Элементы комбинаторики

Ахмеджанова Т.Д.

Комбинаторика

- раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Множество

- Всякая совокупность элементов произвольного рода, обладающая некоторым общим свойством, образует **множество** (соединение).

Примеры множеств:

- множество всех действительных чисел,
- множество натуральных чисел,
- множество всех студентов данного университета,
- множество парт в данном классе.

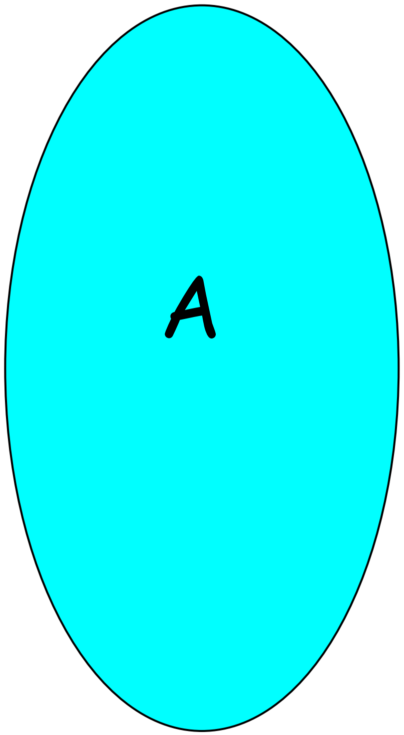
- Множество считается определенным, если указаны все его элементы или указано их общее свойство.
- Множества, содержащие конечное число элементов, называются **конечными**. Характеристикой конечного множества является число его элементов.

- Множество, состоящее из *n* элементов, называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число от *1* до *n* таким образом, что различным элементам соответствуют различные натуральные числа.
- Всякое конечное множество можно упорядочить.

Правило суммы

- Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется $m + n$ возможностей выбрать либо предмет A, либо предмет B.

