

Теория вероятностей

Предмет теории вероятностей

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S . Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20° , то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S .

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S . Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб»»- случайное.

Предмет теории вероятностей

Если рассматриваются случайные события, которые могут многократно, наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S , т.е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событие будем рассматриваться как результата испытания.

Пример. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел- это *испытание*. Попадание в определенную область мишени - *событие*.

Пример. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть *испытание*. Появление шара определенного цвета – *событие*.

Виды случайных событий

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - несовместные.

Пример. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» - несовместные.

Виды случайных событий

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Пример. Приобретены два билета денежно – вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Виды случайных событий

События называют ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты – равновозможные события.

Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияние на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные события.

Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияние на выпадение любой грани.

Классическое определение вероятности

Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый на удачу шар цветной.

Классическое определение вероятности

Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A . Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом (элементарным событием)*.

Элементарные исходы обозначим через w_1, w_2, w_3 и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: w_1 - появился белый шар; w_2, w_3 – появился красный шар; w_4, w_5, w_6 – появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится один только шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Классическое определение вероятности

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 .

Таким образом событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A ; в нашем примере A наблюдается, если наступит w_2 , или w_3 , или w_4 , или w_5 , или w_6 . В этом смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий (w_2, w_3, w_4, w_5, w_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Классическое определение вероятности

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A . Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$P(A) = m/n$, где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A ; n – число всех возможных элементарных исходов испытания. Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Классическое определение вероятности

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.* Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,
$$P(A) = m/n = n/n = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.* Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m=0$, следовательно,
$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*
Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Классическое определение вероятности

Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A .

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(W) = 1.$$

Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Основные формулы комбинаторики

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 * 2 * 3 \dots n$.

Заметим, что удобно рассматривать $0!$, полагая, по определению, $0! = 1$.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6.$$

Основные формулы комбинаторики

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

Основные формулы комбинаторики

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = n! / (m!(n - m)!).$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = 10! / (2!8!) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е.

Таким образом . общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(B) = 1/90$.

Примеры непосредственного вычисления вероятностей

В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6

элементов C_{10}^6 . Определим число исходов,

благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные

детали можно взять из семи стандартных деталей способами C_7^4 ; при этом остальные $6 - 4 = 2$ детали должны быть

нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10 - 7 = 3$ нестандартных деталей можно способами C_3^2 . Число

благоприятствующих исходов равно $C_7^4 * C_3^2$

$$P(A) = (C_7^4 * C_3^2) / C_{10}^6 = 1/2$$

Относительная частота

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой $W(A) = m/n$, где m – число появлений события, n – общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты, предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, ***вероятность вычисляют до опыта, относительную частоту - после опыта.***

Относительная частота

Пример. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартные детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей $W(A) = 3/80$.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, *что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа.* Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Статистическая вероятность

Наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения в частности статистическое определение: ***в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.***

Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0,4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A , или события B , или обоих этих событий. Если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Если два события A и B – несовместные, то $A + B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, событие $A + B + C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A , B , C , A и B , A и C , B и C , A и B и C .

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Введем обозначения: n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A ; m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B .

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$

Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A , то другое принято обозначать .

Пример. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A – попадание, то - \bar{A} промах.

Полная группа событий

Пример. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - противоположные.

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.*

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p , то вероятность другого события обозначают через q . Таким образом, в силу предыдущей теоремы $p + q = 1$.

Произведение событий

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A —деталь годная, B - деталь окрашенная, то AB —деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A , B , C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условная вероятность

Случайное событие – это событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S , не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A . Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S .

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = 3/5$.

Этот же результат можно получить по формуле $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ ($P(A) > 0$).

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 3/6 = 1/2$. Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый.

Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно, $P(AB) = 9/30 = 3/10$.

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5.$$

Теорема умножения вероятностей

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) P_A(B).$$

Доказательство. По определению условной вероятности, $P_A(B) = P(AB)/P(A)$. Отсюда $P(AB) = P(A)P_A(B)$.

