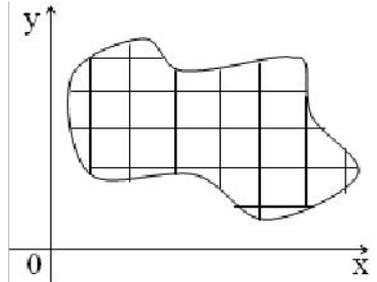


8. Кратные и криволинейные интегралы.

8.1 Двойные интегралы

8.1.1 Определение двойного интеграла



Рассмотрим область D на плоскости x, y .

Разобьем D на n частичных областей S_i сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i , а по оси y – на Δy_i . Область D делится на элементарные прямоугольники (за исключением приграничных участков), площади которых равны $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и

составим *интегральные суммы* $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$; где f – функция,

непрерывная и однозначная для всех точек области D .

Если при бесконечном увеличении количество частичных областей n интегральные суммы S_n имеют конечный предел, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy$$

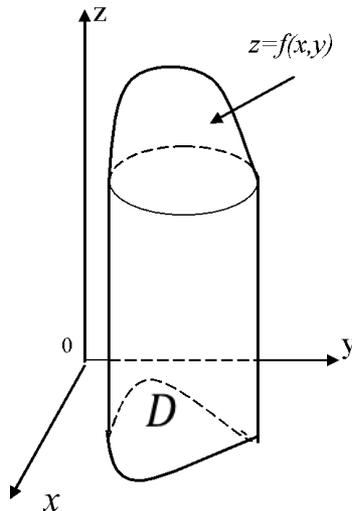
Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то она интегрируема по этой области и двойной интеграл существует.

8.1.2 Основные свойства двойного интеграла

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)] dy dx = \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx + \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx - \iint_{\Delta} f_3(x, y) dy dx$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x, y) dy dx = k \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx$$

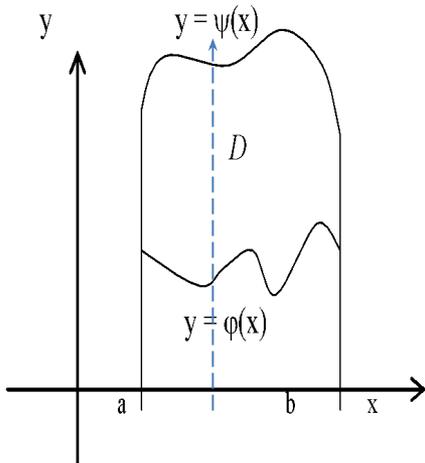
$$3) \text{ Если } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \text{ то } \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \iint_{\Delta_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Delta_2} f(x, y) dy dx$$



• Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x, y) \in D$. Тогда двойной интеграл от этой функции по области D равен объёму V цилиндрического тела, основанием которого служит область D плоскости $z=0$ и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$

8.1.3 Вычисление двойного интеграла

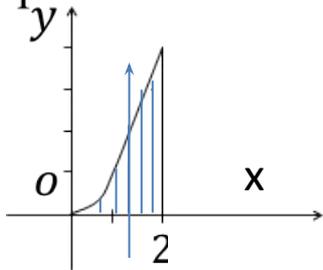


- **Случай области, простой по x**

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D , ограниченной линиями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), $y = \phi(x)$, $y = \psi(x)$, где ϕ и ψ - непрерывные функции и $\phi \leq \psi$ при $a < x < b$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Интеграл в правой части называется *повторным*. Первым вычисляется внутренний интеграл $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ по переменной y (x при этом считается временно постоянной)



Пример .

Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x - y) dx dy$

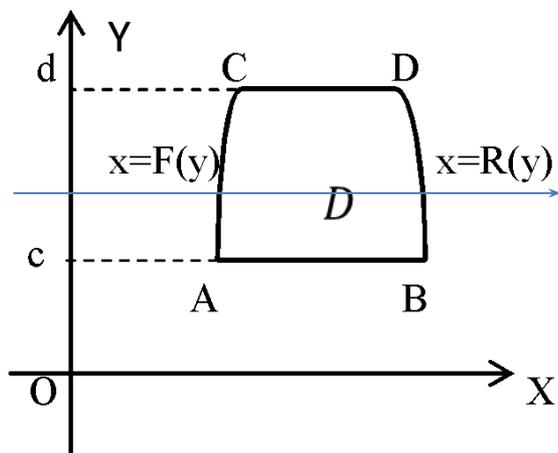
если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x - y) dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2$$

$$= 4 - 3,2 = 0,8$$

О т в е т: $\iint_{\Delta} (x - y) dx dy = 0.8$

- **Случай области, простой по y .**



Если область $ABCD$ ограничена прямыми $y=c$ и $y=d$ ($c < d$), то есть $c \leq y \leq d$, и дугами линий AC : $x=F(y)$ BD : $x=R(y)$, то есть $F(y) \leq x \leq R(y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{F(y)}^{R(y)} f(x, y) dx.$$

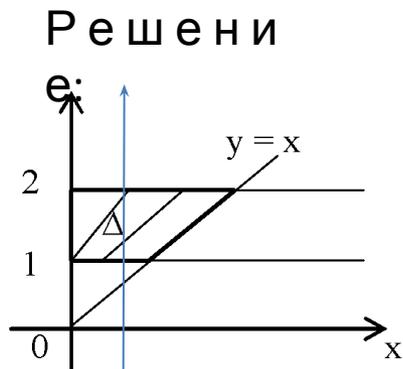
- **Замечание**

В общем случае область D разбивается на области $D_i, i = \overline{1; n}$ рассмотренных типов с последующим использованием свойства аддитивности двойных интегралов

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$

Пример.

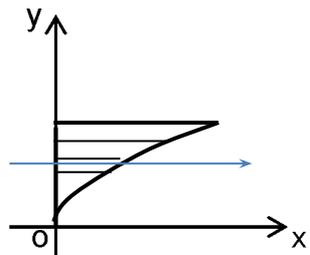
Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.



$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_1^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5 \end{aligned}$$

О т в е т: $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy = 5$

Пример.



Вычислить интеграл $I = \iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx) \Big|_0^{y^2} dy =$$

Решение

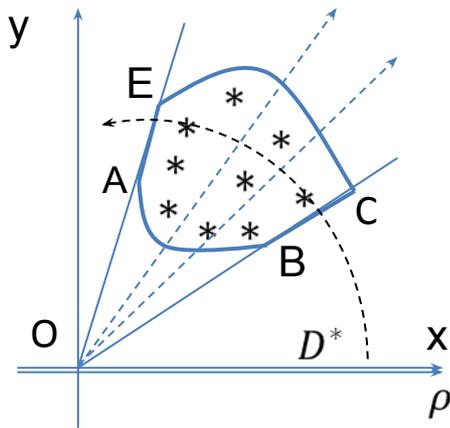
$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{244}{21} \quad \text{О т в е т: } I = 11 \frac{13}{21}$$

8.1.4 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат X, Y к полярным координатам $X = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \varphi \sin \varphi) \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi,$$

где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая ей область D в декартовой системе координат.



Если область D^* ограничена отрезками лучей $BC: \varphi = \alpha$ и $AE: \varphi = \beta$ ($\alpha < \varphi < \beta$) и дугами кривых $AB: \rho = \rho_1(\varphi)$ и $EC: \rho = \rho_2(\varphi)$, то получаем

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \varphi \sin \varphi) \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \varphi \sin \varphi) \cdot \rho \cdot d\rho \end{aligned}$$

Пример

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ с

помощью двойного интеграла в полярных координатах.

Р е ш е н и е

1 этап. Найдём уравнение линии в полярных координатах.

Подставляя $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ в уравнение кривой в декартовых координатах

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy, \text{ получим } (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad < = >$$

$$[\rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^2 = 2\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad < = > \quad \rho^4 = 2\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Поделив обе части последнего равенства на $\rho^2 \neq 0$, получим

$$\rho^2 = 2 \sin \varphi \cos \varphi \quad < = > \quad \underline{\rho^2 = \sin(2\varphi)} \quad - \text{уравнение «лемнискаты Бернулли»}.$$

2 этап. Построим кривую $\rho^2 = \sin(2\varphi)$.

