Математика ППИ.

ЛЕКЦИЯ 15. Основные понятия дифференциальных уравнений

Учебные вопросы

- 1. **Введение в теорию ДУ**:
- **задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.**
- **2.Обыкновенные дифференциальные уравнения, основные понятия (порядок, степень, решение). 3. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

- **4. Частное и общее решения, интегральные кривые, поле направлений.**
- **5. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными.**

Литература

- [2] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2005. с. 13-90;
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004. с. 446-490.

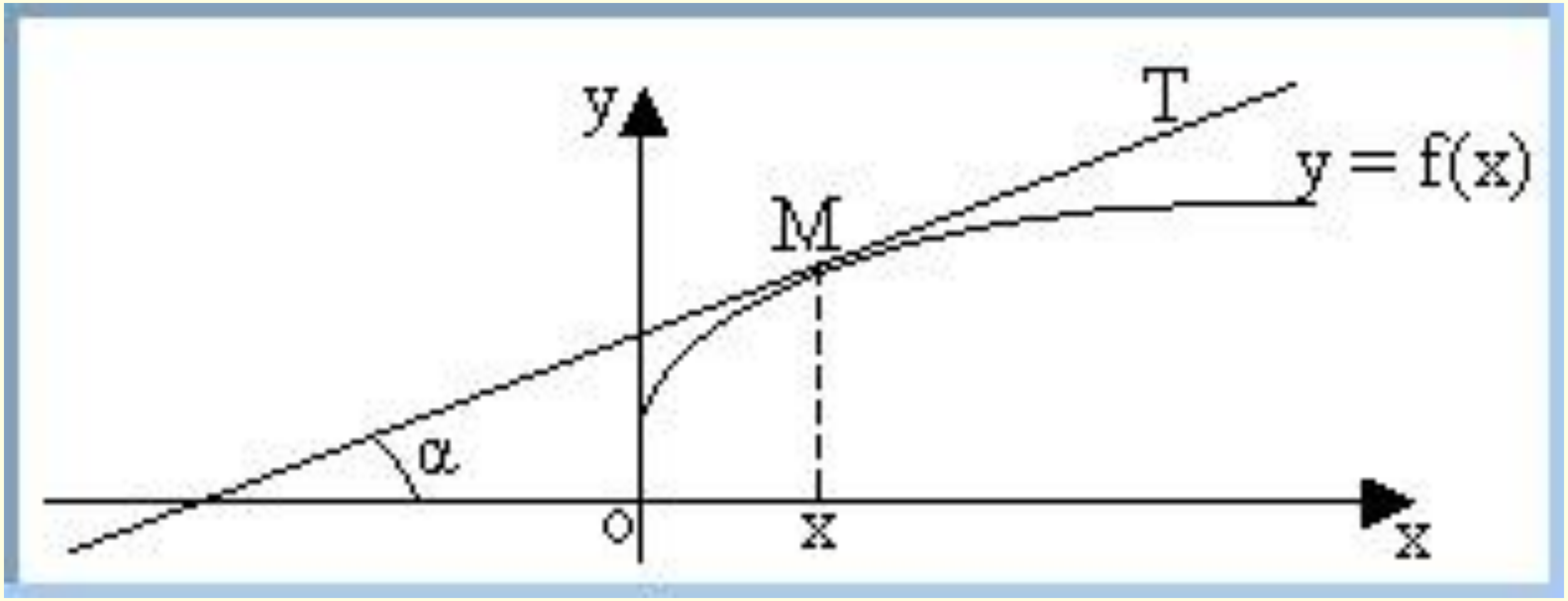
1.Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.

Задача 1.

На плоскости *XOY* найти кривую, которая в каждой своей точке имеет касательную, образующую с положительным направлением оси *Ox* угол, тангенс которого равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение.

Пусть уравнение искомой кривой $y=f(x)$.


y
T
y = f(x)
M
α
O
x
x

Угловой коэффициент касательной МТ есть tgα, он равен производной от у по х, так что

$$tg\alpha = y'$$

***С другой стороны*, по условию задачи имеем**

$$tg\alpha = 2x \, .$$

Приравнивая значения tg α, получим

$$y' = 2x$$

- ***Решением дифференциального уравнения является любая первообразная для функции 2x. Например,***
- **решением будет** $y = x^2$.

***Все первообразные для функции 2х и, следовательно,* все решения дифференциального уравнения задаются формулой**

$$y = x^2 + C \quad .$$

Дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Но если в условие задачи добавить точку M_0 (x_0, y_0), через которую проходит искомая кривая, то получим единственную кривую.

Для этого достаточно заменить в уравнении координаты *x* и *y* координатами точки M_0

$$y_0 = x_0{}^2 + C_0$$

- **Отсюда имеем** $C_0 = y_0 - x_0{}^2$ **и**

$$y = x^2 - x_0^2 + y_0$$

Таким образом, искомой кривой будет парабола.

