А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай Мемлекеттік Университеті
Аграралық-техникалық институті

Математика және физика кафедрасы

Математика 3 пәні

Математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Берденова Г. Ж.

ТАҚЫРЫП:

«Статистикалық гипотезаларды тексеру.»

Математик

Мақсат:

жиіліктер полигонын салу, мода мен медиананы анықтау;

- Көбейтінділер әдісімен таңдамалық орташаны, дисперсияны, орта квадраттық ауытқуды вариация коэффицентін табу;

СҰРАҚТАР:

1. Үлестірімнің статистикалық қатары және оның сипаттамалары» .

2. ҚАТАРДЫҢ ТАҢДАМА СИПАТТАМАЛАРЫН ЕСЕПТЕУДІҢ КӨБЕЙТІНДІЛЕР ӘДІСІ.

3. Үлестірім параметрлерінің интервалдық бағасы.

Таңдаманың сипаттамалары

а) Эмпирикалық функция.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}. \qquad (3.1.1)$$

Мұнда n_x х-тан кіші болатын варианталардың жиіліктерінің қосындысы. Таңдаманың көлемі үлкен болғанда, осы функция арқылы бас жинақтың белгісіз интегралдық үлестірім функциясы F(x)-ты жуықтап табуға болады.

б) Жиіліктер полигоны.

Жазықтықтағы координаталары (x_1,n_1), $(x_2,n_2),\ldots,$ (x_k,n_k) нүктелерін қосатын кесінділерден тұратын қисық *сызық полигон* деп аталады.

в) Таңдамалық орташа.

$$\overline{X}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}. \qquad (3.1.2)$$

г) Таңдамалық дисперсия.

$$D_T = \frac{\Sigma n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} = \frac{\Sigma n_i x_i^2}{n} - (\bar{x}_T)^2. \qquad (3.1.3)$$

д) Таңдамалық орташа квадраттық ауытқу.

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad 3.1.4)$$

е) *к*-шы ретті бастапқы эмпирикалық момент.

$$\mathrm{M}_{\kappa}=\frac{\sum n_i x_i^k}{n},\ \kappa=1,2,3,... \qquad (3.1.5)$$

ж) *к*-шы ретті орталық эмпирикалық момент.

$$\mathrm{m}_{\kappa}=\frac{\sum n_i (x_i - x_T)^k}{n}\ \ \kappa=1,2,3,... \qquad (3.1.6)$$

з) Таңдамалық асимметрия.

$$a_s=\frac{m_3}{\sigma_T^3}. \qquad (3.1.7)$$

и) Таңдамалық эксцесс.

$$e_k=\frac{m_4}{\sigma_T^4}-3. \qquad (3.1.8)$$

1-ескерту. Егер x_i варианталары үлкен сандар болса, жоғарыдағы (3.1.2) және (3.1.3) формулаларын тікелей пайдаланбай, $u_i=x_i-C$ деген шартты варианталарға көшіп, мына формулаларды пайдаланған ыңғайлы болады:

$$\overline{X}_T = \frac{\sum n_i u_i}{n} + C \tag{3.1.9}$$

$$D_T(x) = D_T(u) = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n}\right)^2 \tag{3.1.10}$$

Мұндағы C – "жалған нөл" деп аталатын сан, оны өзіміз жиілігі ең үлкен варианталарына шамалас етіп таңдаймыз.

1-мысал. Таңдама мына вариациялық қатар түрінде берілген:

