} -IR + I_1R_1 = \varepsilon_1 \\ -IR + I_2R_2 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$I = \frac{-R_1\varepsilon_2 + R_2\varepsilon_1}{R_1R_2 + R_1R + RR_2}$$

Правила Кирхгофа

Первое правило:

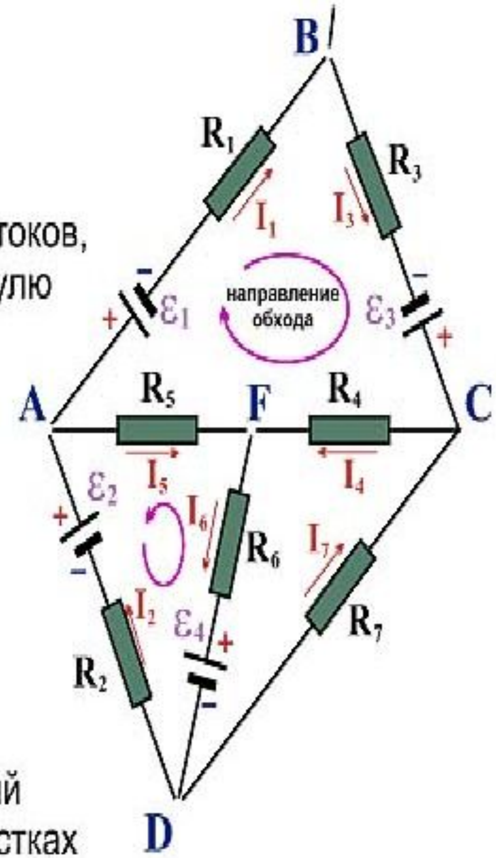
$$\sum_k I_k = 0$$

Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю

Узел A : $I_2 - I_1 - I_5 = 0$

Узел D : $I_6 - I_2 - I_7 = 0$

Узел F : $I_4 + I_5 - I_6 = 0$



Второе правило:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k$$

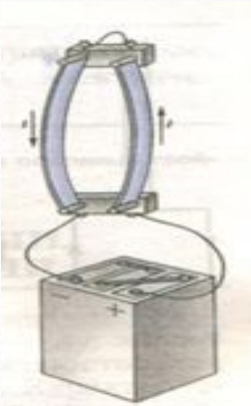
Алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре

Контур ABCFA : $I_1R_1 + I_3R_3 + I_4R_4 - I_5R_5 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$

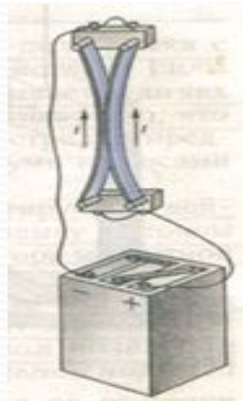
Магнитное поле в вакууме

Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты.

Взаимодействие проводников



$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{b}$$



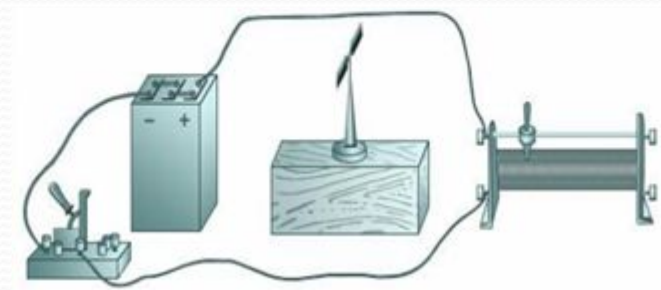
μ_0- магнитная постоянная

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$$

Опыт Эрстеда

В 1820 г. датский физик Ханс Кристиан Эрстед (1777 – 1851 гг.) обнаружил ориентирующее действие поля, возбуждаемого проводником с током, на магнитную стрелку, которая при включении тока устанавливалась перпендикулярно к проволоке, по которой протекал ток. Изменение направления тока приводило стрелку к повороту в противоположную сторону .



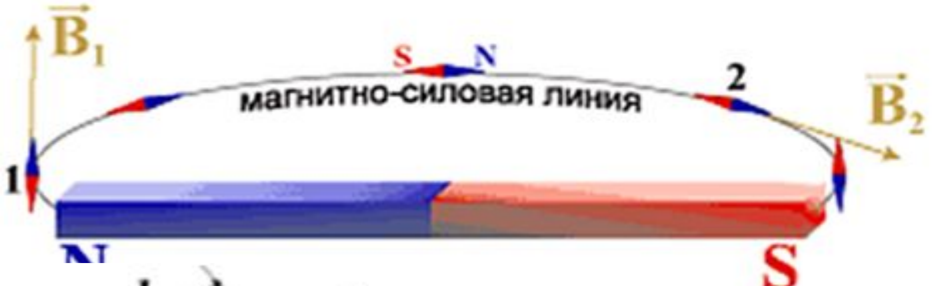
Свойства магнитного поля:

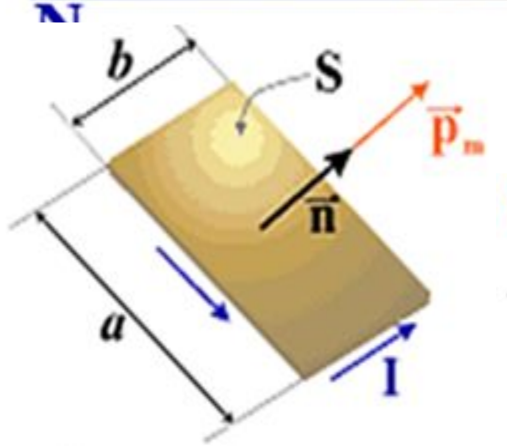
- 1. Магнитное поле порождается проводниками с током (движущимися зарядами).
- 2. Магнитное поле действует только на движущиеся заряды, проводники с током и постоянные магниты.
- 3. Силовой характеристикой магнитного поля является векторная величина, которую исторически принято называть магнитная индукция.
- 4. Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: *поле, порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности*

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B_i}$$

Вектор магнитной индукции

Вдоль магнитно-силовой линии ориентируются элементарные магнитные стрелки, северный полюс ***N*** которых указывает направление вектора магнитной индукции.





$\vec{p}_m$ - магнитный момент

$\vec{n}$ - нормаль к плоскости

S – площадь контура

$|\vec{p}_m| = I \cdot S$ $[А \cdot м^2]$ $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$

Закон Био-Савара-Лапласа

В 1820 г. французские физики Жан Батист **Био** и Феликс **Савар** провели исследования магнитных полей токов различной формы. А французский математик Пьер **Лаплас** обобщил эти исследования в виде формулы-закона.

Рассмотрим малый элемент d*l*. В нем содержится $nSd\ell$ носителей тока (S – площадь поперечного сечения провода в том месте, где взят $d\ell$).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e[(\vec{v}+\vec{u}),\vec{r}]}{r^3}$$, где

$\vec{v}$ - скорость хаотического движения;

$\vec{u}$ - скорость упорядоченного движения носителя.

$\vec{B}$, усредненное по носителям тока в d*l*:

$$<\vec{B}> = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e[\langle\vec{v}\rangle+\langle\vec{u}\rangle,\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e[\langle\vec{u}\rangle,\vec{r}]}{r^3}$$

$$d\vec{B} = <\vec{B}> nSd\ell = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{S[(ne<\vec{u}>,\vec{r}]d\ell}{r^3} \qquad ne<\vec{u}> = \vec{j}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{S[\vec{j},\vec{r}]\,d\ell}{r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Sj[\vec{d\ell},\vec{r}]}{r^3}$$

Учтем, что $Sj = I$, тогда получим закон Био-Савара:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[\vec{d\ell},\vec{r}]}{r^3}$$

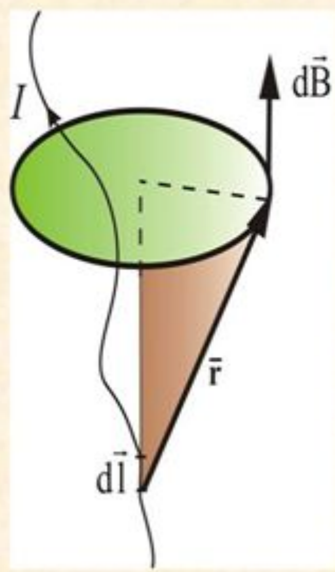
Здесь: I – ток;

$d\vec{l}$ – вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, куда течет ток;