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n , вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, \dots, A_{n-1} наступили. В частности, для трех событий $P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$.

Теорема умножения вероятностей

Пример. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором — черный (событие B) и при третьем—синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании $P(A) = 5/12$. Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность $P_A(B) = 4/11$. Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность $P_{AB}(C) = 3/10$.

Искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = (5/12)*(4/11)*(3/10)=1/22.$$

Независимые события

Событие B называют независимым от события A , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P_A(B)=P(B)$. Если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B ; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB)=P(A)P_A(B)$ имеет вид $P(AB)=P(A)P(B)$, т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Независимые события

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) - 0,7.

Решение. События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Замечание 1. Если события A и B независимы, то независимы также события A и \bar{B} , \bar{A} и B , \bar{A} и \bar{B} .

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события A , B , C попарно независимы, если независимы события A и B , A и C , B и C .

Следствие из теоремы умножения.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

Пример. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными. Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A) = 8/10 = 0,8$. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), $P(B) = 7/10 = 0,7$. Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C), $P(C) = 9/10 = 0,9$. Так как события A , B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность равна $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, \dots, A_n , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий :

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, \dots, A_n . События A и (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n),$$

или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1 , A_2 , A_3 , (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события AB (оба орудия дали попадание)

$$P(AB) = P(A) P(B) = 0,7 * 0,8 = 0,56.$$

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Формула полной вероятности

Пример. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго—0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1) = 1/2$.

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2) = 1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A) = 0,8$.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь $P_{B_2}(A) = 0,9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) = 0,5 * 0,8 + 0,5 * 0,9 = 0,85.$$

Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A . Поставим своей задачей определить, как изменились вероятности гипотез, т.е. будем искать условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$.

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$. По теореме умножения имеем $P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$.

Отсюда

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i ($i=1, 2, \dots, n$) может быть вычислена по формуле

$$P_{B_i}(A) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .*

Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пример. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым—0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

- 1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);
- 2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2). Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса.

Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

По условию задачи имеем:

$P(B_1)=0,6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2) = 0,4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0,94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A) = 0,98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

$$P_A(B_1) = (0,6 * 0,94) / (0,6 * 0,94 + 0,4 * 0,98) \approx 0,59.$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться.

Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p . Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности.

Формула Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n-k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т. е. C_n^k . Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
или $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$

Полученную формулу называют ***формулой Бернулли***.

Формула Бернулли

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждого из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 * 5}{1 * 2} (0,75)^4 * (0,25)^2 = 0,30.$$

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

при $x = (k - np) / \sqrt{npq}$.

Имеются таблицы с значениями функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x . Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \text{где } x = (k - np) / \sqrt{npq}$$

Локальная теорема Лапласа

Пример. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} * \varphi(x) = \frac{1}{8} * \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x :

$$x = (k - np) / \sqrt{npq} \quad x = (80 - 400 * 0,2) / 8 = 0.$$

По таблице находим $\phi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(80) = (1/8) * 0,3989 = 0,04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату $P_{400}(80) = 0,0498$.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz, \quad (*)$$

где $x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл не выражается через

элементарные функции. В таблице даны значения функции

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$, для положительных значений x и для $x = 0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$). В

таблице приведены значения интеграла лишь до $x=5$ так как для $x > 5$

можно принять $\Phi(x) = 0,5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют

функцией Лапласа.

Интегральная теорема Лапласа

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (*) так:

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^0 e^{-z^2/2} dz$$
$$= \Phi(x'') - \Phi(x')$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

где $x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}$.