x_i	1	4	5
n_i	4	4	2

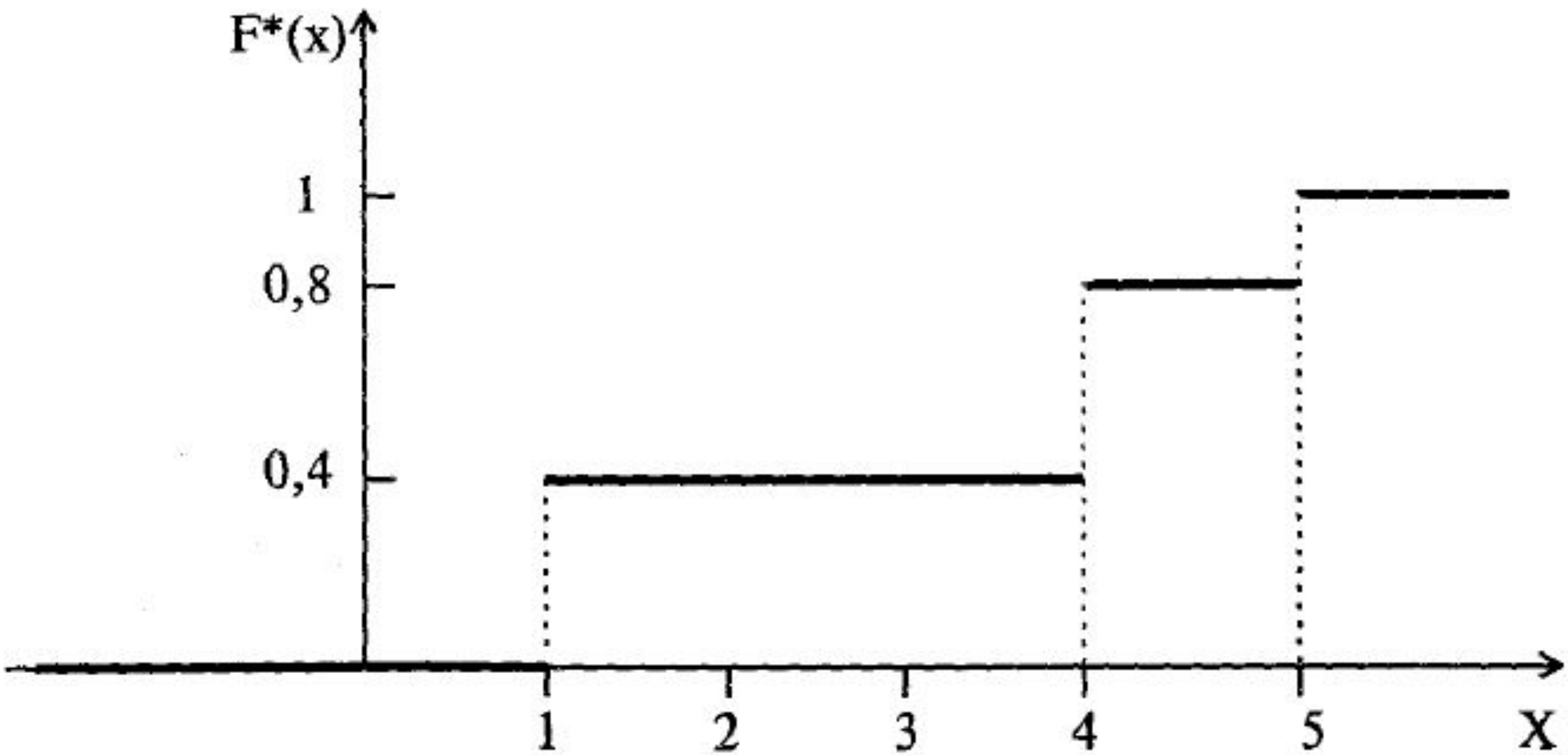
Барлық сипаттамаларын табыңыз.

Шешуі: x_i варианталары кішкене сандар болғандықтан (3.1.1)–(3.1.8) формулаларын тікелей қолданамыз.

