Тема 2. Алгебра як навчальний предмет, цілі вивчення і зміст, вимоги до математичної підготовки учнів. Розвиток поняття про число в курсі алгебри, наближені обчислення. Методика вивчення тотожних перетворень математичних виразів.

Історично алгебра як наука розвивалась з потреб розв'язування рівнянь.

Задачі на розв'язування і дослідження рівнянь вплинули на розвиток поняття числа. Після введення до науки *від'ємних*, *ірраціональних*, *комплексних* чисел загальне дослідження цих числових систем теж стало проблемою алгебри.

Введена в алгебру буквена символіка дала змогу записувати властивості дій над числами в стислій формі, зручній для побудови операцій над буквеними виразами.

Загальні дослідження, що проводились у зв'язку із задачами на розв'язування рівнянь, привели до більш широкого застосування теорій, які відігравали спочатку лише допоміжну роль під час розв'язування рівнянь як у самій математиці, так і за її межами.

Саме ці теорії, до яких належать *теорія груп*, *теорія кілець*, *теорія полів*, *лінійна алгебра*, *теорія Галуа*, *теорія алгебраїчних чисел*, і становлять основний зміст сучасної алгебри.

Отже, у сучасному розумінні **алгебру** можна визначити як науку про системи об'єктів тієї чи іншої природи, в яких встановлено операції, що за своїми властивостями більш-менш схожі на додавання і множення чисел. Ці операції називаються ***алгебраїчними***.

Алгебра класифікує системи об'єктів із заданими на них алгебраїчними операціями за їх властивостями і вивчає різні задачі, які природно виникають в цих системах, включаючи і задачу розв'язування і дослідження рівнянь.

Остання в нових системах об'єктів дістає новий зміст. Наприклад, розв'язком рівняння може бути вектор, матриця, оператор тощо.

- **Основні змістові лінії шкільного курсу алгебри**
  - *Розвиток поняття про число.*
  - *Тотожні перетворення виразів.*
  - *Рівняння і нерівності.*
  - *Вчення про функцію.*
  - *Елементи статистики, комбінаторики і теорії ймовірностей.*

Мета вивчення алгебри в основній школі:

- вдосконалення обчислювальних навичок, поглиблення розуміння буквених виразів, їх видів і тотожних перетворень цілих, дробових, ірраціональних виразів;
- поглиблення і розширення апарату рівнянь і нерівностей як основного засобу математичного моделювання прикладних задач;
- формування уявлення про функцію, вивчення властивостей елементарних функцій;
- ознайомлення з початковими відомостями про статистику;
- введення елементів комбінаторики і теорії ймовірностей.

Знання й уміння, що задають обов'язковий рівень підготовки:

мати уявлення про ірраціональні числа, дійсні числа, наближене значення числа і величини; знати означення квадратного кореня, абсолютної і відносної похибки; правила наближених обчислень без строгого врахування похибок (правила підрахунку правильних цифр);

виконувати арифметичні дії над точними і наближеними значеннями (у тому числі і з використанням мікрокалькулятора), робити прикидку й оцінку точності результатів обчислень;

розуміти суть одночлена, многочлена, алгебраїчного дробу, дробового виразу; знати формули скороченого множення, правила виконання основних видів тотожних перетворень виразів, зазначених у програмі;

виконувати тотожні перетворення цілих і раціональних виразів (у тому числі за допомогою формул скороченого множення), ірраціональних виразів, що містять квадратні корені;

розуміти суть числових нерівностей і знати їх властивості, розуміти суть нерівності зі змінною, лінійного, квадратного, раціонального рівняння і нерівності;

вміти розв'язувати зазначені в програмі види рівнянь і нерівностей, систем рівнянь і нерівностей, текстові задачі методом рівняння;

вміти розрізняти види функцій, зазначених у програмі, виражати на простих прикладах залежності між змінними; знаходити значення функцій, заданих формулою, таблицею, графіком;

будувати і читати графіки функцій, зазначених у програмі;

мати уявлення про початкові поняття статистики і теорії ймовірностей, про способи перерахунку елементів скінченних множин, розуміти смисл перестановок, розміщень і сполук;

розуміти поняття «ймовірність», «частота», вміти підраховувати ймовірності в найпростіших випадках і розв'язувати простіші задачі за допомогою формул комбінаторики.