Задача 2.

- Допустим, что в каждый момент времени t известна скорость $v(t)$ точки, движущейся по оси OX, где $v(t)$ - функция, непрерывная на (a,b).

- **Кроме того, известно значение x_0 положения точки в определенный момент времени t_0. Требуется найти закон движения точки.**

Решение.

- **Положение точки определяется одной координатой *x* и задача состоит в том, чтобы выразить *x* как функцию от *t* . Принимая во внимание механический смысл первой производной, *мы получим равенство***

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

- **Как известно из интегрального исчисления**

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + C, \quad (a < t < b)$$

- ***Так как в формулу входит произвольная постоянная С, то мы ещё не получили определённого закона движения точки.***

- **Поскольку движущаяся точка принимает положение *x_0* в заданный момент времени *t_0*, то**

$$x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + C, \;\Rightarrow C = x_0$$

- **Итак, закон движения точки имеет вид**

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + x_0\,, \quad (a < t < b)$$

Учебный вопрос.

- **Обыкновенные дифференциальные уравнения, основные понятия (порядок, степень, решение).**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Определение. **Обыкновенным дифференциальным уравнением *n*–ого порядка** **называется выражение вида:**

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где *x* – независимая переменная;

y(x) **– неизвестная функция;**

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ **– производные искомой функции.**

- Определение. **Порядком *n* дифферен-циального уравнения** **называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.**

Например,

$$y'' + y = 0$$

$$y^{(5)} + 2x^2 y''' + e^x y + 1 = 0$$

- Определение. **Решением дифференциального уравнения** **называется функция *$y=\varphi(x)$*, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство.**

Определение. **График решения дифференциального уравнения называется** **интегральной кривой дифференциального уравнения**. **Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.**

- Определение. **Решение дифференциального уравнения, полученное в неявном виде**

$$\Phi(x, y) = 0,$$

называется <u>интегралом дифференциального уравнения</u>.

Учебный вопрос.

- **Дифференциальные уравнения первого порядка.**

Дифференциальные уравнения первого порядка.

- Определение. **Дифференциальным уравнением первого порядка** **называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную:** $F(x, y, y') = 0$,
- **где** $$y' = \frac{dy}{dx}$$

- Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешить относительно производной , то получим

  уравнение нормального вида:

$$y' = f(x, y).$$

Учебный вопрос.

- **ЧАСТНОЕ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЯ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ**

ЧАСТНОЕ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЯ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ

- Определение. **Решение** $\boldsymbol{y=\varphi(x,C)}$**, которое зависит от независимой переменной** $\boldsymbol{x}$ **и произвольной постоянной, называется** **<u>общим решением ДУ первого порядка</u>.**

- **Решение *y=φ(x)*, полученное из общего при фиксированном значении произвольной постоянной, называется <u>частным решением ДУ первого порядка</u>.**

- **Задача Коши для уравнения**

$$F(x, y, y') = 0$$

- **состоит в том, чтобы найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию**

$$y(x_0) = y_0$$

- **Уравнение** $F(x, y, y') = 0$

в каждой точке

$M(x, y)$ области, где определено его решение $y=\varphi(x, C)$,

задаёт направление касательной к интегральной кривой. В итоге мы получаем целое поле направлений.

- **Это поле графически можно изобразить, поместив в каждой точке $M(x, y)$ черточку, наклоненную к оси Ox под углом, тангенс которого равен**

$$tg\alpha = y'$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

- Определение. **ДУ первого порядка называется** **уравнением с разделенными переменными**, **если его можно представить в виде**

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Решение этого уравнения

$$f(x)dx = -g(y)dy,$$
$$\int f(x)dx = -\int g(y)dy,$$
$$F(x) = -G(y) + C,$$
$$F(x) + G(y) = C$$

- **Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2xdx+\frac{dy}{y}=0$$

- **Решение.**

$$2xdx = -\frac{dy}{y},$$

$$\int 2xdx = -\int \frac{dy}{y},$$

$$x^2 = -\ln|y| + C,$$

$$\ln|y| = C - x^2,$$

$$y = e^{C-x^2},$$

$$y = e^c \cdot e^{-x^2} \quad \text{или} \quad y = Ce^{-x^2}$$

- Определение. **Уравнение вида**

$$P(x)\,Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$$

называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

$$R(x)\,Q(y) \not\equiv 0$$

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим уравнение на произведение $R(x)\,Q(y) \neq 0$. Тогда получим

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0$$

- это уравнение с разделенными переменными.