$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока в точку, в которой мы определяем $d\vec{B}$;

r – модуль радиус-вектора;

k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

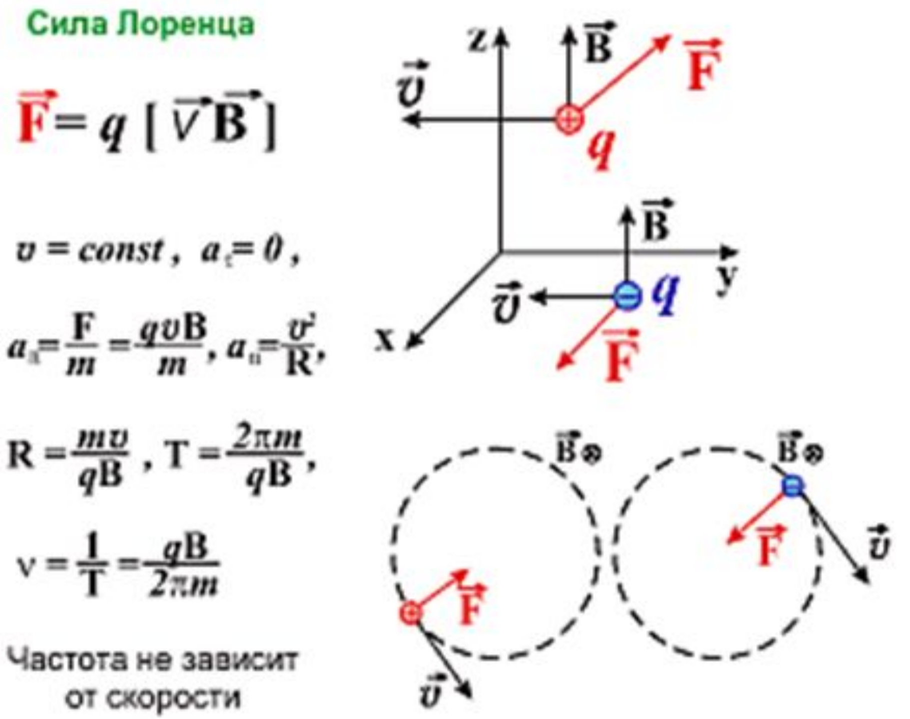


Сила Лоренца

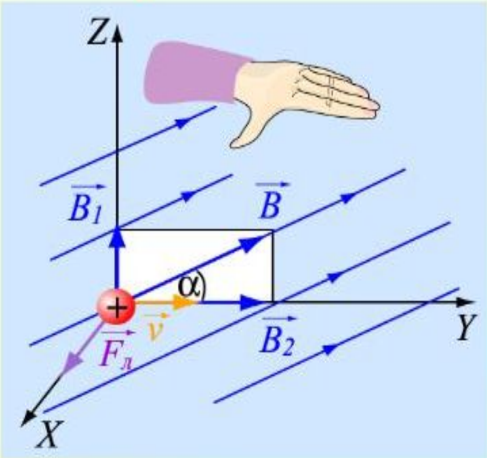
нидерландский физик – теоретик, создатель классической электронной теории

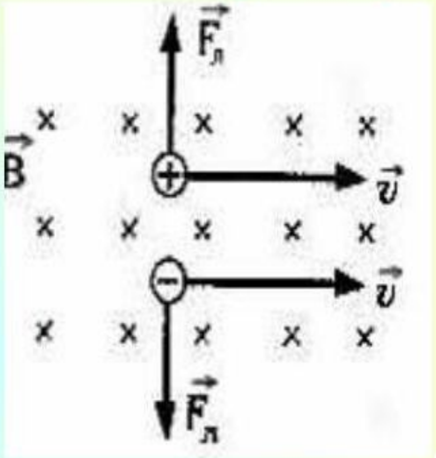
Лоренц Хендрик Антон

1853 - 1928



Направление силы Лоренца





Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки: левую руку надо расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, четыре вытянутых пальца были направлены по направлению движения положительно заряженной частицы (или против отрицательной), тогда отогнутый на 90° большой палец покажет направление действия силы Лоренца.

Закон Ампера

Если провод, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей тока действует сила:

$\vec{F} = e\left[(\vec{v} + \vec{u}), \vec{B}\right]$ **, гд $\vec{v}$ - скорость хаотического движения носителя;**

$\vec{u}$ - скорость упорядочного движения.

От носителя тока действие этой силы передается проводнику, по которому он перемещается. В результате на провод с током, находящийся в магнитном поле, действует сила.

$<\vec{F}> = e\left[(<\vec{v}> + <\vec{u}>), \vec{B}\right] = e\left[<\vec{u}>, \vec{B}\right]$ **, где $\vec{B}$** - магнитная индукция в том месте, где помещается d*l*.

В элементе провода содержится число носителей *nSdl*.

$$d\vec{F} = <\vec{F}> nSd\ell = \left[(ne <\vec{u}>, \vec{B}\right] Sd\ell$$

Т.к. $ne <\vec{u}> = \mathrm{j}$, то $d\vec{F} = [\mathrm{j}\,\vec{B}]\ Sd\textit{l}$

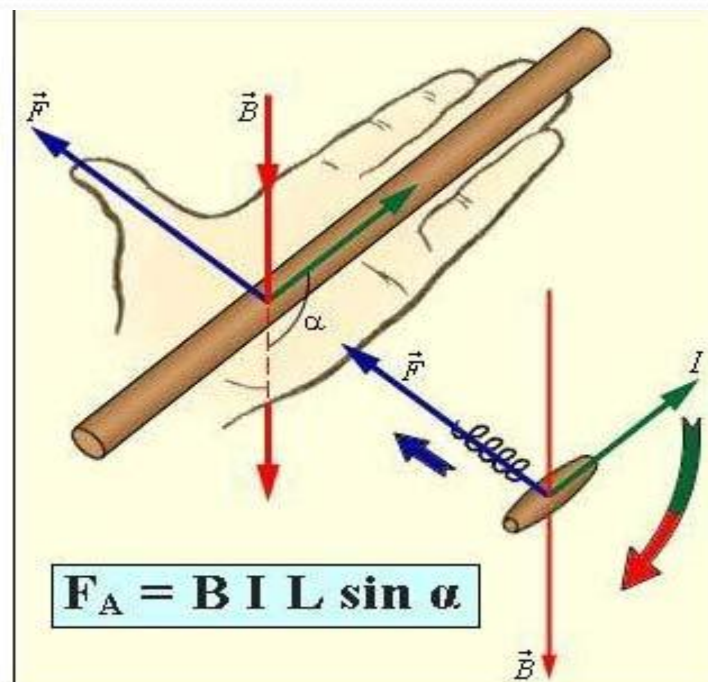
Т.к. $jSd\vec{\ell} = Id\vec{l}$, то получаем закон Ампера, который выражает силу,

$$\vec{F} = \left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$$

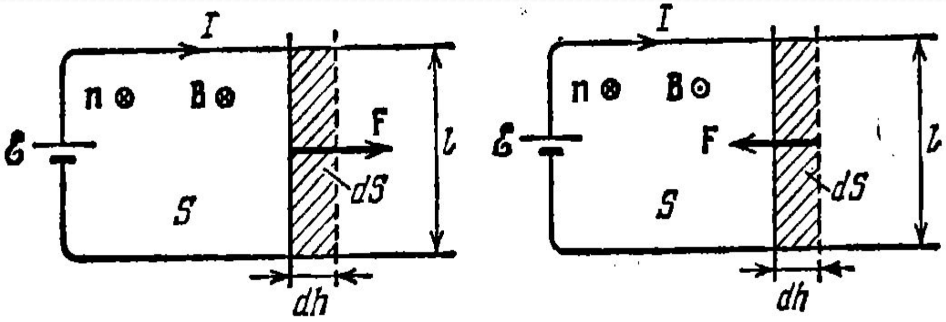
действующую на элемент проводника

$dF = IBd\ell \sin\alpha$

Направление силы Ампера определяется по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а вытянутые пальцы были направлены вдоль тока, то отогнутый большой палец укажет на направление действия силы Ампера на проводник с током.



Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле



а) б)

$dA = \; IBdS$ – в случае $\otimes\ \vec{B}$ и

$dA = -\,IBdS$ – в случае $\odot\ \vec{B}$

***dФ* можно трактовать поток *Ф* через площадь, описанную перемычкой при ее движении.**

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длины ℓ. Допустим, что этот контур находится во внешнем магнитном поле, которое предполагается однородным и перпендикулярными к плоскости контура. Тогда сила $\vec{F}$, действующая на перемычку:

$$|\vec{F}| = I\,|\vec{B}|\,\ell$$

При перемещении перемычки вправо на dh совершается положительная работа

$dA = Fdh = IB\ell dh = IBdS$, где dS – штрихованная площадь.

Тогда $\Phi = \int \vec{B}\vec{n}\, dS$ (нормаль образует с током правовинтовую систему)

$$F = I\left[l \times B\right]$$

$$dA = Fdh = I\left[l \times B\right]dh = IB\left[dh \times l\right]$$

$$\boxed{dA = IBndS}$$

$$n \uparrow\uparrow \left[dh \times l\right] \qquad dS = \left\|\left[dh \times l\right]\right\|.$$

Дивергенция магнитного поля

В природе *не существует магнитных зарядов* (по Максвеллу) – источников магнитного поля, на которых могли бы начинаться и заканчиваться линии магнитной индукции => *Фв* = 0 или

$$\Phi_{в} = \oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$ -

теорема Гаусса для вектора магнитной индукции в интегральной форме:

поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Физический смысл теоремы: магнитное поле вихревое (соленоидальное).