Интегральную теорему Лапласа можно записать и так:

$$P\left(x' \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq x''\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz$$

Интегральная теорема Лапласа

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p = 0,2$; $q = 0,8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = -1,25; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70, 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице находим: $\Phi(2,5) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(70, 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства $|m/n - p| \leq \varepsilon$ (*)

Эту вероятность будем обозначать так: $P(|m/n - p| \leq \varepsilon)$. Заменяем неравенство (*) ему равносильными:

- $\varepsilon \leq m/n - p \leq \varepsilon$ или $-\varepsilon \leq (m - np)/n \leq \varepsilon$.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{n/(pq)}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leq (m/n-p)/\sqrt{n/(pq)} \leq \varepsilon\sqrt{n/(pq)}.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа в форме, указанной в замечании. Положив $x' = -\varepsilon\sqrt{n/(pq)}$ и $x'' = \varepsilon\sqrt{n/(pq)}$, имеем

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leq (m/n-p)/\sqrt{npq} \leq \varepsilon\sqrt{n/(pq)}) &\approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/(pq)}}^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2} dz = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}). \end{aligned}$$

Наконец, заменив неравенства, заключенные в скобках, равносильным им исходным неравенством, окончательно получим

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}).$$

Итак, вероятность осуществления неравенства $|m/n - p| \leq \varepsilon$ приблизительно равна значению удвоенной функции Лапласа $2\Phi(x)$ при $x = \varepsilon\sqrt{n/(pq)}$.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p = 0,1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$. Требуется найти вероятность $P(|m/400 - 0,1| \leq 0,03)$. Пользуясь формулой

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}), \text{ имеем}$$

$$P(|m/400 - 0,1| \leq 0,03) \cong 2\Phi(0,03\sqrt{400/(0,1*0,9)}) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0,4772$. Следовательно, $2\Phi(2) = 0,9544$.

Итак, искомая вероятность приблизительно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b) .

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z , а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z .

Дискретные и непрерывные случайные величины

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины

называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \dots$ сходится и его сумма равна единице.

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X : $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = 0,01$, $p_2 = 0,01$, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0,89$.

Напишем искомый закон распределения:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: $0,01 + 0,1 + 0,89 = 1$.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i) , а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность не появления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях.

Найдем закон распределения величины X . Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо n раз. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$. Воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (*)
где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Биномиальное распределение

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях; второй член $n p^{n-1} q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; . . . ; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Биномиальное распределение

Пример. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p=1/2$, следовательно, вероятность не появления «герба» $q=1 - 1/2=1/2$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2$, $x_2=1$, $x_3 = 0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_{\approx}(2) = C_2^2 p^2 = (1/2)^2 = 0,25,$$

$$P_{\approx}(1) = C_2^1 pq = 2*(1/2)*(1/2) = 0,5,$$

$$P_{\approx}(0) = C_2^0 q^2 = (1/2)^2 = 0,25.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль: $0,25 + 0,5 + 0,25=1$.

Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p . Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p \in (0, 1)$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Сделаем важное допущение: произведение np сохраняет постоянное значение, а именно $np = \lambda$. Это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т. е. при различных значениях n , остается неизменным.

Распределение Пуассона

Воспользуемся формулой Бернулли.

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Так как $pn = \lambda$, то $p = \lambda/n$. Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Приняв во внимание, что n имеет очень большое значение, вместо $P_n(k)$ найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$. При этом будет найдено лишь приближенное значение отыскиваемой вероятности: n хотя и велико, но конечно, а при отыскании предела мы устремим n к бесконечности.

Распределение Пуассона

$$\begin{aligned} P_n(k) &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1. \end{aligned}$$

Таким образом (для простоты записи знак приближенного равенства опущен),

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ .

Распределение Пуассона

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу придут 3 негодных изделия.

Решение. По условию, $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$.

Найдем : $\lambda = np = 5000 * 0,0002 = 1$.

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \lambda^k e^{-\lambda} / k! = e^{-1} / 3! = 1/6e = 0,06.$$

Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примерами потоков служат: поступление вызовов на АТС, на прибытие самолетов в аэропорт и многие другие.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке от времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени $(1; 7)$, $(10; 16)$, $(T; T + 6)$ одинаковой длительности $t = 6$ ед. времени равны между собой. ***Если поток обладает свойством, стационарности, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t .***

Простейший поток событий

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, что происходило до начала рассматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Таким образом, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Если поток обладает свойством отсутствия последействия, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Простейший поток событий

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события. ***Итак, если поток обладает свойством ординарности, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.***

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

Простейший поток событий

Интенсивностью потока называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой

Пуассона $P_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k!$.