- **Общим интегралом будет**

$$\int \frac{P(x)}{R(x)}\,dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)}\,dy = C$$

ЗАМЕЧАНИЕ

- **Мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в нуль произведение *$R(x)Q(y)$*, а именно *$Q(y)=0$*, отсюда *$y_k = a_k$* ,где *a_k – const*.**

- **Если решения $y_k = a_k$ получаются из общего при подходящем выборе С, то такие решения будут частными, если же подобрать нужное С невозможно, то они называются особыми решения.**

Пример.

- **Найти общий интеграл и частное решение уравнения**

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

удовлетворяющее условию $y\big|_{x=-1} = 0$.

- **Решение.**
- **Делим на** $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \not\equiv 0$,
- **тогда**

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-y^2} + C$$

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$$ **-общий интеграл.**

- **Подставим начальное условие и найдем С:**

$$\sqrt{1-(-1)^2} + \sqrt{1-0^2} = C_0 \Rightarrow C_0 = 1$$

Частное решение $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$

- **Особое решение**

$$\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}=0,\ -1\le x\le 1,\ \ y=\pm 1,$$

так как

$$x\cdot 0\cdot dx\pm 1\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot 0=0, 0=0.$$

Учебные вопросы

- **6. Однородные и линейные уравнения 1 порядка.**
- **7. Уравнения Бернулли 1-го порядка.**
- **8. Дифференциальные уравнения высших порядков, начальные и граничные условия.**

Учебный вопрос.

- **Однородные и линейные уравнения 1 порядка.**

Однородные уравнения 1-го порядка.

Определение. **Дифференциальеное уравнение 1 порядка называется <u>однородным ДУ-1</u>, если *f(x,y)* может быть представлена как функция отношения своих аргументов,**

т.е. $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ **или**

$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, где λ – const.

$y' = f(x,y)$

- **1) Однородные уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными**

с помощью следующей замены: $z = \dfrac{y}{x}$**, т.е.**

***y=zx*, отсюда *y'=z'x+z*.**

- ***2)* После подстановки *y, y'* в исходное уравнение получим ДУ с разделяющимися переменными, в котором неизвестной является функция *z(x)*.**
- **3)После интегрирования в общем решении необходимо *z* заменить на отношение** $\dfrac{y}{x}$ **.**

Пример

Решить уравнение $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}; \qquad y' = \frac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 + \frac{y}{x}}$$

. Следовательно, данное уравнение является однородным. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью следующей замены переменных: $\frac{y}{x} = z$ **, тогда**

y= zx и $y' = z'$ **x+ z.**

Итак, $z'\mathbf{x} + \mathbf{z} = \dfrac{z+z^2}{2+z}$,

$$z'\mathbf{x} = \frac{z+z^2}{2+z} - \mathbf{z},$$

$$z'\mathbf{x} = \frac{z+z^2-2z-z^2}{2+z},$$

$z'\mathbf{x} = \dfrac{-z}{2+z}$. **Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Так как** $z' = \dfrac{dz}{dx}$, **то уравнение примет вид**

$\dfrac{dz}{dx}\mathbf{x} = \dfrac{-z}{2+z}$, **отсюда** $-\dfrac{z+2}{z}dz = \dfrac{dx}{x}$. **Интегрируя обе части уравнения, получим**

$$-\int \frac{z+2}{z}dz = \int \frac{dx}{x} \ ,$$

$$-\int dz - 2\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \ ,$$

- z – 2 ln | z | = ln |x| + ln | C | ,

- z = ln z^2 + ln | x | + ln | C | ,

- z = ln | z^2 x C| ,

z^2 x C = e^{-z} , сделаем обратную подстановку, получим $\left(\frac{y}{x}\right)^2 xC = e^{-\frac{y}{x}}$ **или**

$$y^2C = xe^{-\frac{y}{x}}.$$

Итак, общий интеграл уравнения имеет вид

$$y^2C = xe^{-\frac{y}{x}}.$$

Линейные уравнения первого порядка

- Определение. **<u>Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка</u> называется уравнение вида:**

$$y' + p(x)y = q(x) \quad ,$$

где *y(x)* – неизвестная функция.

- **Это уравнение линейно относительно y и y' .**
- **Если правая часть уравнения *q(x) = 0*, то получим уравнение**

$$y' + p(x)y = 0 \quad ,$$

которое называется <u>линейным однородным</u>, соответствующим линейному неоднородному уравнению.

- **Рассмотрим линейное уравнение** $y' + p(x)y = q(x)$ **Неизвестную функцию** ***y(x)*** **будем искать в виде произведения неизвестных функций**

  y(x)=u(x)·v(x)**, тогда** ***y'=u'v+uv'*****. Подставляя** ***y*** **и** ***y'*** **в исходное уравнение, получим:**

$$\underbrace{u'v + uv'}_{y'} + p(x)\underbrace{uv}_{y} = q(x)$$

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x)$$

- **Положим** $v' + p(x)v = 0$ **и найдем функцию *v(x)*, решая это уравнение с разделяющи-мися переменными:**

$$\frac{dv(x)}{dx} = -pv(x)$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

- Для нахождения *u(x)* подставим найденную функцию *v(x)* и ее производную

$$v'(x) = \left(e^{-\int p(x)dx}\right)' = \left(e^{-\int p(x)dx}\right) \cdot \left(-\int p(x)dx\right)' = -p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

в уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными

Решим его $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

$$\frac{du(x)}{dx} e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\int du(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

$$u(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$y = uv = \underbrace{\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right)}_{u(x)} \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{v(x)}$$

Пример

- **Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию**

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$$

Данное уравнение является линейным.