Заменим поверхностный интеграл объемным при помощи теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}}\, d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \nabla \vec{\mathbf{B}}\, dV = 0$$

Равенство должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Такое возможно, если подынтегральная функция равна нулю:

$$\nabla \vec{\mathbf{B}} = 0$$ -

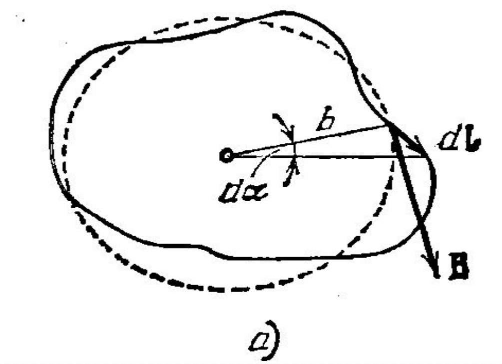
теорема Гаусса для вектора магнитной индукции в дифференциальной форме:

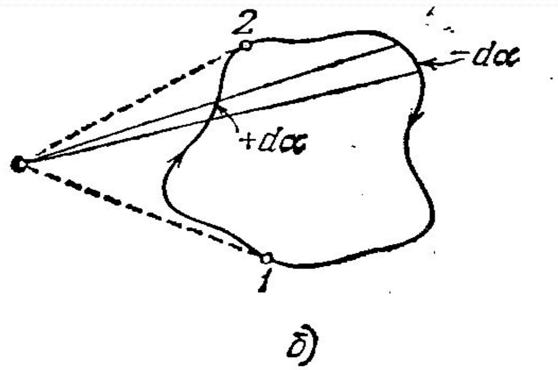
дивергенция вектора магнитной индукции везде равна нулю.

Физический смысл теоремы: источников магнитного поля наподобие электрических зарядов в природе не существует.

* Дирак высказал предположение, что магнитные заряды существуют (названные монополями Дирака). Такое предположение следует из понятия нулевой дивергенции, а именно дивергенция вектора может быть равна нулю и в том случае, когда количество источников равно количеству стоков поля.

Ротор магнитного поля





Пусть замкнутый контур лежит в плоскости, перпендикулярной к I; (I ⊥ к плоскости чертежа и направлен за него). В любой точке контура $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку.

$$\vec{B}\, d\vec{\ell} = B dl_B = B b d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

или

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha$$

, где *b* - расстояние от провода с током до *d**l***; *dα* = угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок *d**l*** (*dα* = 2π).

Иначе будет, если ток не охватывается контуром. Тогда при обходе по контуру радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (уч. 1-2), а затем в противоположном (уч. 2-1), вследствие чего $\oint d\alpha = 0$.

$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I$, где под I подразумевают ток, охватываемый контуром.

$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = 0$, когда контур тока не охватывает.

Если токи протекают во всем пространстве:

$$\Sigma_k I_k = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_S \vec{j}\, \vec{n} dS$$

Применим теорему Стокса:

$$\int_S [\nabla \vec{B}]\, d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Магнитное поле в веществе

Намагничение магнетика

Всякое вещество способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

Намагничением называется явление возникновения макроскопического магнитного момента в веществе при внесении его в магнитное поле.

Намагничение магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема - **намагниченностью**:

$$\vec{J} = \frac{1}{\nabla V} \sum_{\nabla V} \overrightarrow{P_m}$$

Результирующее поле:

$$\vec{\mathbf{B}} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B'}$$

поле намагниченного вещества

обусловленное токами поле

Гипотеза Ампера:

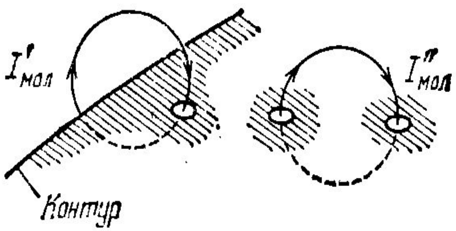
Для объяснения намагничения тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (молекулярные токи). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом => суммарный магнитный момент равен нулю. Под действием поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию => магнетик намагничивается.

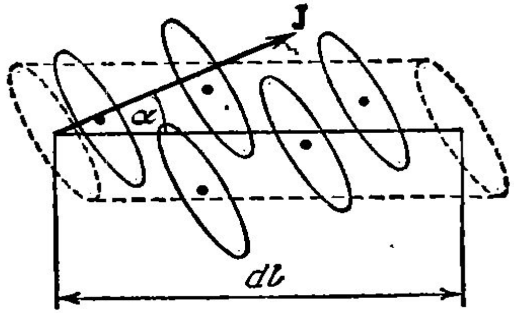
При делении магнетика на части молекулярные токи не разрываются и не переходят в токи проводимости, т.е. суммарный ток намагничивания через поверхность, рассекающую магнетик всегда равен нулю.

Токи намагничивания – это **не токи проводимости** и никаких частиц они не переносят.

ПОЛЯ

$$[\nabla \vec{B}] = [\nabla \vec{B_0}] + [\nabla \vec{B}']$$





Элемент контура dl, образующий с $\vec{J}$ угол α, нанизывает те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косого цилиндра с $V = S_{мол.} \cos\alpha\, dl$ ($S_{мол.}$ - площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Если n - число молекул в единице объема, то суммарный ток, охватываемый dl, = $I_{мол.} n S_{мол.} \cos\alpha\, dl$.

Магнитный момент единицы объема: $I_{мол.} n S_{мол.}$

Проекция $\vec{J}$ на направление элемента dl: $I_{мол.} n S_{мол.} \cos$…

- Т.к. $[\nabla \vec{B_0}] = \mu_0 \vec{j}$ то и $[\nabla \vec{B}'] = \mu_0 \vec{j}_{мол}$, где $\vec{j}_{мол.}$- плотность молекулярных токов =>

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{мол}) \text{ – малопригодно.}$$

- Алгебраическая сумма молекулярных токов, охватываемых некоторым контуром:
- $\int \vec{j}_{мол}\, d\vec{S}$, где S – поверхность, натянутая на контур.
- В алгебраическую сумму молекулярных токов входят только те токи, которые окажутся «нанизанными» на контур. Токи, «не нанизанные» на контур, либо не пересекают натянутую на контур поверхность совсем, либо пересекают эту поверхность дважды - один раз в одном направлении, в другой раз - в противоположном => вклад их равен 0.

$$\int_S \vec{j}_{мол}\, \overrightarrow{dS} = \oint_\Gamma \vec{J}\, \overrightarrow{d\ell}$$

по теореме Стокса

$$\int_S \vec{j}_{мол}\, \overrightarrow{dS} = \int_S [\nabla \vec{J}]\, \overrightarrow{dS} \Rightarrow \vec{j}_{мол} = [\nabla \vec{J}]$$

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 [\nabla \vec{J}] \Rightarrow \left[\nabla; \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right)\right] = \vec{j}$$

$\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$- напряженность магнитного поля, то есть $[\nabla \vec{H}] = \vec{j}$

В вакууме $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$;

1[H] = 1А/м

для прямого тока:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

Возьмем произвольный контур Г с натянутой на него поверхностью S и получим:

$$\int_S [\nabla \vec{H}] d\vec{S} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

По теореме Стокса:

$$\int_S [\nabla \vec{H}] d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell}$$

$$\oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Если макроскопические токи текут по проводам, охватываемым контуром, то

$$\oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell} = \sum_k I_k$$ -

теорема о циркуляции вектора напряженности:

циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.

Магнитная восприимчивость. Магнитная проницаемость вещества.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукций, а с напряженностью поля:

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

, где χ – характерная для данного магнетика *безразмерная* величина, называемая **магнитной восприимчивостью** (для слабомагнитных веществ при не слишком сильных полях $\chi \neq \chi(\vec{H})$).

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}$$

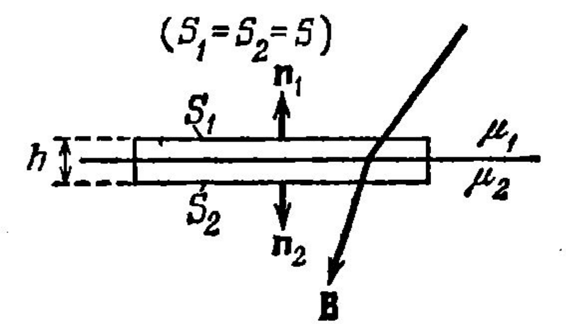
$\mu = 1+\chi$ – безразмерная физическая величина, называемая **относительной магнитной проницаемостью** или просто **магнитной проницаемостью**.

$$\chi > 0 \text{ или } \chi < 0 \Rightarrow \mu > 1 \text{ и } \mu < 1$$

Условия
на границе двух магнетиков

Вблизи поверхности раздела 2-х магнетиков должны выполняться следующие условия:

$\nabla\vec{B} = 0$ и $[\nabla\vec{H}] = \vec{j}$



Возьмем цилиндрическую поверхность высотой h с основаниями S1 и S2.