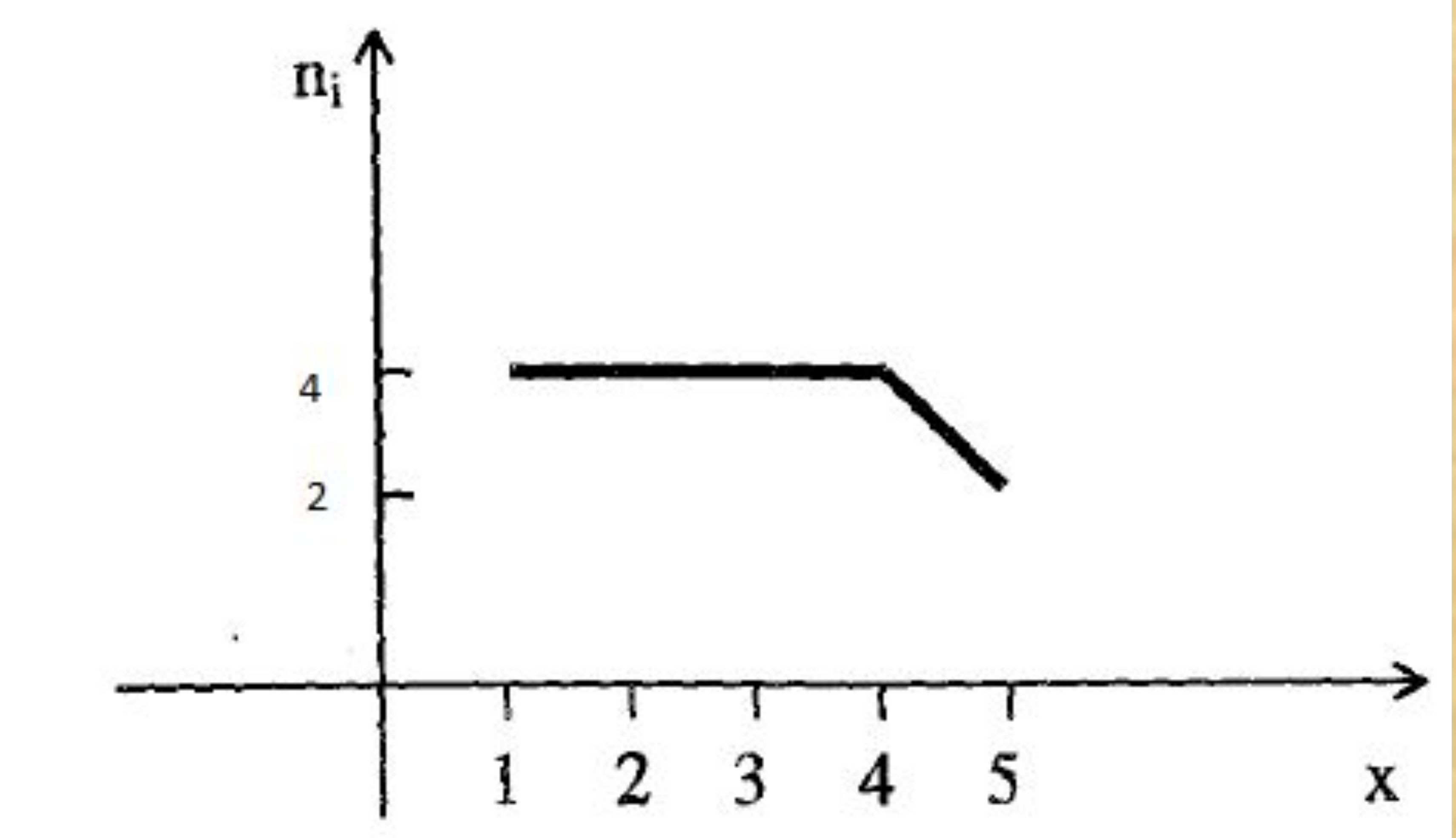
а) Таңдаманың көлемі **n**=10 және $x \le 1$ болса $n_x=0$ (1-ден кіші варианталар жоқ), демек $F^*(x)=0$, ал $x<4$ болса $n_x = 4$, $F^*(x)=0{,}4$, т.с.с. есептеулер жүргізіп мына функцияны табамыз:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } -\infty < x \le 1 \\ 0{,}4, & \text{егер } 1 < x \le 4 \\ 0{,}8, & \text{егер } 4 < x \le 5 \\ 1, & \text{егер } 5 < x < +\infty \end{cases}$$

Осы функцияның графигі төмендегідей болғандықтан, эмпирикалық функцияны баспалдақ тәріздес функция деп атау орынды.



Жиіліктер полигоны төмендегідей қисы қ болады:



в) $\bar{x}_T = \dfrac{4\cdot 1 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5}{10} = 3$

г) $D_T = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} - 9 = 2{,}8$

д) $\sigma_T = \sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67$

е) $M_1 = \bar{x}_T,\ M_2 = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} = 11{,}8$

ж) $m_1 = 0, \qquad m_2 = D_T$

$$m_3 = \frac{4\cdot(1-3)^3 + 4\cdot(4-3)^3 + 2\cdot(5-3)^3}{10} = -1{,}2$$

$$m_4 = \frac{4\cdot(1-3)^4 + 4\cdot(4-3)^4 + 2\cdot(5-3)^4}{10} = 1{,}0$$

з) Таңдамалық асимметрия.

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3}.$$

и) Таңдамалық эксцесс.