A) Найдём область определения функции.

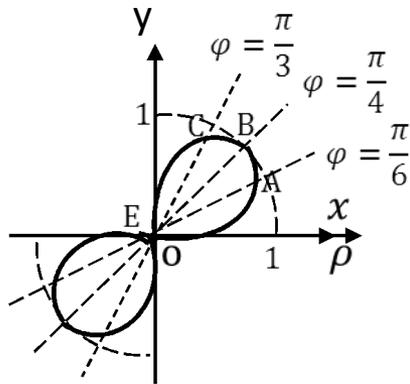
Так как в декартовых координатах. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy \Rightarrow$
 область допустимых значений

$$xy \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

В первой четверти область определения функции $\rho = \sqrt{\sin(2\varphi)}$

$$\sin(2\varphi) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\varphi \leq \pi \Rightarrow \underline{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}$$

B) Строим кривую в первой четверти, а затем симметрично относительно начала координат отображаем её в третий квадрант.



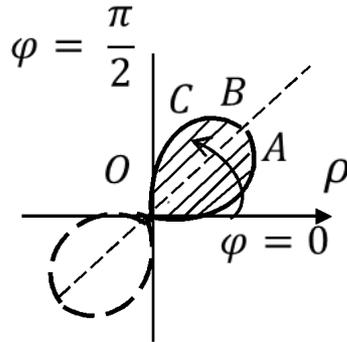
φ рад./град	$2\varphi = \psi$	$\sin \psi = F$	$\rho = \xi \bar{\rho}$	Точка $(\xi \bar{\rho}, \xi \bar{\rho})$
$0 = 0^0$	0^0	0	0	O $(0; 0)$
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	60^0	$\frac{\xi \bar{3}}{2} \approx 0.9$	$\xi \bar{0.9} \approx 0.9$	A $(\frac{\xi \bar{3}}{2}; \frac{\xi \bar{3}}{2})$
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	90^0	1	1	B $(1; 1)$
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	120^0	0.9	0.9	C $(\frac{\xi \bar{3}}{2}; \frac{\xi \bar{3}}{2})$
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	180^0	0	0	E $(0; 0)$

3 этап. Найдём площадь построенной фигуры.

Площадь $|D|$ плоской фигуры в полярных координатах вычисляется

по формуле

$$[D] = \iint_D \rho d\rho$$



Из рисунка видно, что площадь $|D_1|$ области $OABO$ составляет 50% искомой площади лемнискаты Бернулли. Так как в D_1

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{\sin(2\varphi)} \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} |D| &= 2 |D_1| = 2 \iint_{D_1} \rho d\rho = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin(2\varphi)}} \rho d\rho = 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{\sin(2\varphi)}} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(\sqrt{\sin(2\varphi)})^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin(2\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1. \end{aligned}$$

О т в е т: $|D| = 1$ (ед.³)

8.2 Тройные интегралы

8.2.1 Определение тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в ограниченной замкнутой пространственной области V . Разобьём V произвольным образом на n элементарных областей V_1, V_2, \dots, V_n с диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n и объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой элементарной области возьмём произвольную точку $P_K(\xi_K, \eta_K, \zeta_K)$ и умножим значение функции в этой точке на объём этой области.

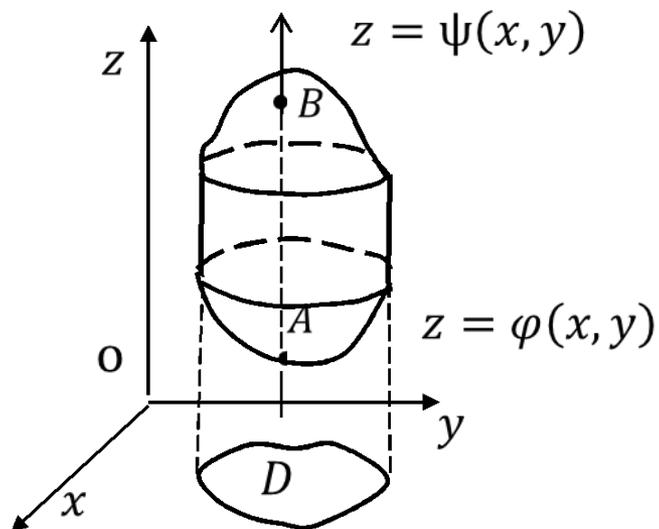
Интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по области V называется сумма вида $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k$.

