Основы теории вероятностей

Виды событий

- **Достоверное**

  Событие, которое обязательно произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий.

- **Невозможное**

  Событие, которое заведомо не произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий.

- **Случайное**

  Событие, которое при осуществлении определённой совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Предмет теории вероятностей

- Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Виды случайных событий

- Несовместные
- Образующие полную группу
- Равновозможные

Случайное событие

- **Событие** – это результат испытания.
- **Элементарный исход** – каждый из возможных результатов испытания.
- **Благоприятствующий исход** – тот исход, в котором интересующее нас событие произошло.

Классическое определение вероятности

- **Вероятностью события *A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

1. Вероятность <u>достоверного</u> события равна единице.
2. Вероятность <u>невозможного</u> события равна нулю.
3. Вероятность <u>случайного</u> события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Вывод

- Вероятность **любого** события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример 1

- Из колоды в 36 карт вытащили одну карту. Какова вероятность, что это будет бубновая масть?

Решение:

A – из колоды вытащили бубновую карту

$n = 36$ (всего 36 карт в колоде)

$m = 9$ (9 карт бубновой масти)

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Пример 2

- Абонент забыл две последних цифры в номере телефона и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Какова вероятность, что набран правильный номер?

Решение:

A – набран правильный номер

***n* = 90** (существует всего 90 комбинаций из двух разных цифр)

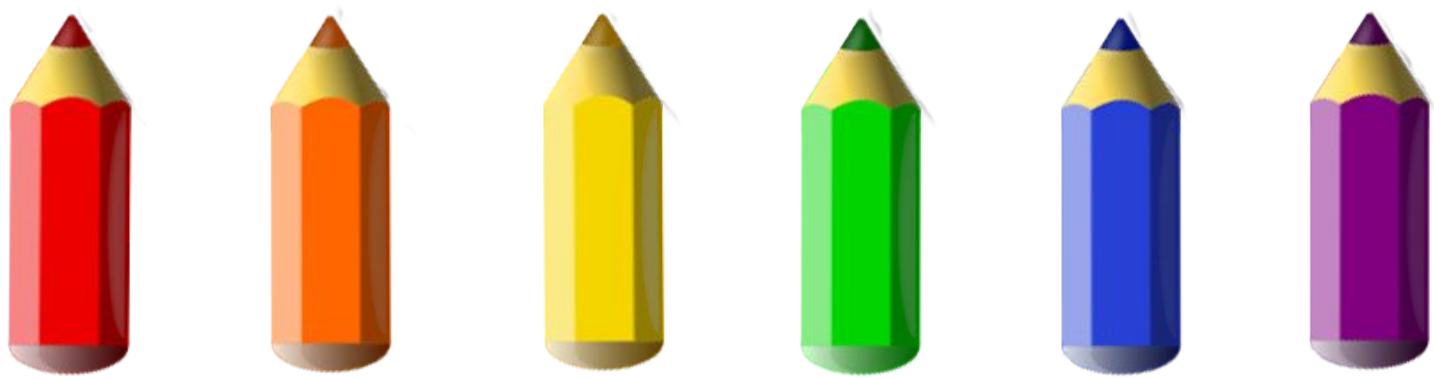
***m* = 1** (только в одном случае номер будет верным)

$$P(A) = \frac{1}{90} = 0,011$$

Комбинаторика

- Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчинённых определённым условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Перестановки



Перестановки

Комбинации, состоящие из одних и тех же ***n*** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

$$P_n = n!$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1$$

Пример

- Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если все цифры в числе разные?

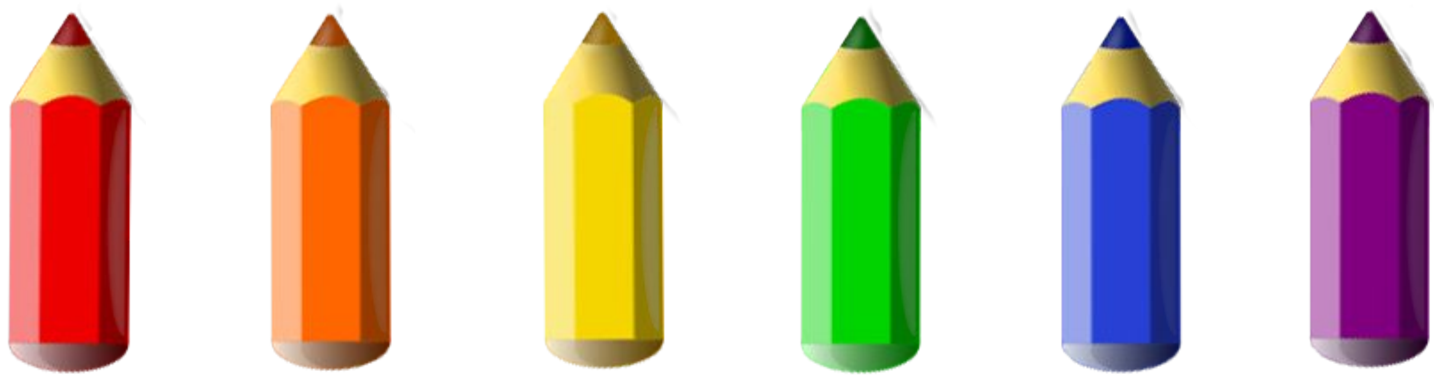
Решение:

