Функции нескольких переменных

- Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел $(x; y)$ некоторого множества М соответствует единственное число z другого множества N.

$$z = f(x; y)$$

x и y - независимые переменные (аргументы);

z - зависимая переменная;

М - область определения функции;

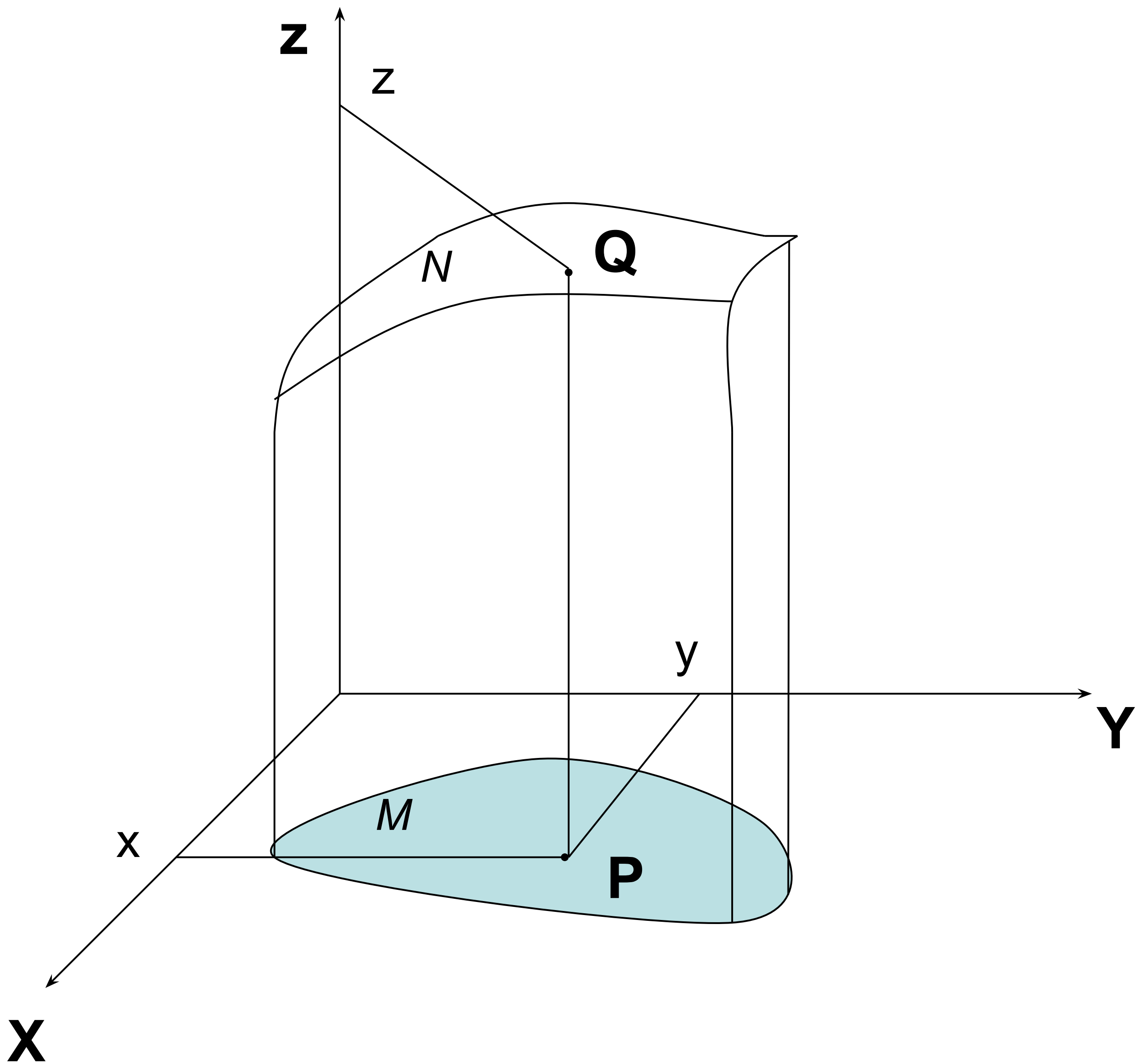
N - множество значений функции.

$$z_0 = z\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

$$z_0 = f\left(x_0; y_0\right)$$

Способы задания функции двух переменных

- Аналитический
- Табличный
- Графический


z
z
Q
N
y
Y
M
x
P
X

Частные производные

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$.
Зафиксируем $y = y_0$,тогда функция примет вид

$$z = f(x; y_0).$$

Пусть аргумент x в точке x_0 получил приращение Δx, тогда

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$,

если он существует, называется частной производной (первого порядка) функции $z = f(x; y)$ по х в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\,;\; f'_x(x_0; y_0);\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);\; z'_x(x_0; y_0)$$

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$.
Зафиксируем $x = x_0$,тогда функция примет вид

$$z = f(x_0; y)$$

Пусть аргумент y в точке y_0 получил приращение Δy, тогда

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

называется частной производной (первого порядка) функции $z = f(x; y)$ по y в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0);\; f'_y(x_0; y_0)\;;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\;;\; z'_y(x_0; y_0)$$

Частные производные высших порядков.

