Задачи экономического содержания на ЕГЭ.

Что необходимо знать и понимать при решении задач на <u>проценты</u>:

- 1% - это одна сотая часть чего-либо;
- За 100% принимаем ту величину, с которой сравниваем;
- Формулы для подсчета процентов:
- если величину *S* увеличить на *a %*, то получим *S(1+0,01a)*
- если величину S уменьшить на а %, то получим S(1– 0,01a)
- если величину S дважды увеличить на а %, то получим S(1+0,01a)2

Что необходимо знать и понимать при решении задач на погашение кредита <u>равными</u> долями

Пусть размер кредита *S*.

Процент банка равен *a*%, а ежегодная выплата по кредиту равна *X*.

Тогда через год после начисления процентов и выплаты суммы *X* размер долга равен: $S(1+0{,}01a) - X$.

Обозначим $p = 1 + 0{,}01a$.

- Тогда через два года размер долга составит: (Sp – X)p–X
- Через три года: ((Sp – X)p–X)p – X.
- Через четыре года (((Sp – X)p–X))p – X)p – X

Для подсчета величины в скобках иногда применяется формула суммы n членов геометрической прогрессии. Здесь $b_1 = 1$, $q = a$.

- Формула для суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

- Размер долга через n лет

$$Sp^n - \frac{X(1 - p^n)}{1 - p}$$

Задача 1.

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4290000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг **двумя** равными платежами (то есть за два года)?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$.

Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент равный

$$p=1+0{,}01a.$$

После первой выплаты сумма долга составит

$$S_1 = Sp - X$$

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 p - X = (Sp - X)p - X = Sp^2 - (1+p)X$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sp^2 - (1+p)X = 0$$

$$X = \frac{Sp^2)}{(p+1)}$$

Откуда при S = 4290000 и a = 14,5, получаем: p = 1,145 и

$$X = \frac{4290000 \cdot 1{,}311025}{2{,}145} = 2622050$$

Задача 2

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Сергей выплатил долг **тремя** равными платежами (то есть за три года)?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %.

Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент

p = 1 + 0,01a.

После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sp - X$

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 p - X = (Sp - X)p - X = Sp^2 - (1 + p)X$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sp^3 - (1 + p + p^2)X = Sp^3 - \frac{p^3 - 1}{p - 1} \cdot X$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sp^3 - \frac{p^3 - 1}{p - 1} \cdot X = 0 \qquad X = \frac{Sp^3 \cdot (p - 1)}{(p^3 - 1)}$$

$$X = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000$$

При S = 9 930 000, a = 10%, p = 1,1 и

Задача 3.

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за **четыре** года)?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %.

Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент

p = 1 + 0,01a.

После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sp - X$

После второй выплаты сумма долга составит $S_2 = S_1p - X = (Sp - X)p - X = Sp^2 - (1+p)X$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна $S_3 = Sp^3 - (1 + p + p^2)X = Sp^3 - \frac{p^3 - 1}{p - `1} \cdot X$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна $S_4 = Sp^4 - (1 + p + p^2 + p^3)X = Sp^4 - \frac{p^4 - 1}{p - 1} \cdot X$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sp^4 - \frac{p^4 - 1}{p - 1} \cdot X = 0 \qquad X = \frac{Sp^4 \cdot (p-1)}{(p^4 - 1)}$$

$$X = \frac{6902000 \cdot 1{,}601806640625 \cdot 0{,}125}{0{,}601806640625} = 2296350$$

Задача 4

31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4548600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %.

Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $p = 1 + 0{,}01a$.

После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sp - X$

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 p - X = (Sp - X)p - X = Sp^2 - (1+p)X$$

По условию Владимир погасил кредит полностью за два года, поэтому

$$Sp^2 - (1+p)X = 0 \qquad S = \frac{(1+p)\cdot X}{p^2}$$

X= 4548600 и a=14, получим p = 1.14 получим

$$S = \frac{2{,}14 \cdot 4548600}{1{,}2996} = 7490000$$

Ответ: 7490000.

Задача 5

31 декабря 2014 года Георгий взял в банке кредит 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Георгий переводит очередной транш. Георгий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 570 тыс рублей, во второй599,4 тыс рублей. Под какой процент банк выдал кредит Георгию?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент *p= 1 + 0,01a.*

После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sp - X$

$$S_1 = 430000 + 10000a$$

Исходя из условия после первой выплаты долг Георгия будет равен

После второй выплаты сумма долга составит $S_2 = S_1p - X$

или $S_2 = a^2 + 143a - 1694$

При условии, что кредит был погашен за два транша это сумма должна равняться 0.

Получим уравнение $a^2 + 143a - 1694 = 0$

Отсюда **a=11%.**

Ответ: 11%.

Задача 6

1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая - 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит

$$275\,000 \cdot 4 = 1{,}1 \text{ млн рублей.}$$

Таким образом, он **не покроет** долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается **не более**, чем на

$1100000 \cdot 0{,}01 = 11000$ рублей.

Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить **не более**

$$1100000 + 5 \cdot 11000 = 1155000 \text{ рублей,}$$

что менее, чем

$$5 \cdot 275000 = 1375000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Задача 7

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк ¾ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Пусть фермер взял кредит S руб. под *p*% годовых.

Через год он должен банку $S(1+0,01p)$ руб.

Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк ¾ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, следовательно, ему осталось вернуть 0,25 $S(1+0,01p)$ руб.

Еще через год он должен банку

$(0,25\,S(1+0,01p))(1+0,01p)=0,25S(1+0,01p)^2$ руб.

В счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита, то есть внес 1,21 S руб.

Задача 8

Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, …то есть на одну и ту же величину» означает: Сергей взятую сумму возвращал равными долями.

Общая сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки.

В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла 0,12S, во втором - $0,12\frac{8}{9}S,$ в третьем - $0,12\frac{7}{9}S$, …..в восьмом - $0,12\frac{2}{9}S$,наконец, в последнем - $0,12\frac{1}{9}S$

Всего за 9 месяцев:

$$0,12S\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}\right)=0,12S\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)}{2}\cdot 9=0,12S\cdot\frac{9+1}{2}=0,6S.$$

Искомое процентное отношение есть 60

Ответ: 60.

Задача 9

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Пусть сумма кредита S, процентная ставка банка x%. Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, ….уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями.

Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0{,}01xS+0{,}01x\cdot\frac{5S}{6}+0{,}01x\cdot\frac{4S}{6}+\ldots+0{,}01x\cdot\frac{2S}{6}+0{,}01x\cdot\frac{S}{6}=0{,}01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$=0{,}01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6=0{,}01Sx\cdot\frac{6+1}{2}=0{,}035Sx.$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев:

$$S+0{,}035Sx=(1+0{,}035x)\cdot S$$

А эта сумма по условию задачи равна $1{,}63S$. Решим уравнение:

$$(1+0{,}035x)S=1{,}63S\Leftrightarrow 1+0{,}035x=1{,}63\Leftrightarrow 0{,}035x=0{,}63\Leftrightarrow x=18.$$

Ответ: 18.

Задача 10

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Пусть банк первоначально вклад в размере S. принял под годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0{,}01x)$.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)$$

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)$$

По условию задачи эта сумма равна 1,44S

Решим уравнение: $$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44S$$

Отсюда : x=20

Новая процентная ставка равна 20+40=60%.

Ответ: 60%.