Правило суммы

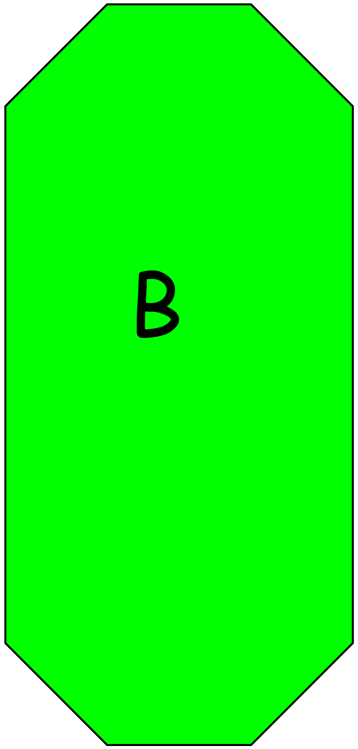


A или B

$A \vee B$

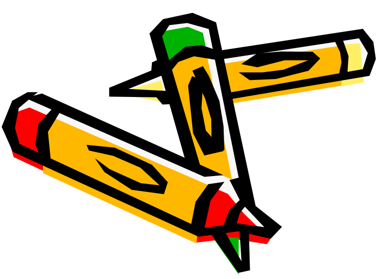
$A \cup B$

$A + B$

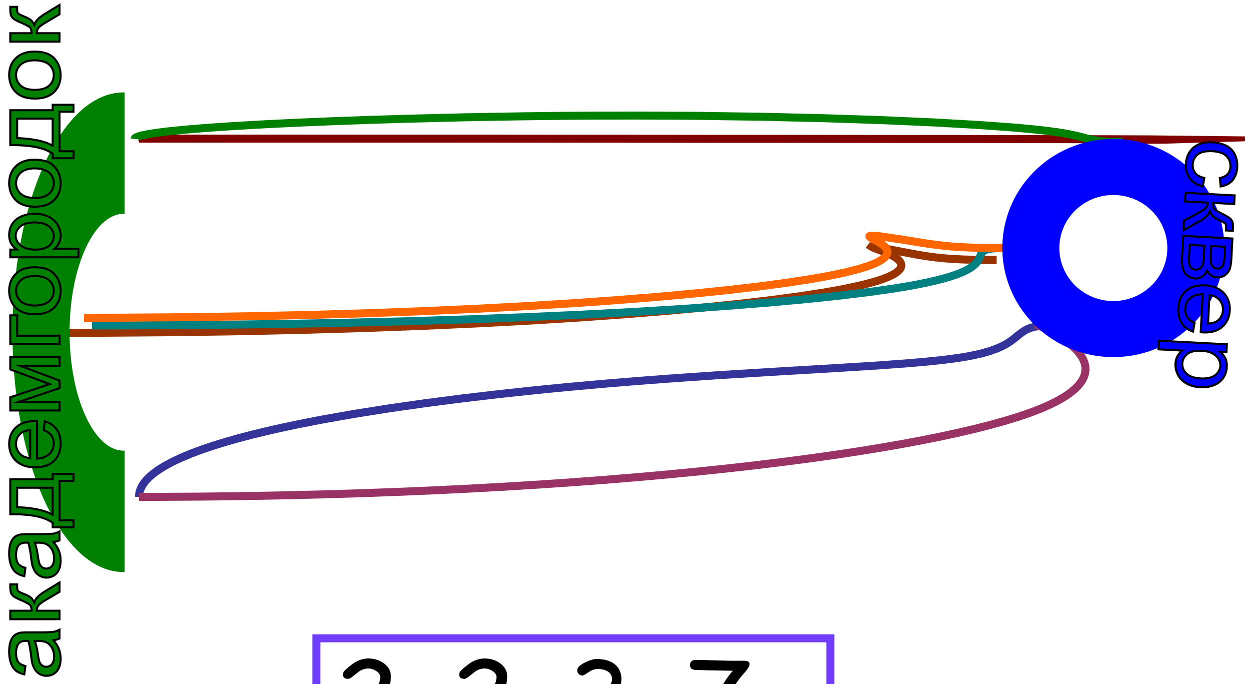


Задача 1

- От сквера Кирова до академгородка можно проехать через Ангарский мост, плотину и новый мост. В первом случае количество дорог равно 2, во втором — 2, в третьем — 3. Сколькими способами можно добраться от сквера Кирова до академгородка ?



Решение



$\boxed{2+2+3=7}$

Правило произведения

Пусть некоторый предмет А может быть выбран m способами, а другой предмет В может быть выбран n способами. Тогда имеется mn возможностей выбрать предмет А и предмет В.

Правило произведения

$$A \quad и \quad B$$

$$A \wedge B$$

$$A \cap B$$

$$A \times B$$

Задача 2

- В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида открыток. Сколькими способами можно купить конверт и открытку?

Решение

$$5 \cdot 4 = 20$$

Задача 3

- Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

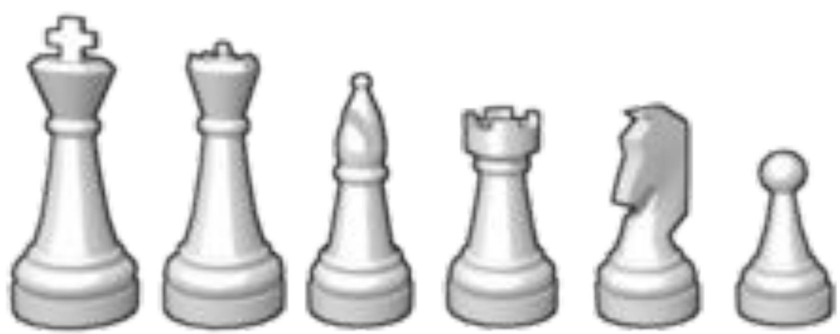
Решение

КОНВЕРТ

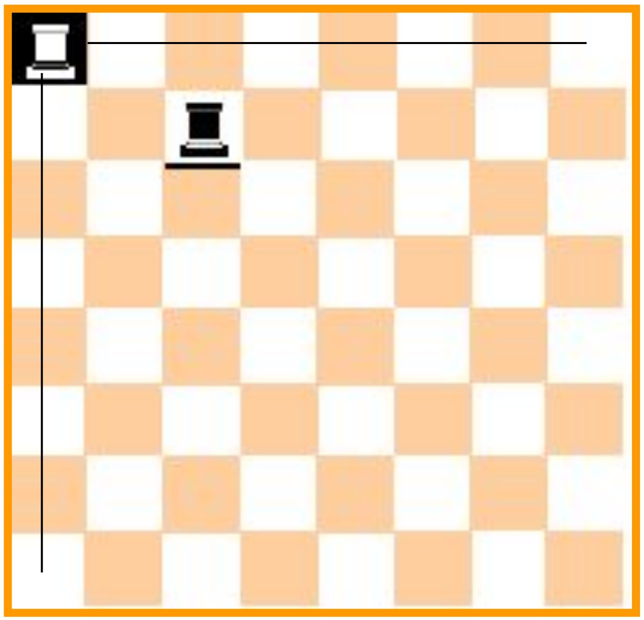
- Гласную можно выбрать двумя способами.
- Согласную — пятью способами.
- **Ответ**. $2 \cdot 5 = 10$.