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3.$$

з) $a_s = -\dfrac{1,2}{(1,67)^3} = -0,26$

и) $e_k = \dfrac{10}{7,84} - 3 = -1,72$

Варианталары біркелкі орналасқан таңдамалар. Кебейтінділер тәсілі

Таңдамадағы варианталар біркелкі орналассын. Яғни қадам $h=x_2-x_1=x_3-x_2=\ldots=x_k-x_{k-1}$ тұрақты сан болсын. Бұл жағдайда “жалған нөл” – С ретінде жиілігі ең үлкен болатын вариантаны алып, одан кейін $u_i=(x_i-C)/h$ шартты варианталарына көшіп, мынадай шартты моменттерді анықтаймыз:

$$M_k{}^* = \frac{\sum n_i u_i{}^k}{n};\ k=\overline{1,4}, \qquad (3.2.1)$$

сонда

$$\bar{x}_T = M_1^* \cdot h + c;$$

$$e_k = \frac{[M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6(M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3(M_1^*)^4]\cdot h^4}{\sigma_T^4} - 3; \qquad (3.2.2)$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)]\cdot h; \quad a_s = \frac{[M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2(M_1^*)^3]\cdot h^3}{\sigma_T^3}. \qquad (3.2.3)$$

Осы тәсілді көбейтінділер тәсілі дейміз.

Мына таңдаманың сандық сипаттамаларын табыңыз.

x_i	8	18	28	38	48	58
n_i	5	2	3	71	9	10

Таңдамадағы варианталар біркелкі орналассын. Яғни қадам $h=x_2-x_1=x_3-x_2=...=x_к-x_{к-1}$ тұрақты сан болсын. Бұл жағдайда "жалған нөл" – С ретінде жиілігі ең үлкен болатын вариантаны алып, одан кейін $u_i=(x_i-C)/h$ *шартты варианталарына көшіп*, мынадай шартты моменттерді анықтаймыз:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n}; \; k=\overline{1,4}, \qquad (3.2.1)$$

сонда

$$\bar{x}_T = M_1^* \cdot h + c;$$

$$e_k = \frac{[M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6(M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3(M_1^*)^4] \cdot h^4}{\sigma_T^4} - 3; \qquad (3.2.2)$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)] \cdot h; \quad a_s = \frac{[M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2(M_1^*)^3] \cdot h^3}{\sigma_T^3}. \qquad (3.2.3)$$

Осы тәсілді көбейтінділер тәсілі дейміз.

Мына таңдаманың сандық сипаттамаларын табыңыз.

x_i	8	18	28	38	48	58
n_i	5	2	3	71	9	10

Шешуі: n=100; h=10; C=38 екені түсінікті. Енді мынадай есептеу кестесін құрамыз.

X_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
8	5	-3	-15	45	-135	405
18	2	-2	-4	8	-16	32
28	3	-1	-3	3	-3	3
38	71	0	0	0	0	0
48	9	1	9	9	9	9
58	10	2	20	40	80	160
			Σ=7	Σ=105	Σ=-74	Σ=609

Мына таңдаманың сандық сипаттамаларын табыңыз.

x_i	8	18	28	38	48	58
n_i	5	2	3	71	9	10

Шешуі: n=100; h=10; C=38 екені түсінікті. Енді мынадай есептеу кестесін құрамыз.

X_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ u_i^3$	$n_i\ u_i^4$
8	5	-3	-15	45	-135	405
18	2	-2	-4	8	-16	32
28	3	-1	-3	3	-3	3
38	71	0	0	0	0	0
48	9	1	9	9	9	9
58	10	2	20	40	80	160
			Σ=7	Σ=105	Σ=-74	Σ=609

яғни $M_1^* = 0,07;\ \ M_2^* = 1,05;\ \ M_3^* = -0,04;\ \ M_4^* = 6,09;$

Олай болса (3.2.2)–(3.2.3) формулалар бойынша

$$\overline{x}_T = 0,07 \cdot 10 + 38 = 38,7;$$

$$D_T = [1,05 - (0,07)^2] \cdot 100 = 104,51;$$

$$\sigma_T = \sqrt{104,51} \approx 10,22$$

a_s = -0,89, e_k=8,59.