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров $d = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$ всех элементарных областей ΔV_k называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k.$$

8.2.2 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

- **Использование двойного интеграла**

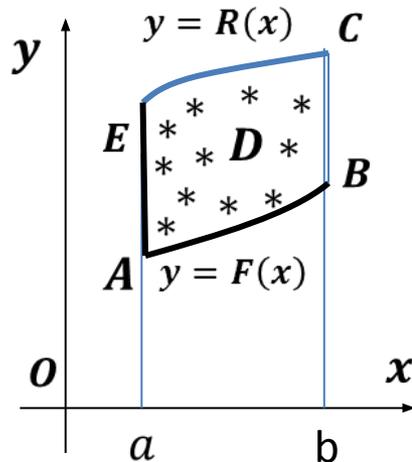


Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху - поверхностью $z = \psi(x, y)$, причём $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ - непрерывные функции в замкнутой области D , являющейся проекцией тела V на плоскость Oxy . Область V считается *правильной в направлении оси Oz* , если любая прямая, параллельная оси Oz , пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy,$$

где вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по переменным x, y от однократного интеграла по z .

- **Использование трёхкратного интеграла**



Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху - поверхностью $z = \psi(x, y)$, причём $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ - непрерывные функции в замкнутой области D , являющейся проекцией тела V на плоскость Oxy . Если область D описывается неравенствами $a \leq x \leq b$, $F(x) \leq y \leq R(x)$, где $F(x)$ и $R(x)$ - непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции, то

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{F(x)}^{R(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x; y; z) dz$$

З а м е ч а н и я.

1. Если область V более сложная, чем, то её следует разбить на конечное число областей рассмотренного типа.
2. Порядок интегрирования может быть изменён в зависимости от вида области.

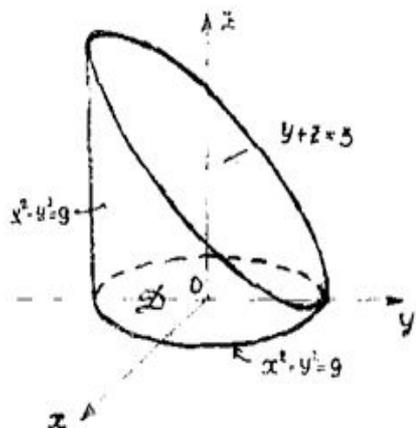
Пример Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 9$.

Решение.

1) Формула для вычисления объёма тела V , ограниченного снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху – поверхностью $z = \psi(x, y)$ имеет вид

$$|V| = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

При вычислении внутреннего интеграла по переменной z аргументы x, y принимаются временно постоянными



$$|V| = \iint_D \left(\int_0^{3-y} dz \right) dx dy = \iint_D [z]_0^{3-y} dx dy = \iint_D (3 - y) dx dy$$

2) Вычислим двойной интеграл $\iint_D (3 - y) dx dy = |V|$

Проекция D тела V на плоскость Oxy является кругом $x^2 + y^2 \leq 9$ радиуса 3, поэтому для рационального способа вычисления двойного интеграла перейдём к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad dx dy = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi.$$

Область D задаётся неравенствами $0 \leq \rho \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |v| &= \iint_D (3 - y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (3 - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (3\rho - \rho^2 \sin \varphi) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_{\rho=0}^{\rho=3} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{27}{2} - 9 \sin \varphi \right) d\varphi = \left[\frac{27}{2} \varphi + 9 \cos \varphi \right]_0^{2\pi} = \\ &= (27\pi + 9 \cos 2\pi) - (0 + 9 \cos 0) = \left\| \begin{array}{l} \cos 2\pi = -1, \\ \cos 0 = 1 \end{array} \right\| = (27\pi - 9) - 9 = 27\pi - 18. \end{aligned}$$

О т в е т: $|V| = 27\pi - 18$ (ед.³)