Эта формула отражает все свойства простейшего потока.

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$) и, следовательно, вероятность его не появления $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A . Таким образом, если событие A появилось в k -м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A . Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1=1, x_2=2, \dots$. Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k -м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий, $P(X=k)=q^{k-1}p$. Полагая $k=1, 2, \dots$, получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$): $p, qp, q^2p, \dots, q^{k-1}p, \dots$. По этой причине распределение называют *геометрическим*.

Геометрическое распределение

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0,6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, $p=0,6$, $q = 0,4$, $k=3$. Искомая вероятность по формуле

$$P = q^{k-1}p = 0,4^2 * 0,6 = 0,096.$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x_1, x_2, \dots, x_n , вероятности которых соответственно равны p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 3 * 0,1 + 5 * 0,6 + 2 * 0,3 = 3,9.$$

Вероятностный смысл математического ожидания
Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Замечание 1. Легко сообразить, что математическое ожидание больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений. Другими словами, на числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. В этом смысле математическое ожидание характеризует расположение распределения и поэтому его часто называют центром распределения.

Этот термин заимствован из механики: если массы p_1, p_2, \dots, p_n расположены в точках с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n , причем если $\sum p_i = 1$ то абсцисса центра тяжести $x_c = (\sum x_i p_i) / \sum p_i$

Учитывая, что $\sum x_i p_i = M(X)$ и получим $M(X) = x_c$.

Математическое ожидание - абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы — их вероятностям.

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

Доказательство. Будем рассматривать постоянную C как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение C и принимает его с вероятностью $p = 1$. Следовательно, $M(C) = C * 1 = C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Например, для трех случайных величин имеем:
$$M(XYZ) = M(XY * Z) = M(XY) M(Z) = M(X) M(Y) M(Z)$$

Свойства математического ожидания

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Пример. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$ и $p_3 = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1 которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью $p_1 = 0,4$ и 0 (промах) с вероятностью $q = 1 - 0,4 = 0,6$. Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания, т. е. $M(X_1) = 0,4$. Аналогично математические ожидания числа попаданий при 2 и 3 выстрелах: $M(X_2) = 0,3$, $M(X_3) = 0,6$. Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов: $X = X_1 + X_2 + X_3$. Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом ожидании суммы: $M(X) = M(X_1 + X_2 + X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3$ (попаданий).

Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p . Чему равно среднее число появлений события A в этих испытаниях?

Теорема. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.*

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = np = 10 * 0,6 = 6$ (попаданий).

Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть X - случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность $X - M(X)$.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданиям.

Пусть закон распределения X известен:

X	X_1	x_2	...	x_n
p	P_1	p_2	...	P_n

Дисперсия дискретной случайной величины

Напишем закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1 . Вероятность же этого события равна p_1 ; следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1 . Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения.

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$...	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	...	p_n

Дисперсия дискретной случайной величины

Теорема. *Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M[X - M(X)] = 0$.*

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X :

X	1	2
p	0,2	0,8

Убедиться, что математическое ожидание отклонения равно нулю. Решение. Найдем математическое ожидание X : $M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,8 = 1,8$.

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$: $1 - 1,8 = -0,8$; $2 - 1,8 = 0,2$.

Дисперсия дискретной случайной величины

Напишем закон распределения отклонения:

$X - M(X)$	-0,8	0,2
p	0,2	0,8

Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M [X - M(X)] = (-0,8) \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0.$$

Итак, математическое ожидание отклонения равно нулю, как и должно быть.

Замечание. Наряду с термином «отклонение» используют термин «центрированная величина». *Центрированной случайной величиной* X называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:
 $X = X - M(X)$.

