Математика 2 семестр.
Лекция 4.

Экстремум функции нескольких переменных.

Наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области.

Экстремум функции нескольких переменных.

Пусть функция $z = f\,(x;y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0,y_0) \in D$.

Точка M_0 называется точкой **максимума** функции $z = f\,(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки M_0 и такой, что $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Точка M_0 называется точкой **минимума** функции $z = f\,(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки M_0 и такой, что $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$.

Следовательно, в точке максимума функция $z = f(x;y)$ принимает значение наибольшее, а в точке минимума – наименьшее по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках. Максимум и минимум функции называются ее **экстремумами** и обозначают $max\, f(x,y)$ и $min\, f(x,y)$.

Теорема(необходимые условия существования экстремума).

Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум, то обе первые частные производные в этой точке равны нулю.

Доказательство.

Пусть в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $z = f(x;y)$ имеет экстремум.

Положим $y = y_0$ и рассмотрим функцию одного переменного x:

$$f(x,y_0) = \varphi(x).$$

Очевидно, что точка $x = x_0$ является точкой экстремума для функции $\varphi(x)$ и поэтому производная от нее в точке x_0 (если производная существует) должна обращаться в нуль: $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0,y_0)=0$.

Аналогично, положив $x=x_0$, и рассматривая функцию одного переменного y: $f(x_0,y) = \psi(y)$, получим, что в точке экстремума $\psi'(y_0) = f'_y(x_0,y_0)=0$ (согласно необходимому условию функции одной переменной).

Критические точки функции двух переменных.

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума называются **критическими** или **стационарными**.

В критических точках (также как и для функции одной переменной) функция двух переменных $z = f\,(x;y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь.

Для нахождения экстремума функции необходимо каждую критическую точку дополнительно исследовать с помощью достаточного признака.

Теорема (достаточные условия существования экстремума)

- Пусть в стационарной точке $M_0(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и обозначим

  $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$; $\Delta = AC - B^2$.

  Тогда в точке M_0 функция $z = f(x,y)$:

- имеет минимум, если $\Delta>0$ и $A > 0$;
- имеет максимум, если $\Delta> 0$ и $A < 0$;
- не имеет экстремума, если $\Delta<0$.
- вопрос о наличии экстремума остается открытым, если $\Delta=0$. Необходимы дополнительные исследования;

Без доказательства.

Пример.

Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение

1) Находим стационарные точки, т.е точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Для этого вычисляем частные производные, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2-3y, \\ z'_y = 3y^2-3x. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y=0, \\ y^2-x=0. \end{cases}$$

Решением будут две точки $M_0(0;0)$ и $M1(1;1)$.

1) Применим достаточный признак, чтобы выяснить вопрос о наличии и характере экстремума.

$z''_{xx}=6x$; $z''_{xy}=-3$; $z''_{yy}=6y$. Подставим сюда координаты стационарных точек, получим:

для точки M_0: $A=0$, $B=-3$, $C=0$, $\Delta_{M0}=AC-B2=-9<0$, нет экстремума в точке $M_0(0;0)$;

для точки M_1: $A=6$, $B=-3$, $C=6$, $\Delta_{M1}=AC-B2=27>0$ и $A=6>0$, в точке $M_1(1;1)$ данная функция имеет минимум.

$z_{min}=z(M_1)=1+1-3=-1$.

Точка M называется **внутренней** точкой множества G, если существует δ - окрестность точки M, целиком принадлежащая множеству G.

Точка M_0 называется **граничной точкой** множества G, если в любой δ - окрестности точки M_0 содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества G называется его **границей** Г.

Множество G называется **открытой областью** или областью, если все его точки – внутренние и любые две точки множества G (точки M и N рис.4) можно соединить непрерывной кривой, также лежащей внутри G.

Открытая область с присоединенной границей Г называется **замкнутой областью**.

Пример.

Внутренность круга $x^2+y^2<1$ – есть область; окружность $x^2+y^2=1$ – ее граница; круг с присоединенной границей $x^2+y^2\leq 1$ – замкнутая область.

Область называется **ограниченной**, если она целиком содержится внутри круга (или шара) достаточно большого радиуса.