Розвиток поняття числа в курсі алгебри

Всі відомості про раціональні числа учні дістають з курсу математики 1—6 класів. Перш ніж вводити поняття ірраціонального числа, треба провести бесіду, присвячену ідеї розвитку поняття числа, систематизації й узагальненню відомостей про раціональні числа.

У попередніх класах ви вивчали різні множини чисел. В цьому разі розширення відомої множини чисел виконувалось так, щоб:

1) нова множина чисел містила вже відому множину;

2) смисл дій над числами в старій множині залишається тим самим у новій множині;

3) у новій множині виконувалась дія, яку не можна було виконати в

4) нова множина чисел була такою, щоб не існувало жодної її підмножини, яка містила б попередню множину і задовольняла ті

Кожне раціональне число можна подати у вигляді дробу (частки) $\frac{m}{n}$, де m, n - ціле число, n - натуральне число.

Кожне раціональне число можна зобразити єдиною відповідною точкою на координатній прямій.

Важливо на конкретних прикладах перетворення звичайних дробів на десяткові переконати учнів у тому, що кожний звичайний дріб можна подати у вигляді десяткового дробу - або скінченного, або нескінченного. Всі цілі числа і скінченні десяткові дроби можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу з нулем у періоді. На цьому етапі навчання немає потреби знайомити учнів з правилами перетворення періодичних десяткових дробів на звичайні.

Варто наголосити, що коли не розглядати періодичні дроби з числом 9 у періоді, то кожному десятковому періодичному дробу відповідатиме єдине раціональне число. У таких випадках кажуть, що відповідність між множиною раціональних чисел і множиною нескінченних періодичних десяткових дробів взаємно однозначна.

Розширення множини раціональних чисел можна мотивувати по-різному. Найкраще об'єднати потреби алгебри і геометрії. Традиційно введення нових, ***ірраціональних*** чисел пов'язують із задачею вимірювання відрізків.

У традиційному шкільному курсі математики ірраціональні числа вводились у старших класах. При цьому доводилось твердження про те, що діагональ квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, не сумірна зі стороною. Далі для позначення довжини несумірних відрізків вводились ірраціональні числа, будувалась множина дійсних чисел, вводились порівняння і дії над числами в цій множині.

У сучасних умовах роботи за чинною програмою треба вивчати ірраціональні числа і множину дійсних чисел у 8 класі на доступнішому рівні за коротший час, без багатьох означень і доведень або фактично на рівні уявлень.

Якщо множину раціональних чисел доповнити числами ірраціональними, то одержана розширена множина називається множиною дійсних чисел і позначається буквою R. У множині дійсних чисел виявилась можливою дія добування коренів з раціональних чисел і деякі інші математичні операції.

Оскільки дійсні числа записуються у вигляді нескінченних десяткових дробів (періодичних або неперіодичних), то їх можна порівняти за тими самими правилами, що й десяткові дроби.

Введення ірраціональних чисел показало, що на координатній прямій є точки, яким не відповідає жодне раціональне число. Після введення ірраціональних чисел і утворення множини R дійсних чисел виконується взаємно однозначна відповідність між множиною точок координатної прямої і множиною дійсних чисел. Це означає, що кожній точці координатної прямої відповідає дійсне число (її координата) і, навпаки, кожному дійсному числу відповідає точка на координатній прямій.

З теоретичних курсів відомо, що строга теорія дійсних чисел досить складна. Тому учням 8 класу дають лише спрощені уявлення про цю множину. Щодо виконання чотирьох арифметичних дій над дійсними числами, то учням досить сказати, що в цій множині виконуються всі арифметичні дії, крім ділення на нуль. Тільки коли хоча б одне з чисел є ірраціональним, виконують дії над їхніми наближеними значеннями, взявши попередньо ці наближення з однаковою кількістю десяткових знаків. Можна на прикладі проілюструвати учням додавання, або віднімання двох ірраціональних чисел. Наприклад,

$$\sqrt{2} + \pi \approx 1,414 + 3,142 = 4,556.$$

Якщо треба обчислити цю суму точніше, то додають наближені значення доданків, взяті з більшою кількістю десяткових знаків.

Вирази та їх перетворення

Вивчення різновидів виразів і перетворення їх забирає в курсі алгебри значну частину навчального часу. Це не дивно, оскільки перетворення виразів є основою для розв’язування рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей, обчислення значень буквених виразів. Вони широко використовуються в диференціальному й інтегральному численні.