Задача 4

- Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение



$$\boxed{64 \cdot 49 = 3136}$$

Задача 5

«Тёмное , чистое небо торжественно и необъятно высоко стояло над нами со всем своим таинственным великолепием».

Сколько осмысленных предложений можно составить, вычёркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее небо и сказуемое стояло.)

Решение

небо

чистое

тёмное

стояло

над нами

торжественно

и высоко

необъятно

со всем великолепием

таинственным

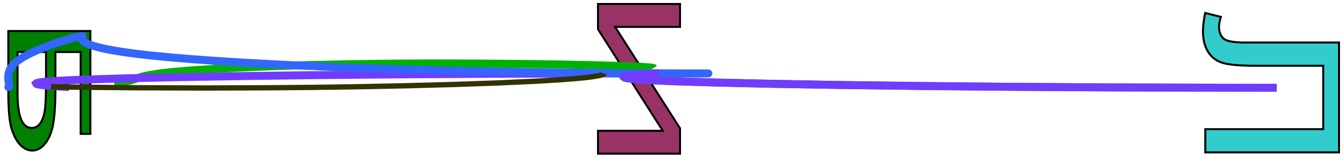
своим

$$\boxed{2^9 = 512}$$

Задача 6

От Братска до Иркутска можно добраться поездом, самолётом, автобусом, теплоходом. Из Иркутска до Листвянки можно доехать на автобусе, либо на теплоходе. Сколькими способами можно проехать от Братска до Листвянки?

Решение



$$\boxed{4\cdot 2=8}$$

Задача 7

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Решение

$$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$$

Задача 8

- На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Решение

Меридианы делят глобус на 24 части, а параллели делят каждую часть ещё на 17 + 1 = 18 частей.

$$18 \times 24 = 432$$

Задача 9

Сколькими способами из колоды (36 карт) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

Решение

$$\boxed{9\times 8\times 7\times 6=3024}$$

- В каждой масти по 9 карт.
- Из каждой масти выбираем по 1 карте, учитывая достоинство уже выбранной ранее карты.

Факториал
$n!$

- произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (читается n–факториал).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

- Замечание: $0! = 1! = 1$.

Перестановки

- Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, состоящее из n элементов, называется **числом перестановок** множества и обозначается P_n.