n = 5 (имеется 5 разных цифр)

Количество возможных перестановок:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Размещения



Размещения

Комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементам, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример

- Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если все цифры в числе разные?

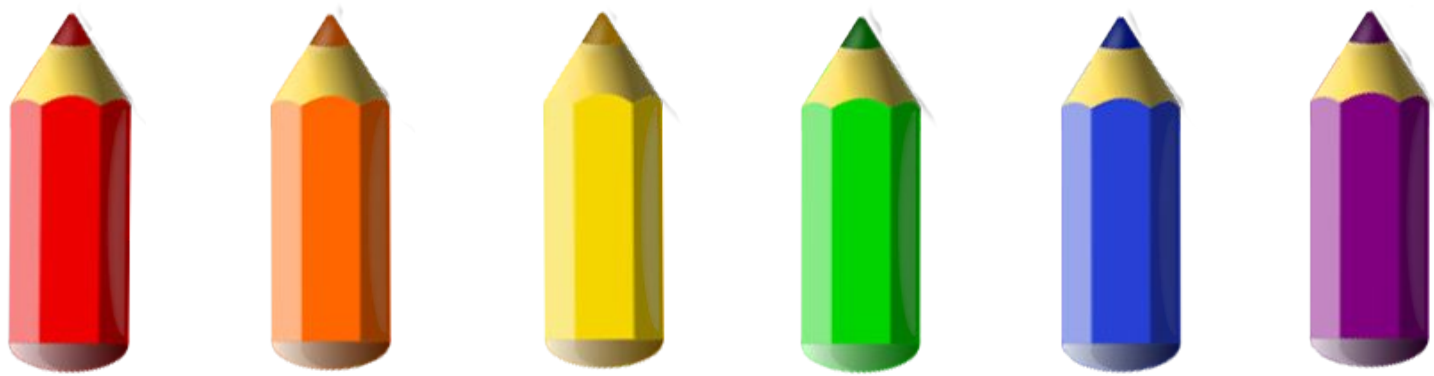
<u>Решение:</u>

n = 6 (имеется 6 разных цифр)

m = 2 (выбираем по 2 цифры)

Количество возможных размещений 6 цифр по двум местам:

$$A_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$$



Сочетания

Комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементам, которые отличаются хотя бы одним элементом (порядок элементов не важен).

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Свойства сочетания

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Пример

- На витрине магазине 10 видов пирожных. Сколькими способами можно выбрать 4 разных пирожных?

<u>Решение:</u>

n = 10 (имеется 10 разных пирожных)

m = 4 (выбираем по 4 пирожных)

Количество возможных комбинаций из 10 пирожных по 4:

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\cdot(10-4)!}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}=$$

$$=\frac{7\cdot\cancel{8}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 10}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}=\frac{7\cdot 3\cdot 10}{1}=210$$

Связь комбинаций

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

Перестановки с повторениями

Если среди ***n*** элементов есть $\boldsymbol{n_1}$ элементов одного вида, $\boldsymbol{n_2}$ элементов другого вида и т.д. (т.е. $\boldsymbol{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$), то число перестановок с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Размещения с повторениями

Если ***n*** различных элементов могут повториться ***m*** раз, оказавшись соответственно на ***m*** местах, то число размещений с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Сочетания с повторениями

Если ***n*** различных элементов могут повториться ***m*** раз (без учёта порядка), то число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

Алгоритм выбора комбинаци и

Правило суммы

- Если некоторый объект ***A*** можно выбрать из совокупности объектов ***k*** способами, а другой объект ***B*** можно выбрать ***m*** способами, то выбрать или ***A***, или ***B*** можно ***k + m*** способами.

Правило произведения

- Если некоторый объект ***A*** можно выбрать из совокупности объектов ***k*** способами, и после каждого такого выбора другой объект ***B*** можно выбрать ***m*** способами, то выбрать пару объектов ***A*** и ***B*** можно $k \cdot m$ способами.