Дисперсия дискретной случайной величины

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е. $M[X - M(X)]$, для любой случайной величины равно нулю.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M[X - M(X)]^2$

Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть случайная величина задана законом распределения

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

$[X-M(X)]^2$	$[x_1-M(X)]^2$	$[x_2-M(X)]^2$	\dots	$[x_n-M(X)]^2$
p	p_1	p_2	\dots	p_n

По определению дисперсии,

$$D(X) = M [X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

Дисперсия дискретной случайной величины

Пример. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 1 * 0,3 + 2 * 0,5 + 5 * 0,2 = 2,3$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69;$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09;$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29;$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

Дисперсия дискретной случайной величины

По определению,

$$D(X) = 1,69 * 0,3 + 0,09 * 0,5 + 7,29 * 0,2 = 2,01.$$

Формула для вычисления дисперсии

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$.

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. Например, для трех слагаемых имеем $D(X+Y+Z) = D[X+(Y+Z)] = D(X) + D(Y+Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)$

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины: $D(C+X) = D(X)$.

Свойства дисперсии

Свойство 4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Теорема. *Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:*

$$D(X) = npq.$$

Пример. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X —числа появлений события в этих испытаниях.

Решение. По условию, $n = 10$, $p = 0,6$. Очевидно, вероятность неоявления события $q = 1 - 0,6 = 0,4$.

Искомая дисперсия

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4.$$

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$s(X) = \sqrt{D(X)}$$

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $s(X)$ совпадает с размерностью X . Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то $s(X)$ будет выражаться также в линейных метрах, а $D(X)$ — в квадратных метрах.

Среднее квадратическое отклонение

Пример. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $s(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X :

$$M(X) = 2 * 0,1 + 3 * 0,4 + 10 * 0,5 = 6,4.$$

Найдем математическое ожидание X^2 :

$$M(X^2) = 2^2 * 0,1 + 3^2 * 0,4 + 10^2 * 0,5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - 6,4^2 = 13,04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение

$$s(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,04} \approx 3,61$$

Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин

Теорема. *Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:*

$$s(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}.$$

Рассмотрим связь между числовыми характеристиками среднего арифметического \bar{X} и соответствующими характеристиками каждой отдельной величины.

1. Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных, величин равно математическому ожиданию a каждой из величин:

$$M(\bar{X}) = a$$

2. Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин:

$$D(\bar{X}) = D/n. \quad (*)$$

3. Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше среднего квадратического отклонения каждой из величин:

$$s(\bar{X}) = s / \sqrt{n}. \quad (**)$$

Начальные и центральные теоретические моменты

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k :

$$v_k = M(X).$$

В частности,

$$v_1 = M(X), \quad v_2 = M(X^2).$$

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ можно записать так:

$$D(X) = v_2 - v_1^2. \quad (*)$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]. \quad (**)$$

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0, \quad \mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \quad (***)$$

Сравнивая () и (***), получим* $m_2 = v_2 - v_1^2$.

$$m_3 = v_3 - 3 v_2 v_1 + 2 v_1^3,$$

$$m_4 = v_4 - 4 v_3 v_1 + 6 v_2 v_1^2 + 3 v_1^4$$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Теорема Чебышева

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины.

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами, если ε — сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Бернулли утверждает, что при $n \rightarrow \infty$ относительная частота стремится по вероятности к p . Коротко теорему Бернулли записывают так:

$$\frac{m}{n} - \frac{\text{вер}}{n \rightarrow \infty} \rightarrow p$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть x —действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x , т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$.

Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ —функция от x .

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x , т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x .

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0, 1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $F(x)$ - неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

*Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:
 $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$. (**)*

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то: 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Свойства функции распределения

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x , то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения

Свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины. График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a,b) , в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).