Тапсырма №1. Таңдаманың берілген статистикалық үлестіріміне (кесте 1)

1. жиіліктер полигонын сал;
2. мода мен медиананы анықта;
3. көбейтінділер әдісімен таңдамалық орташаны, дисперсияны, орта квадраттық ауытқуды тап;
4. вариация коэффицентің тап.

x	385	405	425	445	465	485	
n	5	7	10	9	4	1	

Тапсырма №1. Таңдаманың берілген статистикалық үлестіріміне (кесте 1)

1. жиіліктер полигонын сал;
2. мода мен медиананы анықта;
3. көбейтінділер әдісімен таңдамалық орташаны, дисперсияны, орта квадраттық ауытқуды тап;
4. вариация коэффицентін тап.

x	385	405	425	445	465	485
n	5	7	10	9	4	1

x	ni	Ui	niUi	niUi^2	ni(Ui+1)^2
385	5	-2	-10	20	5
405	7	-1	-7	7	0
425	10	0	0	0	10
445	9	1	9	9	36
465	4	2	8	16	36
485	1	3	3	9	16
			0	0	0
сумма	36	3	3	61	103

Тапсырма №1. Таңдаманың берілген статистикалық үлестіріміне (кесте 1)

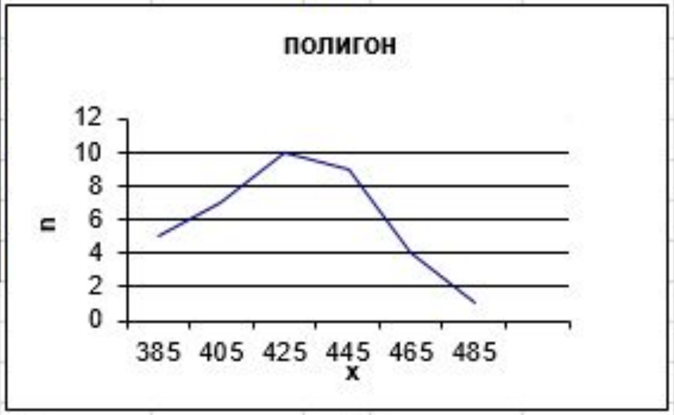
1. жиіліктер полигонын сал;
2. мода мен медиананы анықта;
3. көбейтінділер әдісімен таңдамалық орташаны, дисперсияны, орта квадраттық ауытқуды тап;
4. вариация коэффицентің тап.

x	385	405	425	445	465	485
n	5	7	10	9	4	1

x	ni	Ui	niUi	niUi^2	ni(Ui+1)^2
385	5	-2	-10	20	5
405	7	-1	-7	7	0
425	10	0	0	0	10
445	9	1	9	9	36
465	4	2	8	16	36
485	1	3	3	9	16
			0	0	0
сумма	36	3	3	61	103

C= 425

h= 20



контроль	103
выб.сред.	426,66667
Dв=	675
откл.ср.	25,980762
V(коэф)	6,0892411

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

$$D\text{в} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \right)^2 \right] \cdot h^2$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}$$

$$\overline{X}в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \cdot h + C$$

$$\overline{X}в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Тапсырма №2 «Үлестірім параметрлерінің интервалдық бағасы» тақырыбына

Анықтама 1. *Интервалдық баға* деп бағаланатын параметрді жабатын интервалдың шеткі нүктелері болатын екі санмен анықталатын белгісіз параметрдің бағасы аталады.

Анықтама 2. Берілген интервалды берілген γ сенімділікпен жабатын интервал *сенімділік интервалы* деп аталады.

Орта квадраттық ауытқу σ белгі болғанда, қалыпты үлестірім a математикалық үмітінің сенімділік интервалы $\bar{x}_r - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_r + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, мұнда t

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ Лаплас функциясының $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ болғандағы аргументінің мәні.

Тапсырма №2. $\bar{x}_B$ таңдамалық орташа, n таңдама көлемі және σ орта квадраттық ауытқу белгілі болғанда, қалыпты үлестірімнің **а** математикалық үмітін γ сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалын тап (кесте 2).

Кесте 2

γ	$\bar{x}_B$	n	σ
0,9	35	196	14

γ	Хв	n	σ
0,9	35	196	14

$$\bar{X}в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \langle a \langle \bar{X}в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$$

$\boxed{\Phi(t) =}$	0,45	t=	1,65
	33,35	<a<	36,65

Тапсырма №3. 100 жұмыс күнінде тауар өткізуден көтерме қойманың күнделікті табысын таңдама тексеру мынадай қорытынды берді (кесте 3).