- $\Phi_B = B\ S + B_{2n}S + \langle B_n\rangle S$

Т.к. $\nabla\vec{B} = 0$, то и $\Phi_B = 0$; $h \to 0$=> $B_{1n} = -B_{2n}$

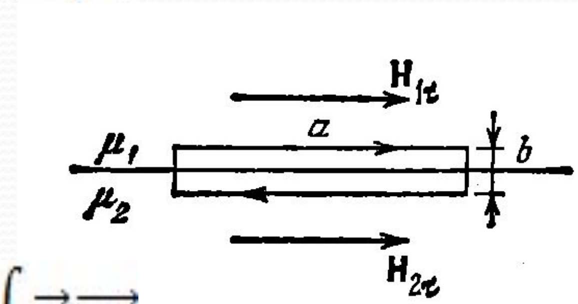
Если проецировать на одну и ту же нормаль:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n}$$

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Нормальная составляющая вектора B изменяется непрерывно, а нормальная составляющая вектора H претерпевает разрыв.



Возьмем на границе прямоугольный контур и вычислим для него $\oint \vec{H}\vec{dl}$

- $\oint \vec{H}\vec{dl} = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_l\rangle 2b$, где $\langle H_l\rangle$ – среднее значение H_l на перпендикулярных частях контура.

Если по границе раздела не протекают макроскопические токи, то $\oint \vec{H}\vec{dl} = 0$.
Т.к. $b \to 0$, то $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2} \;=>\; \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Тангенциальная составляющая вектора H изменяется непрерывно, а тангенциальная составляющая вектора B претерпевает разрыв при переходе через границу.

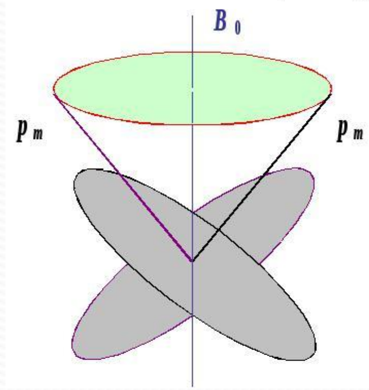
Диамагнетики

Диамагнетизм (от греч. dia – расхождение и магнетизм) – свойство веществ намагничиваться навстречу приложенному магнитному полю.

Диамагнетиками называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы

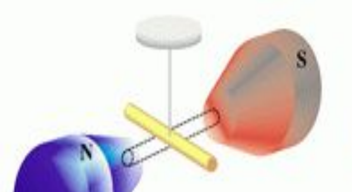
Рассмотрим атом и движущийся вокруг него по круговой орбите электрон

Орбита электрона ориентирована относительно вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}_0$ так, что магнитный момент $\boldsymbol{p}_m$ составляет с вектором $\boldsymbol{B}_0$ угол α.

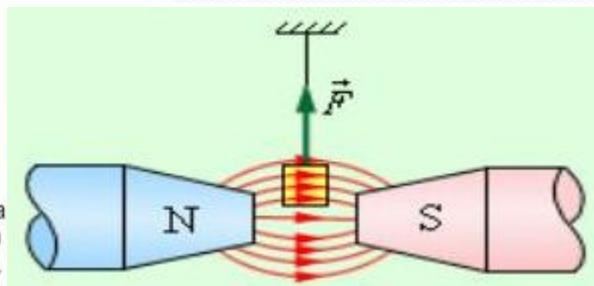


Происходит вращение орбиты электрона и вектора $\boldsymbol{p}_m$ вокруг $\boldsymbol{B}_0$ с некоторой угловой скоростью ω.

Такое движение называется ***прецессией***.



Диамагнитная палочка висмута в магнитном поле располагается ⊥ магнитному полю



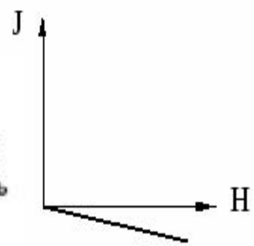
При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты, пропорциональные магнитной индукции.

Вектор магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем поле, направлен в сторону, противоположную магнитной индукции внешнего поля.

Для всех диамагнетиков $\chi<0$ и $\mu\lesssim1$ (слабо зависит от напряженности магнитного поля и температуры).

Пламя свечи (продукт сгорания - диамагнетик) выталкивается в область более слабого поля

Диамагнетизм имеет место для всех веществ, в том числе для парамагнетиков и ферромагнетиков



Зависимость намагниченности диамагнетиков от напряженности внешнего поля

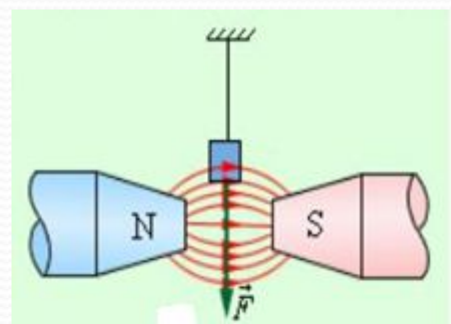
Парамагнетики

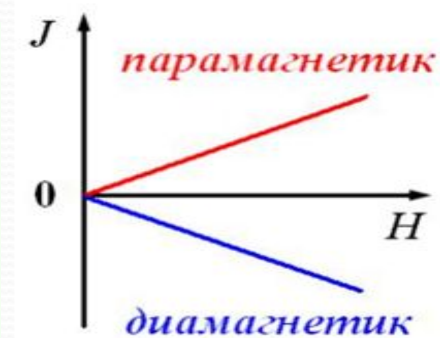
Термин «парамагнетизм» был введен Майклом Фарадеем в 1845 г. (он все магнетики разделил на диа- и пара магнетики).

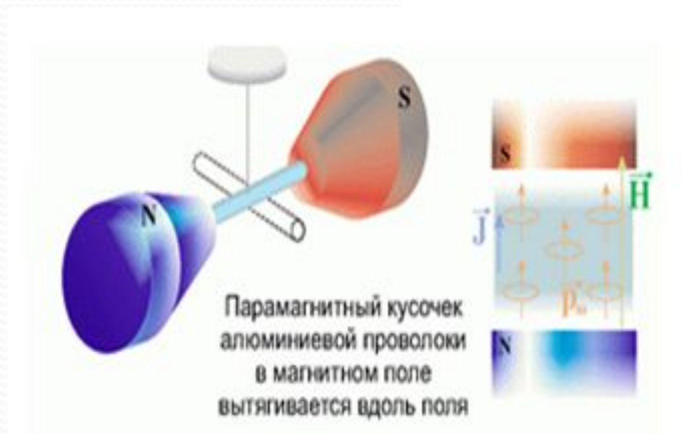
В отсутствии внешнего магнитного поля атомы парамагнетика обладают собственным магнитным моментом, отличным от нуля, но вследствие теплового движения магнитные моменты ориентированы хаотичным образом, поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля парамагнетики не обладают магнитными свойствами. При внесении во внешнее магнитное поле магнитные моменты атомов парамагнетика приобретают преимущественную ориентацию по полю. Таким образом осуществляется усиление внешнего поля при намагничивании парамагнетика.

Парамагнетизм (от греч. para – возле, рядом и магнетизм) – свойство веществ во внешнем магнитном поле намагничиваться в направлении этого поля, поэтому внутри парамагнетика к действию внешнего поля прибавляется действие наведенного внутреннего поля.

Для парамагнетиков: $\chi > 0$ $=>$ $\mu \gtrsim 1$







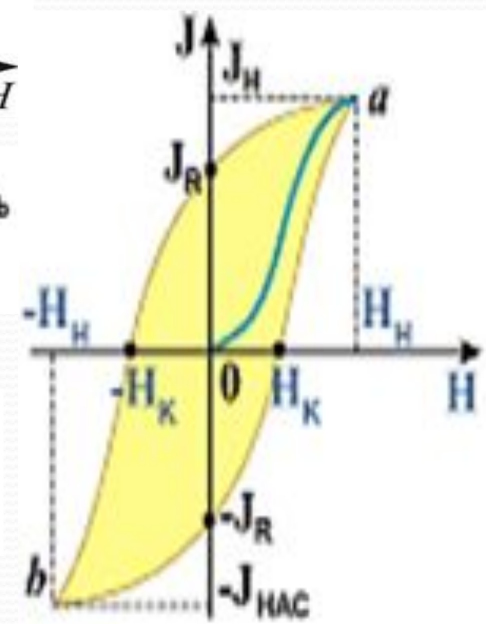
Ферромагнетики

Ферромагнетики – это сильномагнитные вещества, обладающие спонтанной намагниченностью даже в отсутствие внешнего магнитного поля (железо, кобальт, никель, гадолиний и их сплавы).

- Кривая намагничения была впервые получена и исследована в 1878 г. русским ученым А.Г. Столетовым (1839 – 1896 гг.)