Решение данного уравнения y(x) будем искать в виде y = u(x)·v(x), тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ **.**

Подставим эти равенства в уравнение:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{3uv}{x} = \frac{2}{x^3},$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{3v}{x}) = \frac{2}{x^3}.$$

Функцию v (x) находим из уравнения $v' + \dfrac{3v}{x} = 0$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{-3dx}{x},$$ **отсюда**

ln | v | = - 3 ln | x | ,

ln | v | = ln | x |$^{-3}$ и

$$v = \frac{1}{x^3} \ .$$

Подставим найденную функцию v(x) в уравнение для того, чтобы найти функцию u(x):

$$u' \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3},$$

$$u' = 2,$$

$$\frac{du}{dx} = 2,$$

du = 2 dx,

тогда $\mathbf{u} = \int 2dx = 2x + C$.

Таким образом, решение уравнения имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{u(x) \cdot v(x)} = (2x + C)\frac{1}{x^3},$$

$$\mathbf{y} = \frac{2}{x^2} + \frac{C}{x^3}.$$

Из условия y(1) = 1 находим постоянную C:

$\mathbf{y(1)} = \frac{2}{1^2} + \frac{C}{1^3} = \mathbf{1}$; **отсюда C = - 1.**

- **Следовательно, частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:**

$$y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

Учебный вопрос.

- Уравнения Бернулли.

Уравнения Бернулли.

- Определение. **Дифференциальное уравнение вида** $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$**,
где** $\boldsymbol{\alpha \neq 0, 1}$
называется **<u>уравнением Бернулли</u>**.
- *1)Предполагая, что* $y \neq 0$*, разделим обе части уравнения Бернулли на* y^{α}*. В результате получим:*

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y^{-\alpha+1}=Q(x)$$

- *2) Введем новую функцию* $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$ *. Тогда*

$$\frac{dz}{dx} = (-\alpha+1)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$$

- *3) Умножим уравнение на (-α+1) и перейдем в нем к функции z(x):*

$$\frac{dz}{dx} + (-\alpha+1)Pz = (-\alpha+1)Q$$

- *4)Получили линейное неоднородное уравнение 1-го порядка. Это уравнение решается методом множителей Бернулли.*

  5)Решив уравнение , подставим в его общее решение вместо z(x) выражение $y^{-\alpha+1}$ *, получим общий интеграл уравнения Бернулли.*
- **Уравнение Бернулли можно также решить, не делая замены переменных, а сразу применяя метод множителей Бернулли.**

Пример

- **Найти общее решение уравнения** $y' + xy = (x-1)e^x y^2$

Решение.

Будем искать решение уравнения в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Тогда $u'v + uv' + xuv = (x-1)e^x (uv)^2$.

В левой части последнего уравнения сгруппируем второе и третье слагаемые, которые содержат функцию $u(x)$, **и потребуем, чтобы** $v' + xv = 0$. **Откуда** $v = e^{-\frac{x^2}{2}}$. **Тогда для функции** $u(x)$ **будем иметь следующее уравнение:**

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = (x-1)e^x \cdot e^{-x^2} \cdot u^2 \quad \textbf{или} \quad u' = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}+x} \cdot u^2,$$

оно является уравнением с разделяющимися переменными для функции *u(x)*. Решим его $u^{-2}du = -(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}+x} \cdot dx$,

$$-\frac{1}{u} = -e^{-\frac{x^2}{2}+x} - c, \quad u = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}+x} + c}$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}+x} + c} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x)=0.$$

- Дифференциальные уравнения высших порядков, начальные и граничные условия.

Дифференциальные уравнения высших порядков, начальные и граничные условия.

- Определение. **Уравнением *n*-го порядка** **называется уравнение вида**

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad , \quad (n>1) .$$

- **Задача Коши уравнения n-го порядка ставится следующим образом: найти решение y=y(x) удовлетворяющее начальным условиям**

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

- Определение. **Общим решением ДУ n-го порядка называется функция** $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$**, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство.**

Задание на самостоятельную работу

- **Вспомнить таблицу основных интегралов.**
- **[2] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2005. с. 13-90;**
- **[3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004. с. 446-490.**

Изучить вопрос «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка» и выполнить конспект этого вопроса.

(Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. С.24-26)