Кесте 3

$x_{i-1} - x_i$	0 - 5	5 - 10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	2	9	14	17	25	22	7	4

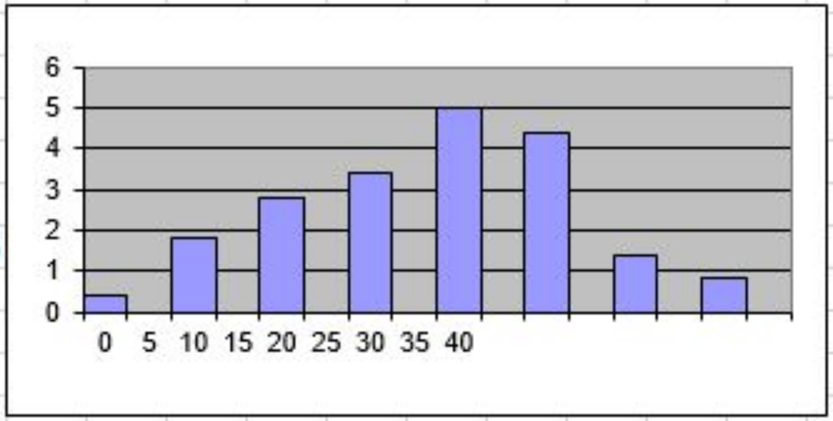
Табу керек:

1. жиіліктер гистограммасын;
2. көтерме қойманың күнделікті табысы X кездейсоқ шамасының математикалық үміті мен дисперсияның сәйкес жылжымайтын $\bar{x}_B$ және S^2 бағаларын тап;
3. кездейсоқ алынған жұмыс күнінде күндізгі табыс 15 шартты ақша бірлегінен кем емес болу ықтималдығын жуықтап тап.

$x_{i-1} - x_i$	0	5	5	10	10	15	15	20	20	25	25	30	30	35	35	40
n_i	2		9		14		17		25		22		7		4	
Ni/h	0,4		1,8		2,8		3,4		5		4,4		1,4		0,8	

шаг 5

Xi	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
n_i	2	9	14	17	25	22	7	4



x	ni	Ui	niUi	niUi^2	ni(Ui+1)^2
2,5	2	-3	-6	18	8
7,5	9	-2	-18	36	9
12,5	14	-1	-14	14	0
17,5	17	0	0	0	17
22,5	25	1	25	25	100
27,5	22	2	44	88	198
32,5	7	3	21	63	112
37,5	4	4	16	64	100
сумма	100	4	68	308	544

C= 17,5

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

$$\overline{X}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \cdot h + C$$

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{\left[\sum n_n u_i\right]^2}{n}}{n-1} \cdot h^2$$

$\overline{x}_в$	21		
		d	S
S^2_u		65,4	66,1

Негізгі ұғымдар:

1. Кесінділер (x_1, n_1), (x_2, n_2), ... , (x_k, n_k)нүктелерін қосатын сынық сызық *жиіліктер полигоны* деп аталады. Абциссалар осі –x_i варианталар осі, ординаталар осі –n_i жиіліктер осі.
2. Мода M_o – жиілігі ең үлкен варианта.
3. Медиана M_e – үлестірім қатарының ортасындағы варианта.
4. *Таңдамалық орташа* $\bar{x}_{\text{т}}$ - таңдамадан есептелген белгі мәндерінің арифметикалық ортасы: $\bar{x}_{\text{т}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$

5. Таңдамалық дисперсия $D_г$ - белгінің бақыланған мәнінен орташа мәнінің $\bar{x}_г$ ауытқуының квадратының арифметикалық ортасы: $D_г = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_г)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$

6. Таңдамалық орта квадраттық ауытқу $\sigma_г = \sqrt{D_г}$ шамасы.

7. Вариация коэффиценті $V = \frac{\sigma_г}{\bar{x}_г} \cdot 100\%$

8. Шартты варианталар - $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ теңдігімен анықталатын варианталар.

Мұнда С жалған ноль (жаңа санақ басы), ол үшін әдетте қатардың ортасындағы варианта алынады; h – қадам (көрші варианталардың айырмасы).

Ұсынылатын әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері.- Алматы: «Қайнар», 2018.- 384б.

2 Бектаев Қ. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: «Рауан», 2011ж.

3 Казешев А, Абенов М, Қойлышев Ү. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы.–А.: Ғылым, 2005.-183 б.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высшая школа, 2000.- 479 б.

5 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 2000.- 400 б.

6 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник практикум по теории вероятности и математической статистике – М. Просвещение, 2010. -108 б.

Назарларыңызға рахмет!