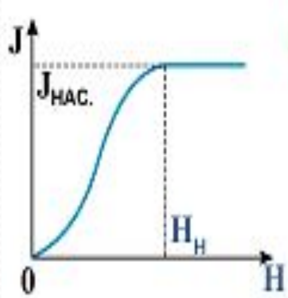
Зависимость магнитной проницаемости вещества от напряженности магнитного поля

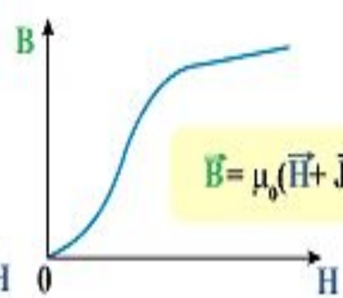
J_R - остаточная намагниченность
H_K - коэрцитивная сила



$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + const$

$(const = \mu_0 J_н)$



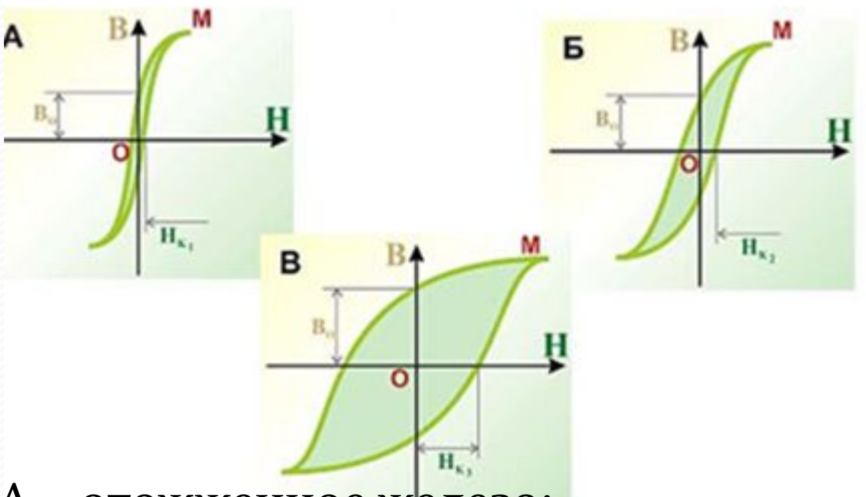


$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$

С наличием остаточного намагничения связано существование постоянных магнитов.

Магнитный гистерезис ферромагнетиков. Петля гистерезиса.

Магнитный гистерезис – это зависимость магнитной индукции (намагниченности) от напряженности магнитного поля, определяемая предысторией намагничивания магнетика.



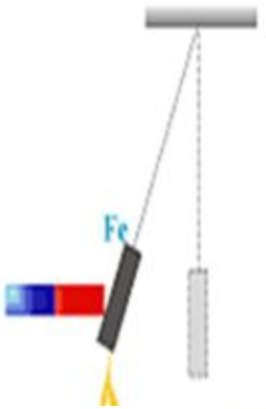
А – отожженное железо;

Б – мягкое железо;

В – сталь.

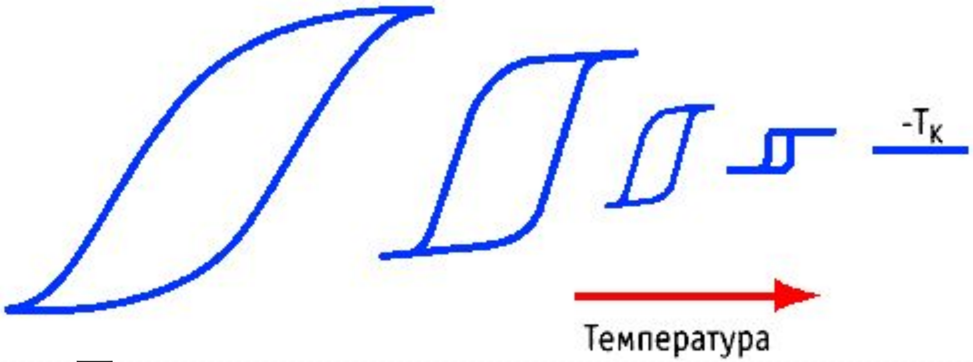
- Ферромагнетики с малой коэрцитивной силой (узкая петля гистерезиса) называются ***мягкими*** (используются для изготовления сердечников трансформаторов, электромоторов, генераторов, в слаботочной технике, связи и радиотехнике).
- Ферромагнетики с большим значением коэрцитивной силы (широкая петля гистерезиса) называются ***жесткими*** (используются при изготовлении постоянных магнитов).

Точка Кюри



Железо (99% Fe)	780 °C
Никель (Ni)	350 °C
Кобальт (Co)	1150 °C
Пермаллой (Fe - 16%, Ni - 78%, Mo - 3,8%)	550 °C

Для каждого ферромагнетика существует температура T_c, выше которой это вещество теряет свои ферромагнитные свойства – точка Кюри. В точке Кюри происходит фазовой переход II рода.



При температурах, выше точки Кюри T_c, ферромагнетик становится парамагнетиком, магнитная проницаемость которого определяется по закону Кюри-Вейса:

$$\chi_м = \frac{C}{T - T_c}$$

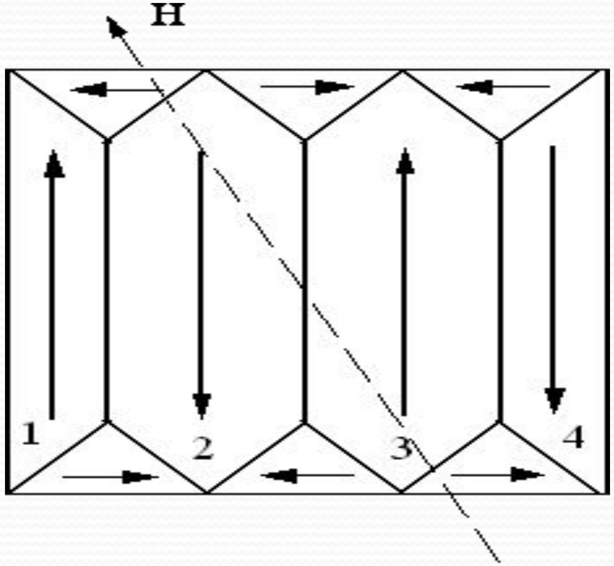
В некоторых случаях обменные силы приводят к возникновению антиферромагнетиков (хром, марганец и другие). Они были предсказаны в 1933г. Л.Д. Ландау. У них собственные магнитные моменты самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу, такой ориентацией охвачены попарно соседние атомы => антиферромагнетики обладают очень малой по величине χ и ведут себя как парамагнетики. Точка Нееля T_N -температура, при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает- антиферромагнитная точка Кюри. У некоторых веществ(эрбий, диспрозий, сплавы марганца и меди) T_N две.

- Ферро < T_N < антиферро < T_N < пара

Доменная структура ферромагнетиков. Теория Вейсса

Согласно представлениям **Пьера-Эрнста Вейсса** (1865 – 1940 гг.) ферромагнетики при $T < T_c$ обладают спонтанной намагниченностью независимо от наличия внешнего поля. При такой температуре ферромагнетик разбивается на большое число макроскопических областей – **доменов** (размеры ~ 10^{-5}–10^{-6}м), самопроизвольно намагниченных до насыщения.

Пьер-Эрнст Вейсс



При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически. Если поместить ферромагнетик во внешнее поле, то начинается смещение границ доменов таким образом, чтобы областей с ориентацией моментов по полю стало больше, чем областей с противоположной ориентацией. Такой процесс наблюдается до тех пор, пока не будут захвачены все энергетически невыгодные домены. По мере нарастания магнитного поля весь кристалл превратится в один большой домен с магнитным моментом, ориентированным по полю. Процесс является необратимым – причина гистерезиса. Чтобы ферромагнетик размагнитить, необходимо приложить коэрцитивную силу, встряхнуть и нагреть ферромагнетик выше T_c.

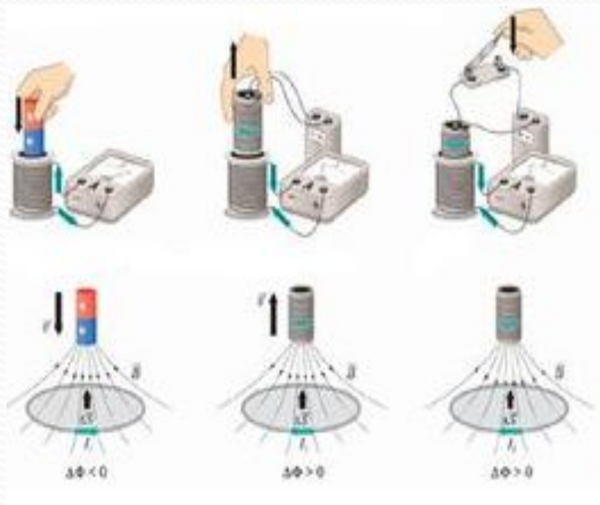
Электромагнитнася индукция

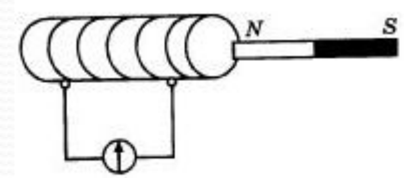
Опыты Фарадея.
Явление электромагнитной индукции

Майкл Фарадей

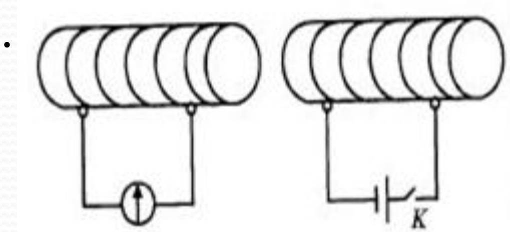
(1791 – 1867 гг.) – английский физик

Опыты Фарадея





- 1) индукционный ток (регистрируется гальванометром) возникает, если вносить (выносить) магнит или катушку в (из) катушки; причем стрелка гальванометра при внесении (вынесении) магнита (катушки) отклоняется в разные стороны.
- 2) индукционный ток возникает в левой и при включении (выключении) тока в правой катушке.