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Пример.

Вычислить частные производные второго порядка функции

$$z = x^2 y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Полный дифференциал.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Пример.

Найти полный дифференциал функции

$z = x\ y^2$ в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

$$dz = y^2 dx + 2xydy$$

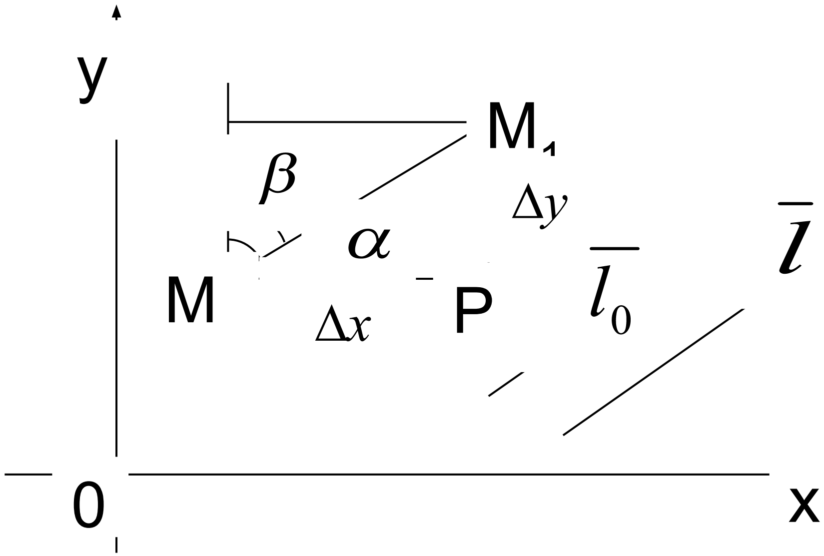
Скалярное поле

- Часть пространства (или всё пространство), каждой точке $P(x; y; z)$ которого соответствует численное значение некоторой скалярной величины

$$u = u(x; y; z)$$

называется скалярным полем.

Производная по направлению.



$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Градиент

$$\overrightarrow{grad\ u} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$$

Экстремум функции двух переменных

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция $z = f(x; y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум и пусть существует $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.

Тогда $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Достаточное условие существования экстремума

Пусть для функции $z = f(x; y)$ в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ существуют производные $f_{xx}''(P_0)$, $f_{yy}''(P_0)$, $f_{xy}''(P_0)$.
Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - z''_{xy} \cdot z''_{xy}$$

$$\Delta = A \cdot B - C^2$$

$$A = z''_{xx}$$

$$B = z''_{yy}$$

$$C = z''_{xy}$$

Возможны три случая:

1) $\Delta(P_0)$ >0 , тогда точка P_0 – точка экстремума:

при A >0 – P_0 точка минимума;

при A <0 – P_0 точка максимума.

2) $\Delta(P_0)$ <0, тогда P_0 не является точкой экстремума.

3) $\Delta(P_0)$ =0 , тогда необходимы дополнительные исследования.

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$1.\ z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$z'_y = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Решая систему ,получим четыре стационарные точки

$$P_1(1,2); \quad P_2(2,1);$$

$$P_3(-1,-2); \quad P_4(-2,-1).$$

Проверим достаточное условие экстремума в каждой из точек.

$$z''_{xx} = 6x\,; \qquad z''_{xy} = 6y\,; \qquad z''_{yy} = 6x\,.$$

$$\Delta = A \cdot B - C^2$$

1) Для точки $P_1(1,2)$:

$$A = 6; \qquad B = 6\,; \qquad C = 12$$

$$\Delta = 6 \cdot 6 - 12^2 < 0$$

Значит, в точке P_1 экстремума нет.

2) Для точки $P_2(2,1)$: $\Delta > 0$, $A > 0$.

В точке P_2 функция имеет минимум.

$$f_{\min} = f(P_2) = -28$$

Аналогично, проверяют точки P_3 и P_4 .