З найпростішими числовими і буквеними виразами учні стикались в 1-6 класах, вивчали найпростіші перетворення виразів за законами арифметичних дій. У курсі алгебри постає завдання на основі вже здобутих знань і умінь систематизувати, поглибити і розширити знання, навички й уміння учнів про вирази та їх перетворення, навчити цілеспрямовано використовувати їх під час виконання різних навчальних задач (спрощенні виразів, розв'язуванні рівнянь нерівностей, доведенні тотожностей та ін.).

- Програма передбачає
  - 7 клас
    - повторити й уточнити відомості про числові і буквені вирази, формули;
    - ввести поняття про тотожно рівні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразів;
    - вивчаються тотожні перетворення цілих виразів (одночленів і многочленів), формули скороченого множення і застосування їх до перетворення многочленів;
  - 8 клас
    - вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових виразів і перетворень ірраціональних виразів, пов'язаних з квадратним коренем;
    - розширюється поняття степеня;
  - 9 клас
    - тотожні перетворення цілих і дробових виразів використовуються для розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь;
    - Вивчається розкладання квадратного тричлена на множники

Поняття теми.

До провідних понять теми належать такі поняття: *«числовий вираз»*, *«вирази зі змінними»* або *«буквений вираз»*, *«тотожно рівні вирази»*, *«тотожність»*, *«тотожне перетворення виразу»*, *«одночлен»*, *«многочлен»*, *«дріб»*, *«дробовий вираз»*, *«раціональні вирази»*.

З поняттями *«вираз»*, *«значення виразу»* і відповідними термінами учні стикались ще в початковій школі, де вони мали справу в основному з числовими виразами. З простими буквеними виразами вони теж стикалися. У 5-6 класах поглиблено відомості про числові і буквені вирази; розглянуто найпростіші тотожні перетворення без введення відповідного терміна - йшлося про *«спрощення виразів»*.

У шкільному курсі математики означення поняття *«вираз»* давати недоцільно, бо сформулювати таке означення важко. Поняття про вирази (числові і буквені), тобто вирази, зі змінною, формуються описово на конкретних прикладах. Учні повинні вміти розрізняти, розпізнавати числові і буквені вирази. Щодо окремих видів виразів, то вони вводяться поступово, із вивченням програмового матеріалу. Важливі при цьому формування усної алгебраїчної мови, правильна орієнтація у різновидах виразів і їхні назви. Учні повинні усвідомити, що назва виразу визначається не тим виглядом, до якого його можна звести, а тим, який він має при його задані.

Поняття тотожно рівних виразів, тотожності вводяться вперше до курсу алгебри 7 класу на рівні означень.

Поняття тотожних перетворень виразів пояснюється описово на прикладах. Досвід показує, що поняття тотожно рівних виразів і тотожних перетворень виразів недоцільно розривати. Природніше ці поняття вводити на одному уроці, пов'язавши з потребою обчислення виразу.

Поняття і відповідне означення тотожності доцільно ввести на наступному уроці. Слід мати на увазі, що означення тотожності в 7 класі вводиться на множині цілих виразів.

У 8 класі це поняття розширюється і дається нове означення тотожності як рівності, правильної не за будь-яких значень змінних, а лише за всіх допустимих значень змінних, що входять до її складу.

Поняття одночлена формується конкретно-індуктивним методом, шляхом розгляду прикладів і введення терміна «одночлен».

Важливо, щоб учні усвідомили суттєву ознаку одночленів, за якою вони відрізняються від інших видів виразів: одночлени є добутком чисел, змінних і степенів змінних.

Несуттєвою ознакою одночленів є те, яким буде числовий множник. Він може бути будь-яким числом - цілим, дробовим, додатним, від'ємним, може дорівнювати одиниці. У такому разі одиниця перед буквеними множниками не записується.

Несуттєвим є і те, скільки змінних і їх степенів входить в одночлен і якими буквами вони позначені.

Суттєвим є те, що ця кількість змінних скінчена. Одночленом може бути число. Наприклад, 5; -1/2 ; 2,95.

Поняття стандартного вигляду одночлена, степеня одночлена теж вводяться описово на конкретних прикладах.

Поняття многочлена не викликає в учнів труднощів і означається як сума одночленів.