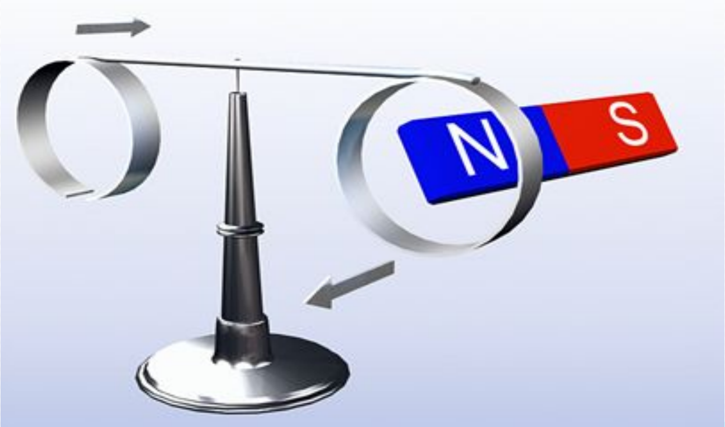


Электромагнитная индукция (от лат. «inductio» – «наведение») – явление возникновения в замкнутом проводящем контуре электрического тока при изменении магнитного потока. Такой **ток** называют **индукционным**. Суть явления заключается в порождении *вихревого электрического поля* при изменении магнитного поля.

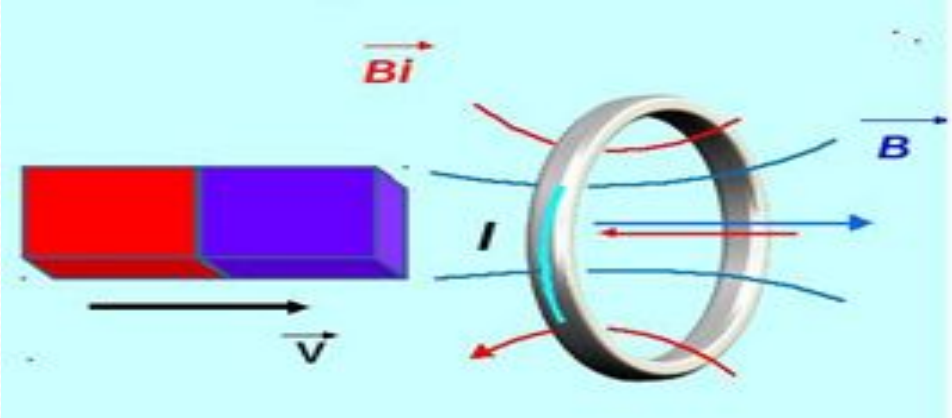
Правило Ленца

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

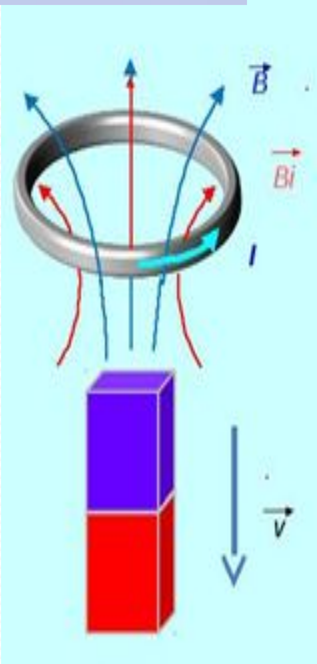
Ленц Эмилий Христианович
(1804 – 1865 гг.)
российский физик



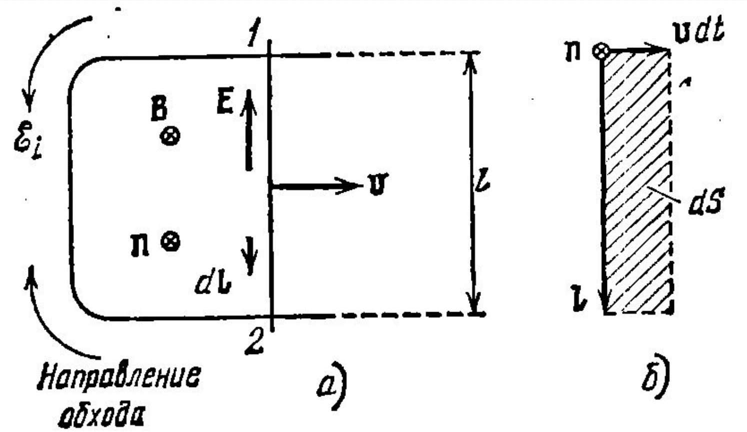
При приближении магнита к замкнутому контуру Фв через поверхность, ограниченную контуром, увеличивается. Возникающий индукционный ток имеет направление, при котором возникает такой магнитный поток, который препятствует магнитному потоку, вызвавшему этот ток.



При удалении магнита от замкнутого контура Фв через поверхность, ограниченную контуром, уменьшается. Возникающий при этом индукционный ток имеет направление, при котором возникает такой магнитный поток, который стремится поддержать внешний поток.



ЭДС индукции. Закон Фарадея



Рассмотрим контур с подвижной перемычкой l. Поместим его в однородное магнитное поле $\vec{B}$. Перемычка движется со скоростью $\vec{v}$. С той же $\vec{v}$ перемещаются и $\bar{e}$ в перемычке.

$\vec{\mathcal{F}}_{\parallel} = e\,[\vec{v}\vec{B}]$ - магнитная сила, действующая на каждый электрон, направлена вдоль перемычки. Действие силы аналогично действию эл. поля $\vec{E}$:

$\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$ - это поле неэлектростатического происхождения.

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}\,d\vec{\ell} = \oint [\vec{v}\vec{B}]\,d\vec{\ell} = \int_1^2 [\vec{v}\vec{B}]\,d\vec{\ell}$$

Чтобы по знаку $\mathcal{E}_i$ можно было судить о направлении, в котором действует $\mathcal{E}_i$, будем считать $\mathcal{E}_i > 0$ в том случае, когда её направление образует с нормалью правый винт.

$$\mathcal{E}_i = [\vec{v}\vec{B}] \int_1^2 d\vec{\ell} = [\vec{v}\vec{B}]\vec{\ell}$$

Осуществим циклическую перестановку сомножителей :

$$\mathcal{E}_i = \vec{B}[\vec{\ell}\vec{v}] = \frac{\vec{B}[\vec{\ell};\vec{v}dt]}{dt}$$

$[\vec{\ell};\vec{v}dt] = -\vec{n}dS$, где dS приращение S за dt.

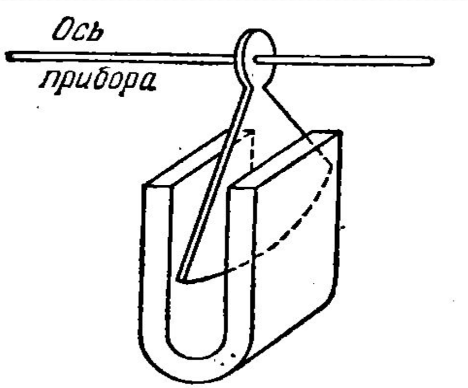
$$\vec{B}[\vec{\ell};\vec{v}dt] = -\vec{B}\vec{n}d\vec{S} = -d\Phi$$

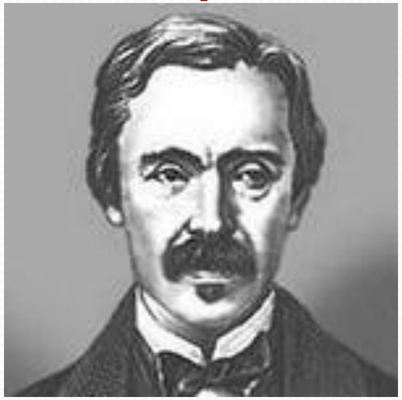
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$ - закон Фарадея

- $1[\Phi] = 1$ Вб; при $\frac{d\Phi}{dt} = 1$ Вб/с $\mathcal{E}_i = 1$ В

Токи Фуко –

вихревые индукционные токи, возникающие в сплошных массивных проводниках при изменении пронизывающего их магнитного потока.