Функция $z = f(x;y) = f(M)$ называется **непрерывной** в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если функция $z = f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

- имеет наибольшее и наименьшее значения;
- ограничена: $|f(M)| \leq K$ (K - положительное число);
- принимает в этой области все значения, заключенные между наименьшими и наибольшими ее значениями.

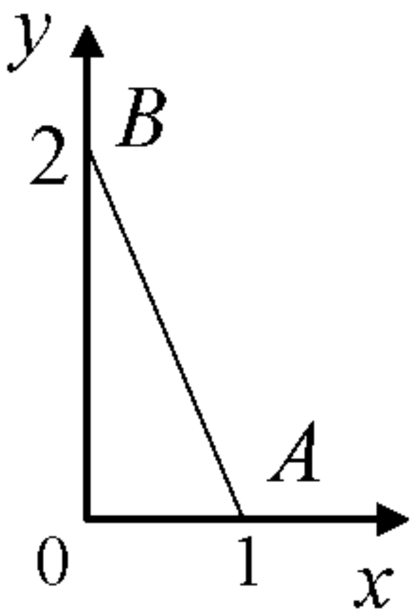
Наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области.

- Отметим, что кроме экстремальных значений функции $z = f(x;y)$ (так называемых локальных экстремумов) можно отыскивать наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (глобальный экстремум). При этом, например, наибольшее значение может не совпадать ни с одним из максимумов и достигаться на границе области.
- Пусть $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, тогда среди значений функции заведомо имеется наибольшее и наименьшее. Правило нахождения этих значений:

1) Найти все стационарные точки функции внутри области D и на ее границе и вычислить значения функции в них.
2) Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=xy в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, 2x+y=2.



Решение.

Найдем стационарные точки внутри треугольника

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

$M_0(0;0)$ – стационарная точка внутри треугольника.

Поведение функции на границе:

OA: $y=0,\ 0\le x\le 1,\ z=0.$

OB: $x=0,\ 0\le y\le 2,\ z=0.$

AB: $y=2-2x,\ 0\le x\le 1,\ z=xy=2x-2x^2;\ \ z'_x=2-4x=0.$

$x=1/2$; $y=0$; $M_1(1/2;1)$- стационарная точка на границе.

Найдем значения функции в стационарных точках и сравним эти значения

$z(M_0)=0; z(M_1)=1/2$.

Наибольшее значение функции z реализуется в точке отрезка AB: $M=1/2$ в точке $(1/2;1)$

Наименьшее значение функции z реализуется в точках внутри области и на границах: $m=0$ в точке $(0;0)$ и на OA и OB.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение: Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные, построенные в точке M_0 ко всевозможным кривым лежащим на поверхности и проходящим через эту точку.

Пусть поверхность P в пространстве задана уравнением $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$– дифференцируемая функция.

Возьмем на поверхности P точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и проведем через неё какую-нибудь кривую l, лежащую на поверхности P.