При $x \leq a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geq b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

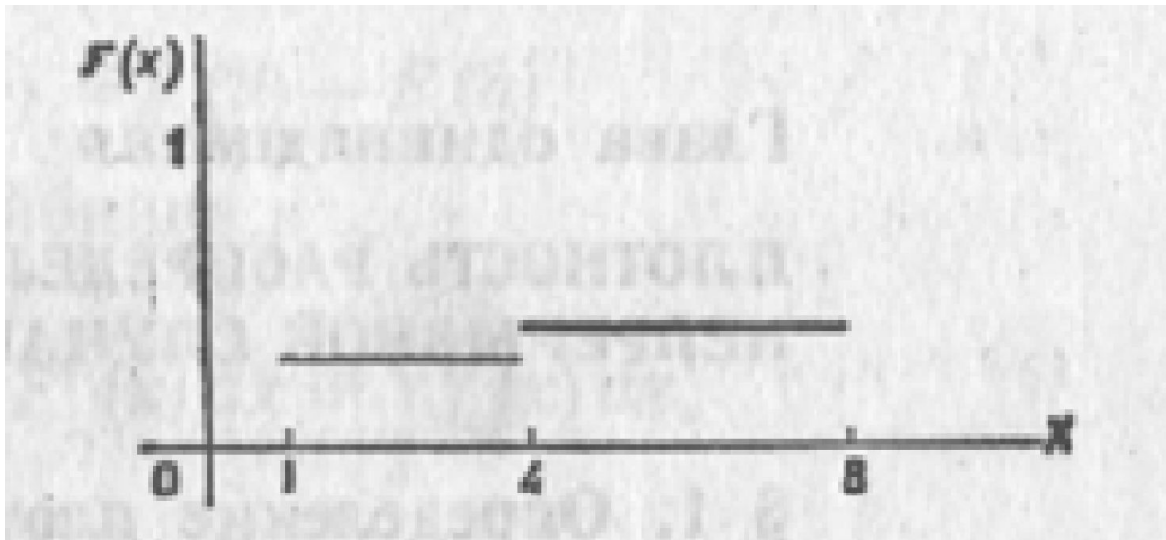
Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \leq 1$, то $F(x) = 0$ (третье свойство). Если $1 < x \leq 4$, то $F(x) = 0,3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3. Если $4 < x \leq 8$, то $F(x) = 0,4$.

Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \leq 8$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0,3 + 0,1 = 0,4$. Если $x > 8$, то $F(x) = 1$.

Функция распределения равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,4 & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$



Определение плотности распределения

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0,5; 1)$.

Решение. Искомая вероятность

$$P(0,5 < X < 1) = 2 \int_{0,5}^1 x dx = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Нахождение функции распределения по известной плотности распределения

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Действительно, мы обозначили через $F(x)$ вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x , т. е.

$F(x) = P(X < x)$. Очевидно, неравенство $X < x$ можно записать в виде двойного неравенства $-\infty < X < x$, следовательно,
 $F(x) = P(-\infty < X < x)$ (*)

Полагая в формуле (*) $a = -\infty$, $b = x$, имеем

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Наконец, заменив $P(-\infty < X < x)$ на $F(x)$, в силу (*), окончательно получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Разумеется, по известной функции распределения может быть найдена плотность распределения, а именно:

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения

Свойство 1. *Плотность распределения - неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.*

Геометрически это свойство означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью Ox , либо на этой оси. График плотности распределения называют ***кривой распределения***.

Свойство 2. *Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и кривом распределения, равна единице. В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

Пример. Плотность распределения случайной величины X задана:

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^x}$$

Найти постоянный параметр a .

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,

поэтому потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = 1.$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}}.$$

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctge}^x$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{e^{-x} + e^x} + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{b \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctge}^b) + \lim_{c \rightarrow \infty} (\operatorname{arctge}^c) = \pi/2.$$

Таким образом, искомый параметр

$$a = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

Вероятностный смысл плотности распределения

Пусть $F(x)$ —функция распределения непрерывной случайной величины X . По определению плотности распределения, $f(x) = F'(x)$, или в иной форме
$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Как уже известно, разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ определяет вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$. Предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, к длине этого интервала (при $\Delta x \rightarrow 0$) равен значению плотности распределения в точке x .