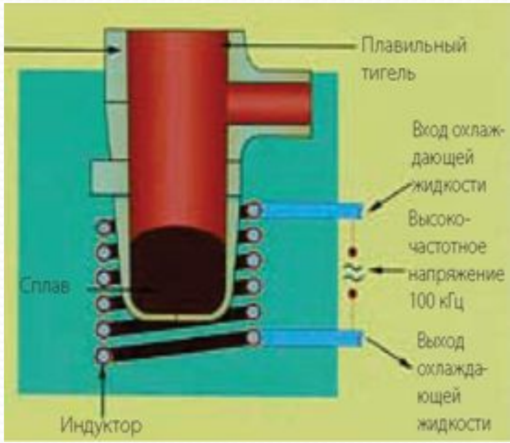




Жан Бернар Леон Фуко

(1819 – 1868 гг.) – французский физик, механик и астроном

Индукционная печь



R массивного проводника мало, следовательно, токи Фуко могут достигать больших значений.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает, следовательно движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Это используют для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая пластинка в виде сектора, которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы. Торможение прекращается, когда пластинка останавливается.

- ***Тепловое действие*** токов Фуко используется в индукционных печах. Печь представляет катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Это используют для получения сверхчистых металлов при плавлении в вакууме. С помощью токов Фуко осуществляют прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их ***обезгаживания***.
- Токи Фуко, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, ослабляют ток внутри провода, усиливая его на поверхности – ***скин-эффект*** = > в высокочастотных цепях применяют проводники в виде полых трубок.

Самоиндукция

явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока

Согласно закону Био-Савара-Лапласа $\boldsymbol{B \sim I}$ => сцепленный с контуром магнитный поток $\boldsymbol{\Phi \sim I}$ в контуре:

$$\Psi = LI$$

, где

L – индуктивность контура.

$$1\ [L] = 1\ \text{Гн}$$

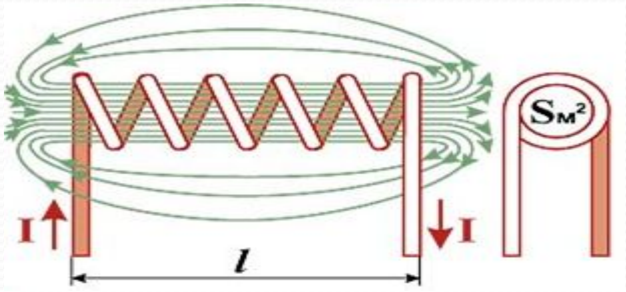
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

При отсутствии ферромагнетиков:

$L = const$ =>

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt}$$

Индуктивность соленоида:



Магнитный поток через один виток:

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 nIS$$

Магнитный поток сквозь соленоид (*потокосцепление*):

$$\Psi = NBS = nlBS = \mu\mu_0 n^2 IV$$

, где

n – число витков на единицу длины.

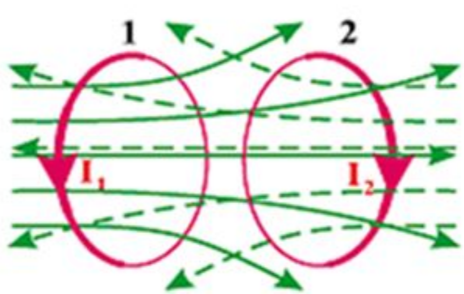
$$L = \mu\mu_0 n^2 V$$

Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура **1** и **2** с токами *I1* и *I2*, расположенных достаточно близко друг от друга. При протекании в контуре **1** тока *I1* магнитный поток пронизывает второй контур.

Взаимная индукция **– явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменениях силы тока в другом.**

Связанные контуры:



$$\Psi_1 = L_{12} I_2$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\Psi_2 = L_{21} I_1$$

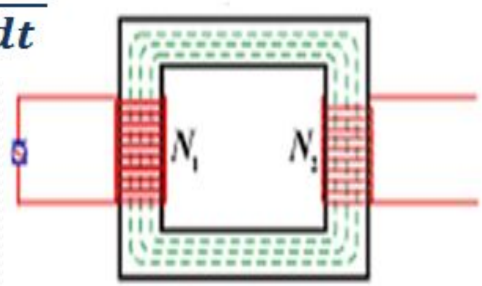
$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

L12 и L21 – взаимная, индуктивность *(зависит от формы, размеров, взаимного расположения контуров, магнитной проницаемости окружающей среды).*

L12 = L21

Для примера *рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный сердечник.*

Первая катушка с числом витков N_1 и током I_1 создает поле



Трансформатор

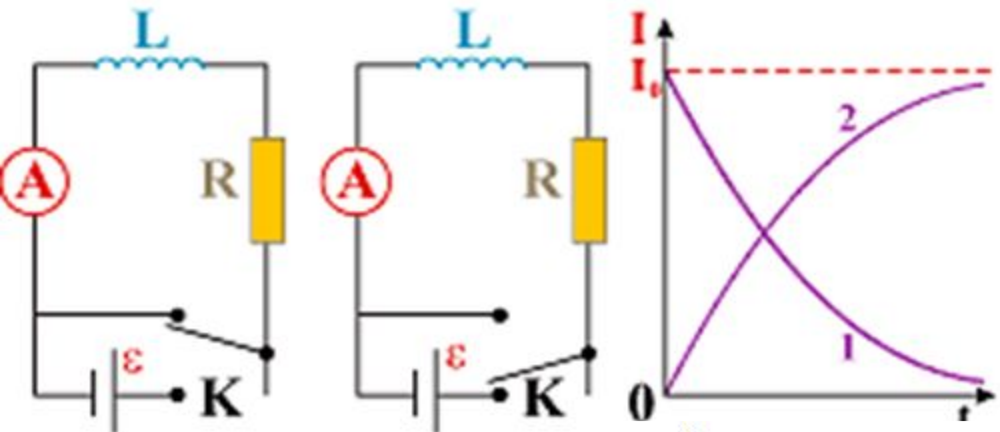
$B = \mu_0\mu\frac{N_1 I_1}{l}$. Магнитный поток сквозь один виток второй катушки $\Phi_2 = BS = \mu_0\mu\frac{N_1 I_1}{l}S$, где l – длина сердечника по средней линии. Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую N_2 витков:

$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0\mu\frac{N_1 N_2}{l}SI_1$. Поскольку поток Ψ создается током I_1, то

$$L = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0\mu\frac{N_1 N_2}{l}S.$$

Данное устройство является примером трансформатора.

Токи при замыкании и размыкании цепи



$\tau = \frac{L}{R}$ – ***время релаксации***

- При ***замыкании*** цепи после подключения источника ЭДС, до тех пор, пока сила тока не достигнет установившегося значения, в цепи кроме ЭДС будет действовать ЭДС самоиндукции:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}$$

Частное решение: $I = \frac{\varepsilon}{R} = I_0$

Общее решение: $I = I_0 + const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

В t = 0: I = 0 => const = - I_o: $I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно(по правилу Ленца токи, возникающие вследствие самоиндукции, направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи). $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$

- При ***размыкании*** цепи:

В момент $t = 0$ отключим источник тока, замкнув цепь накоротко ключом К:

$$IR = \mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}, \text{ или } \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

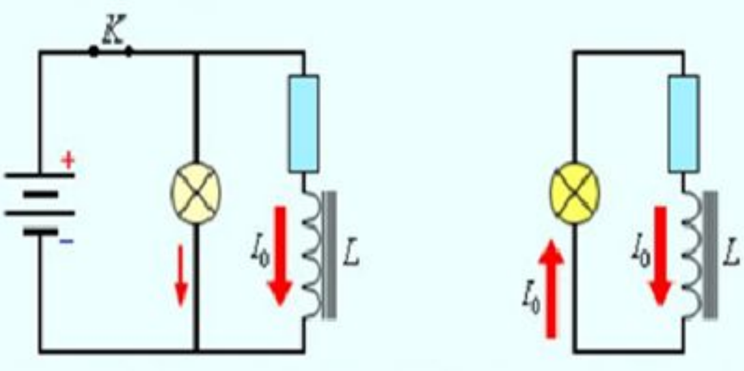
$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln const$$

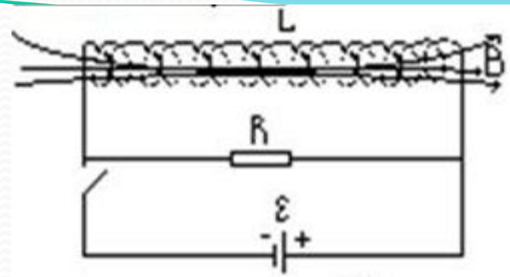
$$I = const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

При $t = 0$: $I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow const = I_0$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

поля





Рассмотри цепь:

при замкнутом ключе возникает ток *I*, которое обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида;

при размыкании – через сопротивление некоторое время будет протекать постепенно убывающий ток , поддерживаемый возникающей в соленоиде ЭДС самоиндукции.

Работа тока за время *dt*:

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi$$

$$L = const \; (L \neq L(I)) \qquad d\Psi = L dI$$

$$dA = -L I dI$$

Работа идет на приращение внутренней энергии цепи:

$$A = -\int_1^0 L I dI = \frac{LI^2}{2}$$

Совершение работы сопровождается исчезновением магнитного поля:

$$\mathbf{W} = \frac{LI^2}{2}$$

Проводник с током порождает в окружающем себя пространстве магнитное поле, причем с исчезновением тока, исчезает и магнитное поле.

