

14. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

14.1. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

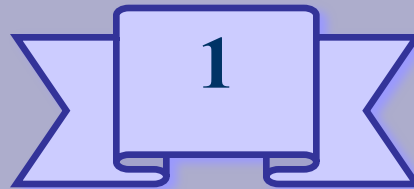
Рассмотрим ряды, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором множестве.

Такие ряды называются функциональными.

Будем рассматривать степенные ряды, членами которых являются степенные функции.

Степенным называется ряд

$$C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n + \dots$$



*Числа $C_0 \dots C_n$ называются
коэффициентами степенного ряда.*

При разных значениях x будут получаться разные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x , при которых степенной ряд (1) сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Частичная сумма степенного ряда

$$S_n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n$$

будет функцией от переменной x .

Следовательно, последовательность частичных сумм является функциональной последовательностью и сумма ряда будет зависеть от x . Она будет определена в области сходимости ряда.

ПРИМЕР.

*Найти область сходимости степенного
ряда*

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

РЕШЕНИЕ.

Данный ряд можно рассматривать как геометрический при

$$q = x$$

который сходится при

$$|q| = |x| < 1 \quad \longrightarrow \quad -1 < x < 1$$

Т.е. областью сходимости будет интервал

$$(-1, 1)$$

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

1

Если степенной ряд сходится при

$$x = x_0 \neq 0$$

*то он сходится, и при том
абсолютно, при всех значениях
 x , таких что*

$$|x| < |x_0|$$

Если степенной ряд расходится при

$$x = x_1$$

*то он расходится при всех
значениях x , таких что*

$$|x| > |x_1|$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1

По условию ряд (1) сходится при $x = x_0 \neq 0$

Следовательно выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \cdot x_0^n = 0$$

Поэтому последовательность $|C_n \cdot x_0^n|$

ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство:

$$\left| C_n \cdot x_0^n \right| < M \quad (2)$$

Рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| C_n \cdot x_0^n \right|$$

Запишем его в виде:

$$\left| C_0 \right| + \left| C_1 \cdot x_0 \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + \left| C_2 \cdot x_0^2 \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + \left| C_n \cdot x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

**Согласно неравенству (2), члены этого ряда
меньше членов ряда**

$$M + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

**который можно рассматривать как сходящийся
геометрический ряд при**

$$q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < |x_0|$$

**Следовательно по признаку сравнения заданный
ряд тоже сходится.**

По условию ряд (1) расходится при $x = x_1$

Покажем, что он будет расходиться для всех x ,
таких что $|x| > |x_1|$

Предположим от противного, что при $|x| > |x_1|$
ряд сходится. Тогда, по доказанному выше, он
должен сходиться и при $x = x_1$

Что противоречит условию, следовательно ряд
будет расходиться при $|x| > |x_1|$

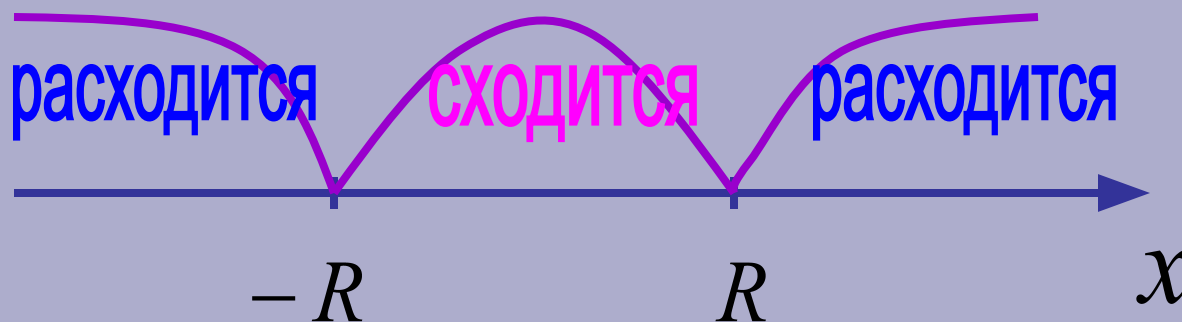


Из теоремы Абеля следует, что существует такое число

$$R \geq 0$$

что при $|x| < R$ ряд сходится;

при $|x| > R$ ряд расходится.



ТЕОРЕМА.

Если степенной ряд сходится не только при $x=0$, то существует такое положительное число R (возможно и бесконечное), что ряд абсолютно сходится в интервале $(-R, R)$ и расходится везде вне этого интервала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть X – множество точек x , в которых ряд (1) сходится. По условию теоремы это множество не пустое. Покажем, что оно ограничено.

Пусть x_1 – точка, где ряд расходится.

Тогда по теореме Абеля для любого x выполняется условие:

$$|x| < |x_1|$$

Значит у этого множества существует верхняя грань $R > 0$, поскольку ряд сходится не только при $x=0$.

Если не существует такой точки x_1 , где ряд расходится, то

$$R = \infty$$

и тогда множество X не ограничено.

Пусть x – любое число, удовлетворяющее условию

$$|x| < R$$

или

$$-R < x < R$$

Тогда по теореме Абеля при этих значениях x имеет место абсолютная сходимость ряда (1).

Пусть теперь x – любое число, удовлетворяющее условию

$$|x| > R$$

если

$$R < \infty$$

Такие значения x находятся вне промежутка сходимости X и в этих точках ряд (1) расходится.



*Число R называется радиусом сходимости,
а интервал $(-R, R)$ – интервалом
сходимости степенного ряда.*

На концах интервала сходимости при $x = \pm R$
ряд может как сходиться, так и расходиться.

Найдем выражение для радиуса сходимости
степенного ряда через его коэффициенты.

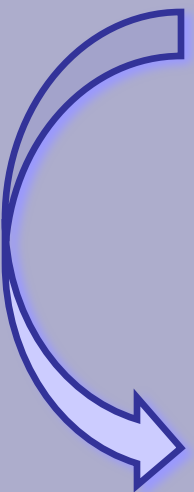
Рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных
величин членов ряда (1):

$$|C_0| + |C_1 \cdot x| + |C_2 \cdot x^2| + \dots + |C_n \cdot x^n| + \dots$$

Коэффициенты этого ряда, по крайней мере, начиная с некоторого номера, отличны от нуля.

По признаку Даламбера ряд будет сходиться, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} \cdot x^{n+1}}{C_n \cdot x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| < 1$$


$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

Если этот предел существует, то он и является радиусом сходимости ряда.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

*Радиус сходимости
степенного ряда*

ПРИМЕР.

Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{2x}{3^2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2 \cdot \sqrt{3^2}} + \dots + \frac{2^n \cdot x^2}{(2n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}} + \dots$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}} \cdot \frac{(2n+3)^2 \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Интервал сходимости ряда

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Выясним поведение ряда на концах интервала.

При

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ряд принимает вид:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

**Это знакочередующийся ряд. Проверяем
выполнение признака Лейбница:**

1

Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1 > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{5^2} > \dots > \frac{1}{(2n+1)^2} > \dots$$

2

Предел общего члена равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0$$

Ряд сходится.

При $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ряд принимает вид:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

Это обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2$ у которого все члены с четными номерами равны нулю. Данный ряд является сходящимся.

Область сходимости ряда

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$