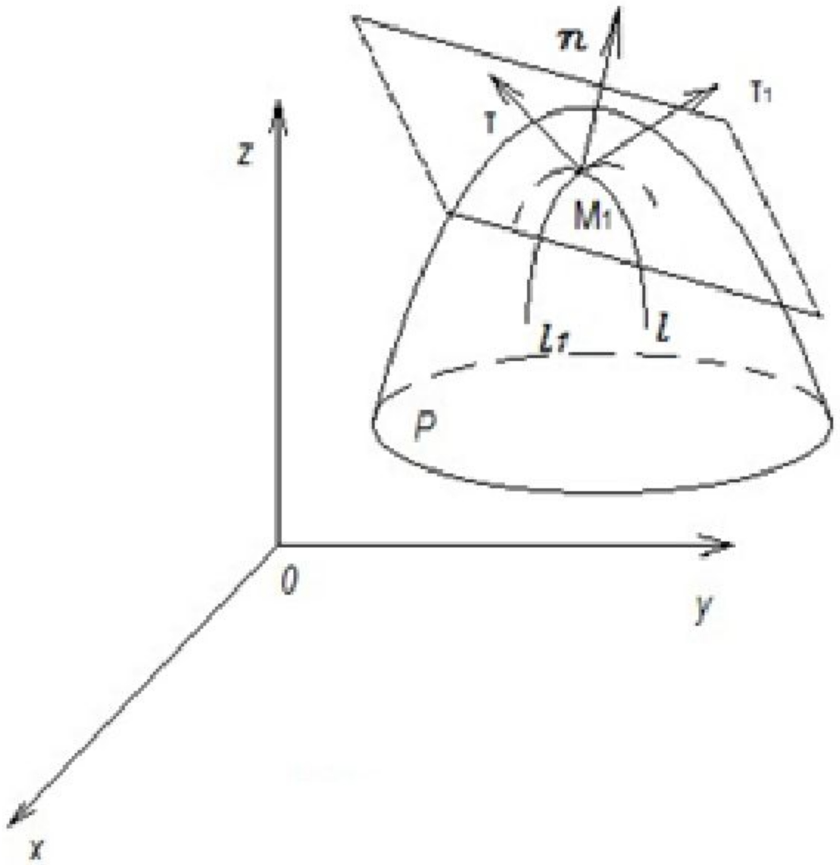
Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ параметрические уравнения линии l, где $x(t); y(t); z(t)$ дифференцируемые функции по t. Так как линия l лежит на поверхности P, то подставив в её уравнение вместо $x; y; z$ их выражения, получим тождество $F[x(t); y(t); z(t)] \equiv 0$

Дифференцируем это тождество по t, получим $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dy}{dt} = 0$

Заметим, что в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$: $x_0 = x(t_0); y_0 = y(t_0); z_0 = z(t_0)$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Тогда в точке M_0 рассмотрим два вектора:

вектор $\vec{\tau} = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0))$, касательный к кривой l, в точке M_0 вектор $\vec{n} = (F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0))$, перпендикулярный вектору $\vec{\tau}$, что следует из полученного равенства, которое можно представить в виде $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$, а это будет означать, что векторы $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ ортогональны.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Вектор $\vec{n}$ полностью определяется поверхностью $F(x;y;z) = 0$ и точкой M_0 и не зависит от выбора линии, проходящей через точку M_0, а поэтому он перпендикулярен касательному вектору $\vec{\tau}$ к любой кривой l, проведенной на поверхности P в точке M_0.

Вектор $\vec{n}$ называется **нормальным вектором** к поверхности $F(x;y;z) = 0$ в точке M_0. Тогда касательная к любой линии l, проходящей через точку M_0, лежит в плоскости, перпендикулярной нормальному вектору $\vec{n}$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности P в точке M_0 будет плоскость, проходящая через эту точку перпендикулярно нормальному вектору к поверхности в этой точке. Или это плоскость, в которой лежат касательные прямые ко всем кривым, проведенным по поверхности P в точке M_0.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\boxed{F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение.

Нормалью к поверхности $F(x;y;z) = 0$ в данной её точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке. Направляющим вектором указанной прямой служит вектор нормали $\vec{n}$.

Каноническое уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z) = 0$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}}$$

Замечание. Эти рассуждения теряют смысл, если $F'_x = F'_y = F'_z = 0$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x; y)$, то уравнение касательной плоскости будет получено как частный случай общего уравнения при $F(x; y; z) = z - f(x; y)$. Тогда $F'_x = -f'_x$; $F'_y = -f'_y$; $F'_z = 1$ и уравнение примет вид:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)}$$

Уравнения нормали будут

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

Теорема: Для того, чтобы поверхность $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имела касательную и плоскость необходимо и достаточно, чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируема в точке M_0.

Пример.

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ в точке $M_0(2;1;3)$

.

Решение.

Воспользуемся уравнением касательной плоскости в виде:

$$z - z_0 = z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0)$$

$z'_x = 2x$; $z'_y = -2y$; $z'_x(M_0) = 4$; $z'_y(M_0) = -2$.

Тогда имеем

$z - 3 = 4(x - 2) - 2(y - 1)$ или $4x - 2y - z + 3 = 0$ – уравнение касательной плоскости.

$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ – уравнение нормали.

Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http://www. iprbooksho p.ru/6298. — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С.   Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2