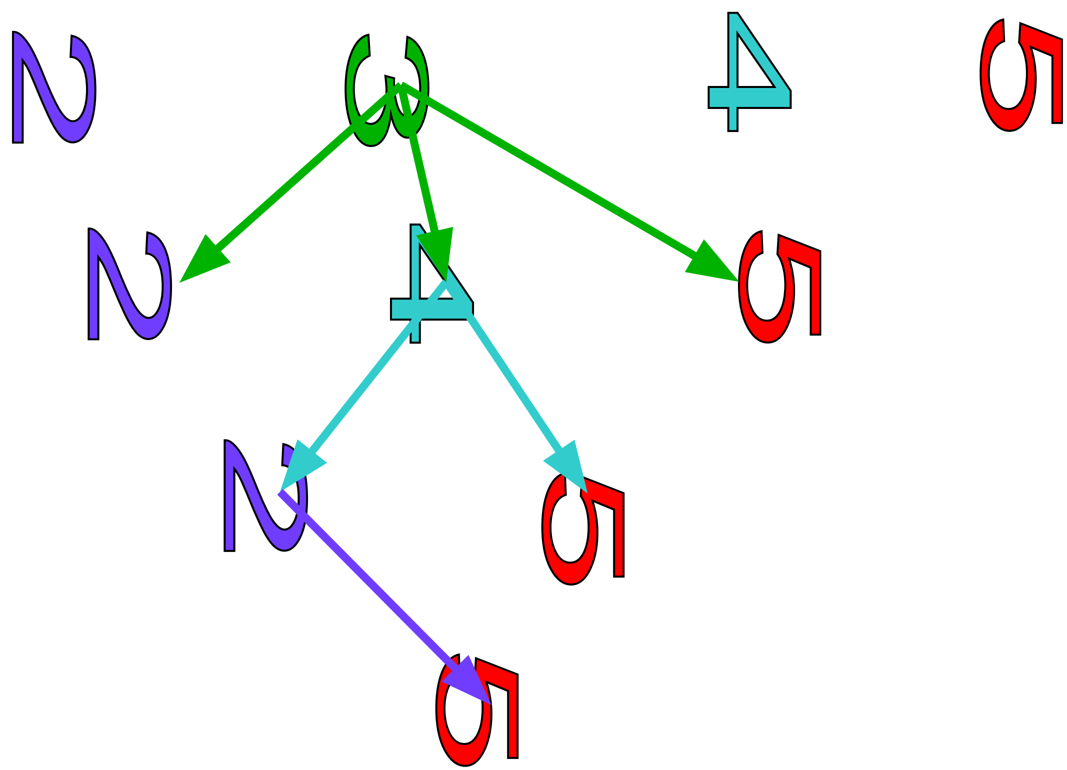
Перестановки без повторений

$$\boxed{P_n = n!}$$

Задача 10

Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3, 4, 5 встречаются ровно по одному разу?

Решение



$4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Задача 11

Сколько трёхзначных чисел можно получить из цифр 1,2,3, если цифры в числе не повторяются?

Решение

Сотни	1		2		3	
Десятки	2	3	1	3	1	2
Единицы	3	2	3	1	2	1

$$P = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Перестановки с повторениями

Пусть имеются предметы k различных типов.

Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,..., n_k элементов k-го типа?

Перестановки с повторениями

$$\boxed{P_{n_1;\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!},}$$

$$\boxed{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

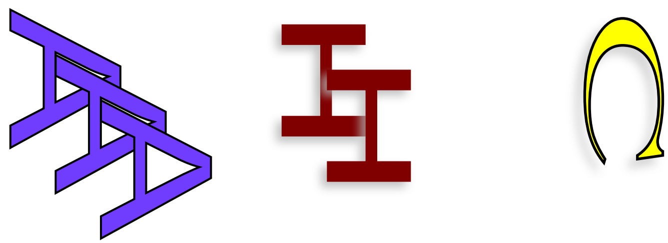
Задача 12

Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас», так, чтобы получались разные «слова»? Смысл «слов» значения не имеет.

Решение

«Ананас» - 6:

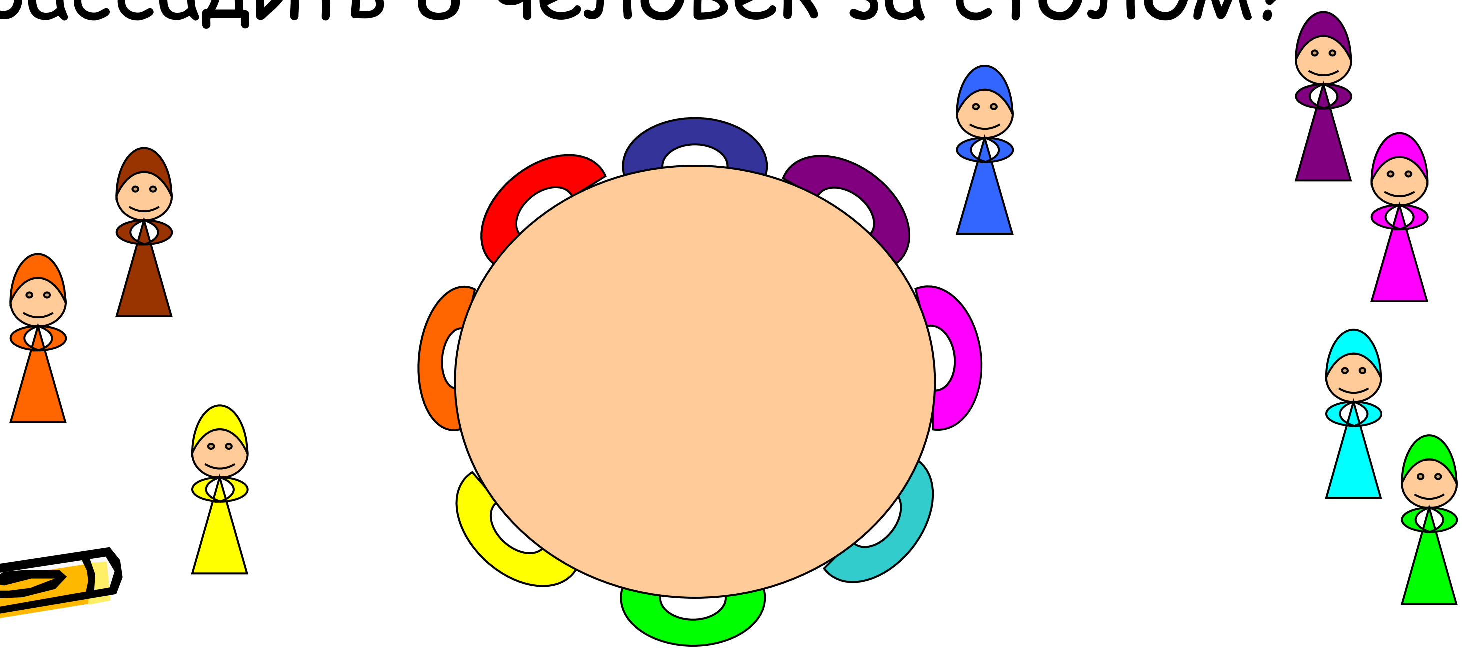
а – 3; н – 2; с – 1.



