Тема 5. Вступ до математичного аналізу

Лекція №11.

Неперервність функції.

Визначні границі.

План

- Неперервність функції у точці.
- Точки розриву та їх класифікація
- Визначні границі
- Еквівалентні величини

Означення 1.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо:

1) ця функція визначена в точці x_1 і в деякому околі точки x_1;
2) границя функції при $x \to x_1$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Означення 2.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Означення

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$ справа (зліва), якщо:

1) $f(x)$ визначена в деякому правому (лівому) напівоколі точки x_1 $[x_1; x_1 + \delta)$ $((x_1 - \delta, x_1])$;

2) $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_1)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_1) \right)$.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу, і крім того, в точці $x = a$ неперервна справа, а в точці $x = b$ - неперервна зліва.

Теорема

Всяка елементарна функція неперервна на тій множині, де вона визначена.

Правило обчислення границь

Щоб обчислити границю в точці $x = x_1$ функції, неперервної в цій точці, треба в функцію, що стоїть під знаком границі, замість аргументу x підставити його граничне значення x_1.

І теорема Вейєрштрасса

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна в замкненому проміжку $[a,b]$, то вона обмежена, тобто існують такі сталі і скінченні числа m і M, що

$$m \le f(x) \le M \text{ при } a \le x \le b.$$

II теорема Вейерштрасса

Якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоч би одна точка $x = x_1$ така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню

$$f(x_1) \geq f(x)$$

(де x - будь-яка інша точка відрізку), і знайдеться хоч би одна точка x_2 така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню

$$f(x_2) \leq f(x).$$

Теорема
(про проміжне значення)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Якщо на кінцях цього відрізка функція приймає нерівні значення $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то яким би не було число μ, що міститься між числами A і B, знайдеться така точка $x = c$, яка міститься між a і b, що $f(c) = \mu$.

Означення.

Точка, в якій порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називається точкою розриву, а сама функція називається розривною в цій точці.

Точки розриву

- **Першого роду** (*односторонні границі існують і скінченні*)
  - **Усувні** ***(односторонні границі рівні)***
  - **Стрибок** ***(односторонні границі нерівні)***
- **Другого роду** (*хоч би одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності*)

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

градусний вимір x	радіанний вимір x	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10^0	0,1745	0,1736	0,9948
5^0	0,0873	0,0872	0,9988
2^0	0,0349	0,0349	1,0
1^0	0,0175	0,0175	1,0

Перша визначна границя

Границя відношення синуса нескінченно малої дуги до самої дуги, вираженої в радіанах, дорівнює 1, тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

x	1	2	10	100	1000	1000 0
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718

Друга визначна границя

Границя функції $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ як
При $x \to \infty$, так і при $x \to -\infty$ дорівнює
 числу e, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Дві нескінченно малі функції α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = g, g \in R, g \neq 0.$$

Нескінченно мала функція β називається нескінченно малою вищого порядку в порівнянні з нескінченно малою функцією α в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Нескінченно мала функція β називається ***нескінченно малою нижчого порядку*** в порівнянні з нескінченно малою функцією α в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

Дві нескінченно малі функції в околі точки $x = x_1$ α і β називаються ***еквівалентними*** (рівносильними), якщо границя їх відношення в цій точці дорівнює 1, тобто

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

таблиця еквівалентних нескінченно малих

якщо $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	

Теорема.

Границя відношення двох нескінченно малих функцій в точці $x = x_1$ дорівнює границі відношення двох еквівалентних до них функцій в точці $x = x_1$

Наслідки першої визначної границі

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2 / 2} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Наслідки другої визначної границі

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x/\ln a}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$$

Завдання на самопідготовку

- Шумко Л.І. , Шумко Л.Г.

Вища математика, курс лекцій, 2005. .