Практика показує, що складнішими для сприймання учнями 8 класу є поняття «цілий вираз», «дробовий вираз» і «дріб». Пов'язане це в першу чергу з тим, що термін «цілий вираз» в учнів асоціюється з відомим їм поняттям цілого числа, а «дріб» - з відомим їм поняттям звичайного дробу як числа. Насправді те відоме учням поняття дробу є лише формою запису числа (числового виразу).

У 8 класі доцільно уточнити, узагальнити і розширити уявлення учнів про вирази. Почати слід з поняття раціональних виразів: раціональними називають вирази, які утворені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення.

- Раціональні вирази
- цілі
- дробові

Цілими називаються вирази, складені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення і ділення на число, відмінне від нуля.

Дробовими раціональними виразами називаються раціональні вирази, які містять дію ділення на змінну або на вираз зі змінною.

Коли учні ознайомляться з ірраціональними, тригонометричними і логарифмічними виразами, можна ввести більш загальне поняття - дріб. Дробом називається вираз вигляду a/b, де a і b - будь-які числові вирази або вирази зі змінними.

Вивчення тотожних перетворень цілих виразів.

Слід мати на увазі, що перетворення в курсі алгебри розподіляються, на два класи:

1) тотожні перетворення - перетворення виразів;

2) рівносильні перетворення - перетворення формул.

У випадку, коли виникає потреба у спрощенні однієї частини формули, в ній виділяється вираз, який перетворюється (використовується певне тотожне перетворення). Відповідний предикат в цьому разі не змінюється. Наприклад, 15x – 6x = 36; 9x = 36.

Шкільна практика свідчить про те, що при вивченні різних видів тотожних перетворень доцільним виявляється алгоритмічний підхід. Це означає, що вивчення кожного з видів перетворень має завершуватись (або починатись) формулюванням правила (алгоритму) перетворення.

Першим, новим для учнів перетворенням, з яким вони стикаються в курсі алгебри 7 класу, є зведення одночленів до стандартного вигляду. Мотивується це перетворення потребою спрощення одночлена, одержаного при множенні, утворенні добутку двох одночленів. Важливо при цьому підкреслити теоретичну основу виконання перетворення: у разі зведення одночлена до стандартного вигляду використовуються переставний, сполучний закони множення і правило множення степенів з однаковою основою.

Після розгляду кількох прикладів варто сформулювати правило: щоб привести одночлен до стандартного вигляду, треба перемножити числові множники і степені змінних з однією основою; одержане число поставити в добутку на першому місці.

Вивчення множення одночленів завершується розв'язуванням кількох вправ на виконання оберненого перетворення - подання даного одночлена у вигляді добутку двох одночленів, з яких один заданого вигляду. Наприклад, представити одночлен - $48a^2b^3c$ у вигляді добутку двох одночленів, з яких один є - $6ab^2$.

До основних видів тотожних перетворень многочленів належать: зведення многочленів до стандартного вигляду, додавання і віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки), множення многочлена на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом групування).

Зведення многочлена до стандартного вигляду виконується зведенням подібних членів. Це перетворення фактично відоме учням 5-6 класів, але там його назва інша - зведення подібних доданків. Важливо, щоб учні могли пояснити теоретичну основу цього перетворення і правило його виконання (щоб звести подібні члени, треба додати їх коефіцієнти і приписати до одержаного числа співмножником спільну буквену частину подібних членів).

Додавання і віднімання многочленів являє собою позначення цих дій і зведення подібних членів. При цьому учні повинні добре знати правило відкриття дужок, перед якими стоїть знак «+» або «-».

У курсі алгебри вивчається й обернене перетворення. Тому учні мають знати правило взяття многочлена в дужки, якщо перед ними стоїть знак «+» або «-».

Множення одночлена на многочлен - теж фактично відоме учням перетворення, з яким вони стикалися в 5-6 класах, вивчаючи розподільний закон множення числа стосовно додавання. Труднощі у сприйманні виникають в окремих учнів під час вивчення оберненого перетворення - розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки. При вивченні цього тотожного перетворення важливо мотивувати потребу в ньому.

Практика свідчить про доцільність виділення спеціального правила відшукання спільного множника членів многочлена. Для цього треба:

- 1) знайти найбільший спільний дільник всіх коефіцієнтів членів;
- 2) помножити його на степені змінних з найменшим показником, з яким вони входять до всіх членів многочлена

Дякую за увагу!