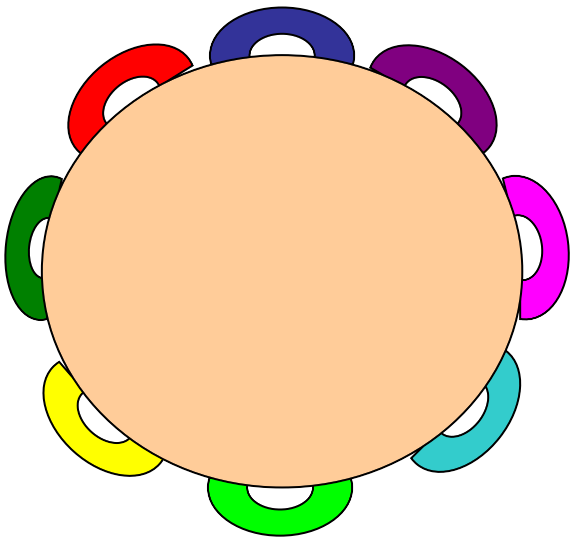
$$P_{3;2;1}=\frac{6!}{3!2!1!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=60$$

Задача 13

К Маше пришли 7 подружек. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за столом?



Решение



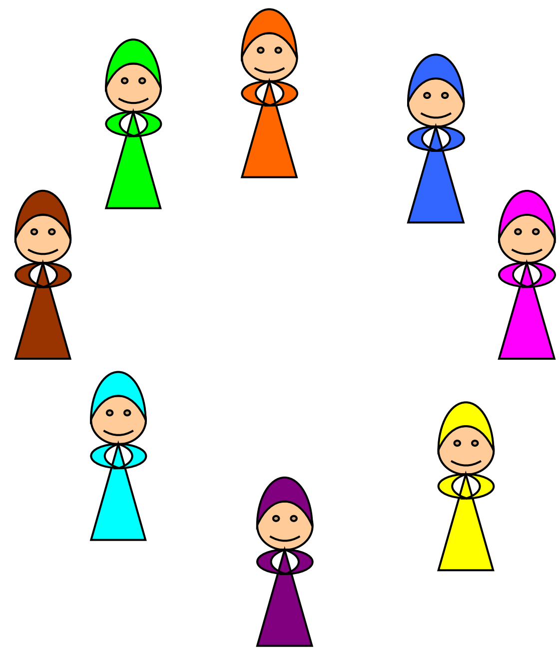
$$P_8 = 8! =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

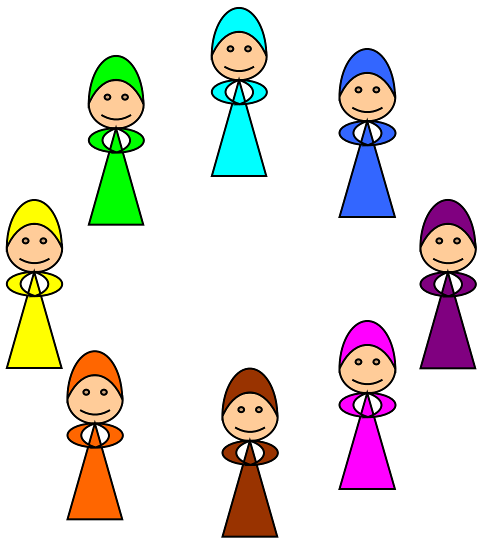
$$= 40320$$

Задача 14

8 девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?