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$
 Исходя из этого можно рассматривать значение функции $f(x)$ в точке x как плотность вероятности в этой точке.

Закон равномерного распределения вероятностей

Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также *законами распределений*.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины- X , Возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx. ,$$

если возможные значения принадлежат всей оси x , то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается

плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ . Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

$M(X) = a$, т. е. математическое ожидание нормального распределения равно параметру a .

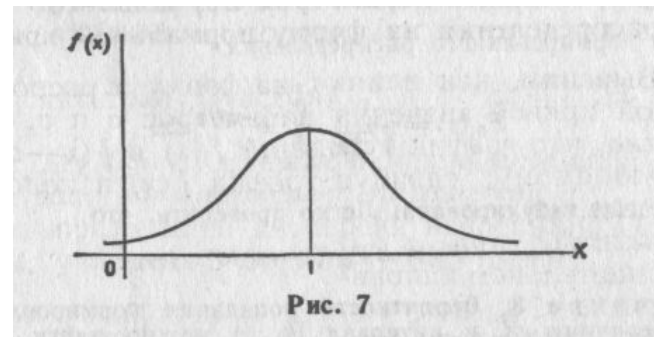
Среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ .

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой (кривой Гаусса)*. Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

Нормальное распределение

- ❖ Очевидно, функция определена на всей оси x .
- ❖ При всех значениях x функция принимает положительные значения, т. е. нормальная кривая расположена над осью Ox .
- ❖ Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} y = 0$ т. е. ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика.
- ❖ При $x = a$ функция имеет максимум, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.
- ❖ Разность $x-a$ содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т. е. график функции симметричен относительно прямой $x = a$.
- ❖ Точки графика $(a - \sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi}))$ и $(a + \sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi}))$ являются точками перегиба.



Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , такова:

$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна $P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx$. Введем новую переменную $z = (x-a)/\sigma$.

$$\begin{aligned} P(\alpha < X < \beta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2} (\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^0 e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$.

окончательно получим $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность, того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. По условию, $\alpha=10$, $\beta=50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, следовательно, $P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2)$.

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2) = 0,4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 * 0,4772 = 0,9544.$$

Вычисление вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ , т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X - a| < \delta$. Заменяем это неравенство равносильным ему двойным неравенством -- $\delta < X - a < \delta$, или $a - \delta < X < a + \delta$.

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Приняв во внимание равенство $\Phi(-\delta / \sigma) = -\Phi(\delta / \sigma)$

(функция Лапласа — нечетная), окончательно имеем

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma)$. В частности, при $a = 0$

$P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma)$.

Правило трех сигм

$$P (| X - a | < 3 \sigma) = 2\Phi (3) = 2 * 0,49865 = 0,9973,$$

т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973. Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти.

Такие события исходя из принципа невозможности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

Показательное распределение

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X_1 которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где λ — постоянная положительная величина, показательное распределение определяется одним параметром λ . Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока

Показательное распределение

Найдем вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X , которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Используем формулу $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Получим $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ , т.е. $M(X) = 1/\lambda$.

Дисперсия $D(X) = 1/\lambda^2$.

Найдем среднее квадратическое отклонение, для чего извлечем квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = 1/\lambda.$$

$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda$, т. е. *математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.*

Функция надежности

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а по истечении времени длительностью t происходит отказ.

Обозначим через T непрерывную случайную величину — длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно (до наступления отказа) время, меньшее t , то, следовательно, за время длительностью t наступит отказ. Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t . Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t , т. е. вероятность противоположного события $T > t$, равна $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$.

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t : $R(t) = P(T > t)$.

Функция надежности

Часто длительность времени безотказной работы момента имеет показательное распределение, функция распределения которого $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. В случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид $R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ — интенсивность отказов.