Магнитное поле, как и электрическое, - ***носитель энергии***. Подобно тому, как в заряженном конденсаторе имеется запас электрической энергии, в катушке, по виткам которой протекает ток, имеется запас магнитной энергии. Если включить электрическую лампу параллельно катушке с большой индуктивностью в цепь постоянного тока, то при замыкании ключа наблюдается кратковременная вспышка лампы. Ток в цепи возникает под действием ЭДС самоиндукции. Источником энергии, выделяющейся при этом в цепи, является магнитное поле катушки.

Теория ЭМП Максвелла

Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай ЭМИ, когда проволочный контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменение магнитного потока обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение $I_{инд.}$ свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока => $I_{инд.}$ обусловлен возникающим в проводе электрическим полем .

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E_B}\, d\vec{\ell}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, dS$$

Из этих трех уравнений следует, что

$$\oint \vec{E_B}\, d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, dS$$

Так как неподвижны, дифференцирование по t и интегрирование по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \vec{E_B}\, d\vec{\ell} \qquad \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

По теореме Стокса:

$$\int_S [\nabla \vec{E_B}]\, d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

Из-за произвольности выбора поверхности интегрирования:

$$[\nabla \vec{E_B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле $\vec{E_B}$ отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля

$$\vec{E_q}\ ([\nabla \vec{E_q}]=0)$$

Линии $\vec{E_B}$ замкнуты, а линии $\vec{E_q}$ начинаются и заканчиваются на заряде => электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. В общем случае:

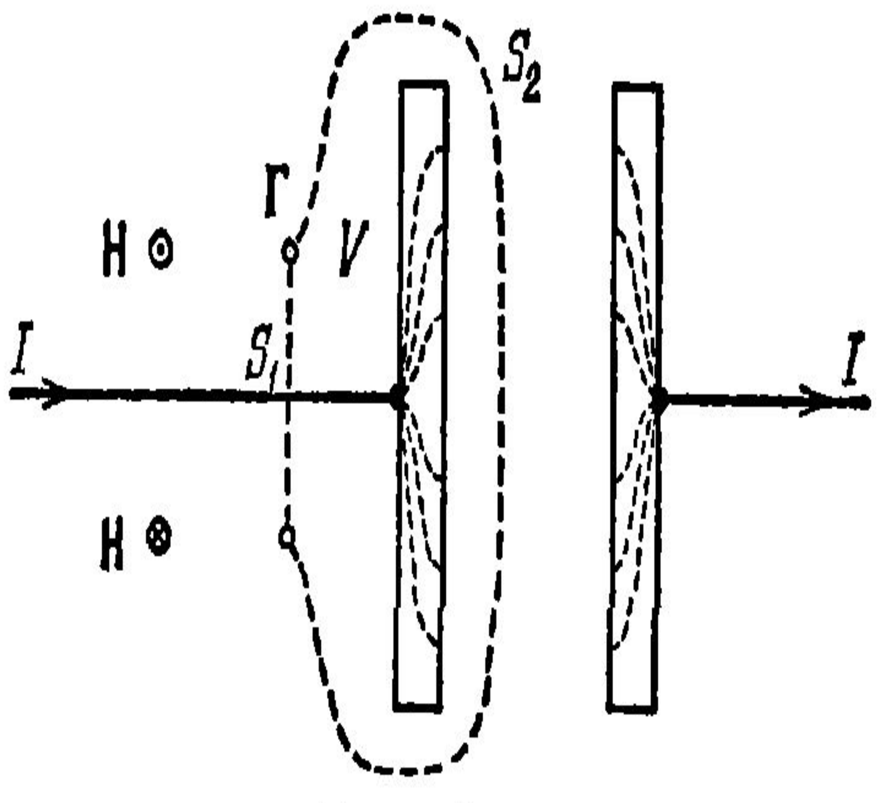
$$\vec{E} = \vec{E_q} + \vec{E_B} \quad => \quad [\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ток смещения

В случае стационарного ЭМП: $[\nabla \vec{H}] = \vec{j}$

Уравнение непрерывности: $\nabla \vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

ЭМП- стационарно, если ρ=ρ(x,y,z) и $\vec{j} = \vec{j}$(x,y,z)=> $\nabla \vec{j} = 0$ и линии тока замкнуты.



Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного *U*. Этот ток непостоянен во *t* (когда напряжение на конденсаторе становится *U*, ток прекращается). Линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора. Возьмем круговой контур Г, охватывающий провод, по которому течет ток к конденсатору

$$\int_{S_1} [\nabla \vec{H}] d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j}\, d\vec{S}$$

Используем теорему Стокса: $\oint_{\Gamma} \vec{H}\, d\vec{\ell} = \oint_{S_1} \vec{j}\, d\vec{S} = I,$

где *I* – сила тока , заряжающего конденсатор.

Если проделать такие же вычисления для *S2*, не пересекающей провод с *I*, придем к явно неверному соотношению:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}\, d\vec{\ell} = \oint_{S_2} \vec{j}\, d\vec{S} = 0$$

Вывод: отсутствует слагаемое, зависящее от производных полей по времени. Для стационарных полей это слагаемое —> 0.

Для устранения противоречий Максвелл вводит дополнительное слагаемое : $\overrightarrow{J_{смещ}}$

Тогда $$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \overrightarrow{J_{смещ}}$$

$$\overrightarrow{J_{полн}} = \vec{j} + \overrightarrow{J_{смещ}}$$

$$\nabla \overrightarrow{J_{смещ}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Известно, что $$\nabla \vec{D} = \rho$$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Поменяем порядок дифференцирования: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Учтем, что $$\nabla \overrightarrow{J_{смещ}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \overrightarrow{J_{смещ}} = \nabla \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Т.к. $[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \overrightarrow{J_{смещ}}$, то $$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

По существу ток смещени… щееся со временем электрическое поле. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает способностью создавать магнитное поле.

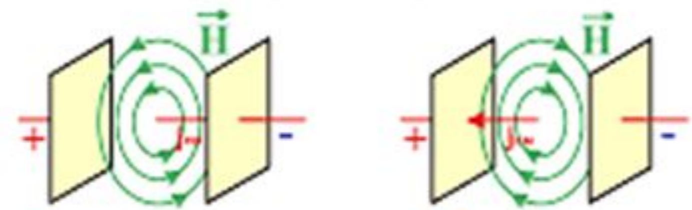
Плотностью тока смещения называется вектор:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где $\vec{D}$ - вектор электрического смещения

Ток смещения через произвольную поверхность S равен:

$$I_{см} = \int_S \vec{j}_{см} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$



$\partial \vec{D}/\partial t$ возрастает $\qquad$ $\partial \vec{D}/\partial t$ убывает

Ток смещения или изменяющееся во времени электрическое поле вызывает появление магнитного поля

Плотность полного тока равна:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где $\vec{j} = \sigma \vec{D}$ - плотность тока проводимости

Полный ток через поверхность S равен :

$$I_{полн} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{см}) d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

Уравнения Максвелла

Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1879 гг.) – выдающийся английский физик

Физический смысл уравнений Максвелла :

Уравнение (1) представляет собой закон ЭМИ Фарадея, который говорит о том, что вихревое эл. поле порождается меняющимся во времени магнитным полем. Знак «-» показывает, что при убывании электрического поля магнитная составляющая ЭМП возрастает.

Уравнение (2) говорит о том, что источниками электростатического поля служат сторонние заряды. Является выражением теоремы Гаусса для вектора электрического смещения.

Уравнение (3) говорит о том, что вихревое магнитное поле порождается движущимися зарядами и возникает вокруг проводников с токами.

Уравнение (4) говорит о том, что в природе не существует источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам. Выражает теорему Гаусса для вектора магнитной индукции.

Дифференциальная форма:

1) $[\nabla\vec{E}] = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; 2) $\nabla\vec{D} = \rho$;

3) $[\nabla\vec{H}] = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$; 4) $\nabla\vec{B} = 0$

Материальные уравнения состояния среды:

$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

Закон Ома:

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$

Интегральная форма:

1) $\oint\limits_{\Gamma} \vec{E}\,d\vec{\ell} = -\dfrac{d}{dt}\int\limits_{S} \vec{B}\,d\vec{S}$; 2) $\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \int_V \rho\,dV$

3) $\oint\limits_{\Gamma} \vec{H}\,d\vec{\ell} = \int\limits_{S} \vec{j}\,d\vec{S} + \dfrac{d}{dt}\int\limits_{S} \vec{D}\,d\vec{S}$; 4) $\oint\limits_{S} \vec{B}\,d\vec{S} = 0$

Уравнения преобразуются из дифференциальной формы в интегральную, и, наоборот, при использовании теоремы Остроградского – Гаусса (уравнения (2) и (4)) и при использовании теоремы Стокса (уравнения (1) и (3)).