Решение



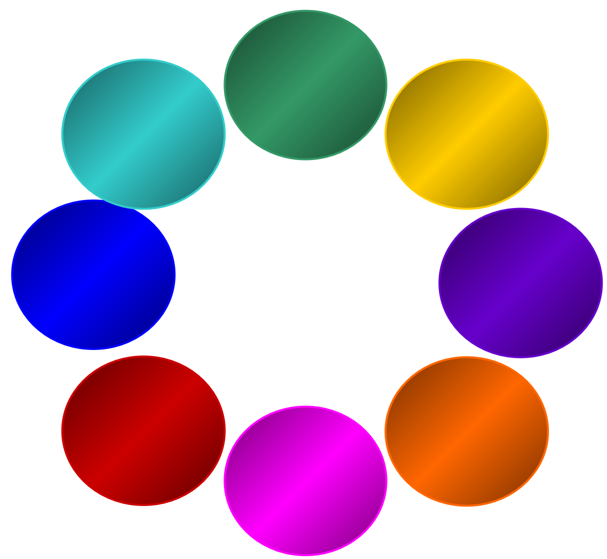
Девушки могут перемещаться по кругу.

Число перестановок уменьшается в 8 раз.

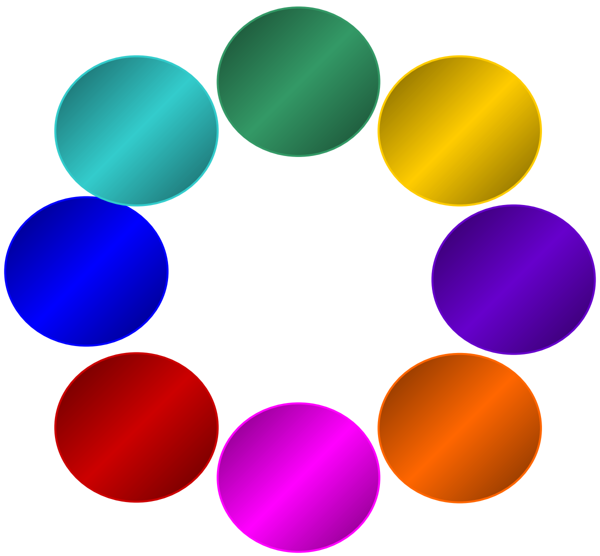
Ответ: 7!

Задача 15

Сколько ожерелий можно составить из 8 различных бусин?



Решение



- Ожерелье можно вращать.
- Его можно и перевернуть.
- Число перестановок уменьшается ещё вдвое.

Ответ: 7!/2

Размещения

- Число упорядоченных *k* элементных подмножеств множества из *n* элементов называется **числом размещений** из *n* элементов по *k* и обозначается A_n^k

Размещения

Размещения без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$$

$$= n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

Размещения с повторениями

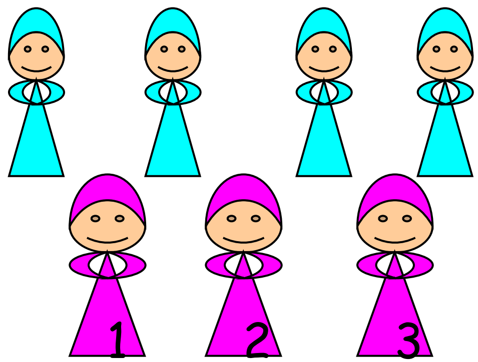
$$\overline{A}_n^m = n^m$$

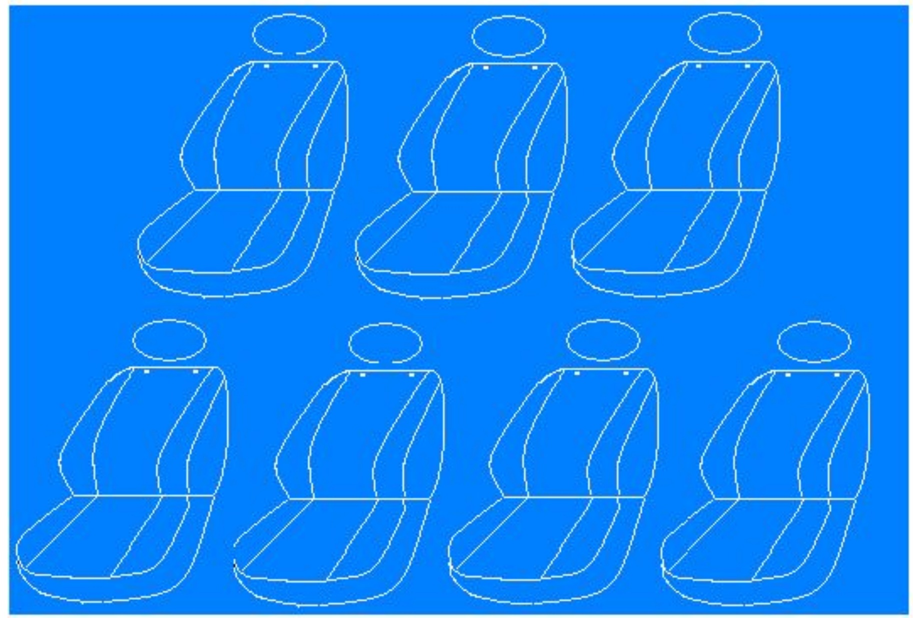
Задача

В машине 7 мест, включая водительское. Поедут 7 человек. Сколько существует способов распределения пассажиров по местам, если права есть лишь у троих?

Решение

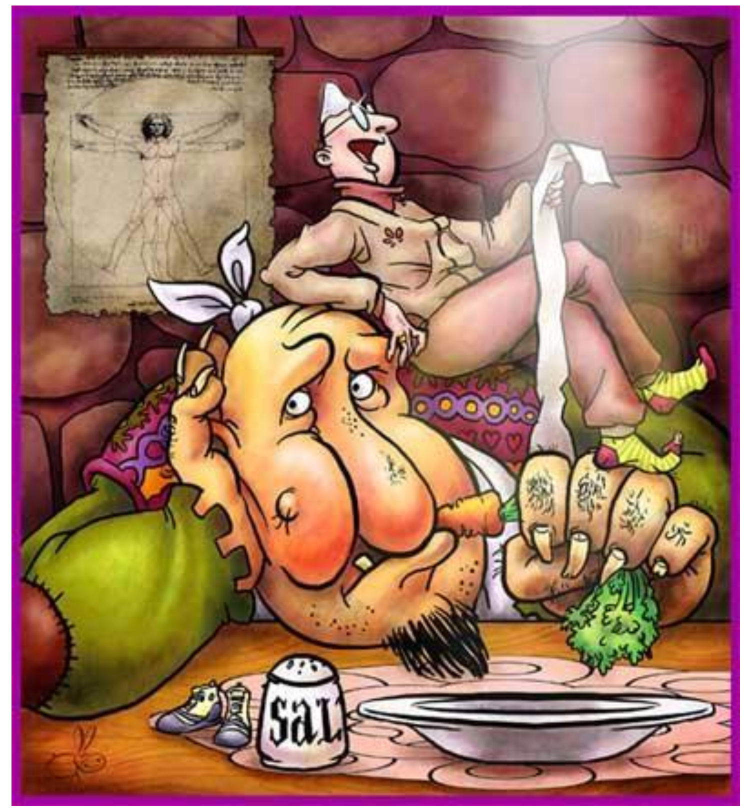
$(3 * 6! = 2160)$





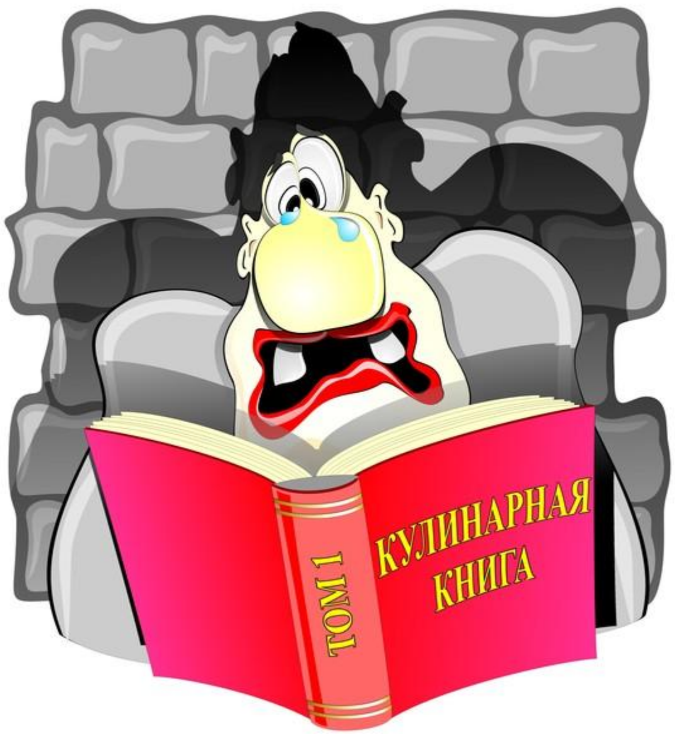
Задача

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?



Решение

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{22!}=25\times 24\times 23=13800$$

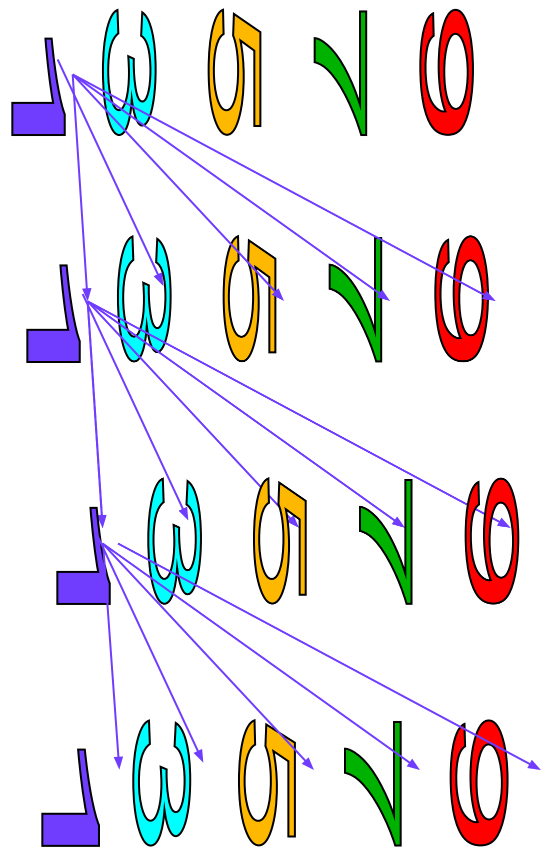


Задача

Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?

Решение

- Однозначных нечётных чисел ровно 5.
- К каждому однозначному нечётному числу вторая нечетная цифра может быть дописана 5 различными способами.
- Далее – по аналогии:



$$\boxed{5\times5\times5\times5=625}$$

Задача

Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

Решение

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$

А Б В

Сочетания

- Если из n элементов составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются ***сочетаниями*** без повторений из n элементов по m.

Сочетания

Сочетания без повторений

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = $$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания с повторениями

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = $$

$$= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Задача.

В городе проводится первенство по футболу. Сколько в нем состоится матчей, если участвуют 12 команд?

Решение.

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!(12-2)!}=\frac{11\cdot 12}{2}=66$$

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!(12-2)!}=\frac{11\cdot 12}{2}=66$$

Задача.

- В группе 10 стрелков, из них 6 снайперов. Для выполнения боевой задачи нужно отобрать 5 стрелков, причем снайперов должно быть не меньше 4. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Не меньше 4 – это значит, что снайперов должно быть либо 4, либо 5.4 снайпера из 6 можно выбрать C_6^4 способами, остальных стрелков выбираем из оставшихся 4 стрелков (10-6) C_4^1 способами. Проводим аналогичные рассуждения, когда в группе снайперов 5.

$$C_6^4 \cdot C_4^1 + C_6^5 \cdot C_4^0 = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 66$$

Задача.

В классе 24 ученика, из них 8 отличников. Нужно выбрать 12 человек так, чтобы среди них было хотя бы 5 отличников. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 901628

Свойства сочетаний

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$

Решение

$$C_x^2=\frac{x!}{2(x-2)!}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2} \\ \dfrac{x^2-x}{2}=153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=18, \\ y=8. \end{cases}$$

Треугольник Паскаля

- Треугольник Паскаля является одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике.
- Блез Паскаль, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике".

Треугольник Паскаля

- Эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата.
- В 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом.

- Изображен треугольник на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году.
- Омар Хайям, бывший философом, поэтом, математиком, знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Построение треугольника Паскаля

- Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.
- Таблица обладает симметрией относительно оси, проходящей через его вершину.

Свойства строк

Сумма чисел n-й строки Паскаля равна 2^n (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна $2^0 = 1$)

Свойства строк

Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется, а нулевая строка симметрична).

Свойства строк

Каждый член строки треугольника Паскаля с номером n тогда и только тогда делится на т, когда т-простое число, а n - степень этого простого числа

Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля можно определить тремя способами:

- C_n^k, где n - номер строки, k- номер элемента в строке;
- оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.

- Каждое число треугольника Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число, причем сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются.