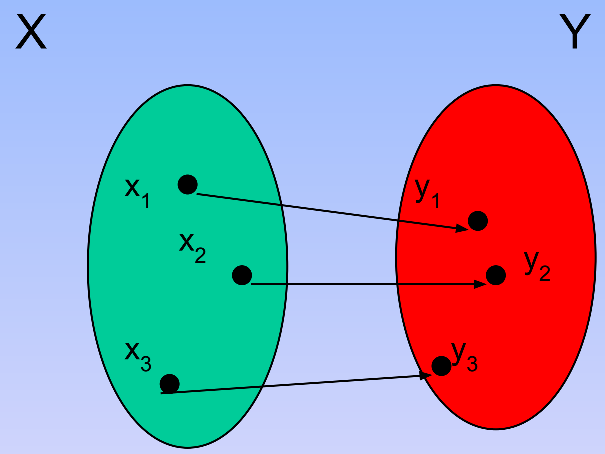
# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 1.1

# Визначення функції




- Якщо кожному елементу *x* з множини *X* по визначеному закону чи правилу ставиться у відповідність один і тільки один елемент *y* з множини *У*, то говорять що на множині *X* задана *функція y=f(x)*.
- Змінна *x* називається *незалежною змінною* або *аргументом*,
- *y – залежною*, або *значенням функції*.

# Способи задання функції

- *Табличний спосіб.*
- *Графічний спосіб .*
- *Аналітичний* спосіб задання функції (за допомогою формули). У загальному вигляді: $y = f(x)$ *Наприклад:*
- - степенева функція $y = x^n$ , ;
- - лінійна функція $y = ax + b$ ;
- - показникова функція $y = a^x$ ;
- - логарифмічна функція $y = \log_a x$ ;
- - тригонометричні функції:

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = tgx; \quad y = ctgx$$

# Властивості функцій

1. Множина усіх значень *X* називається ***областю визначення*** функції ***D(f),*** а множина значень *У*, називають ***множиною значень функції E(f).***
2. Функція , називається ***парною***, якщо для будь-якого значення аргументу *x* з області визначення функції виконується рівність:

$$f(-x)=f(x)$$

Функція , називається ***непарною***, якщо для будь-якого значення *x* з області визначення функції виконується рівність:

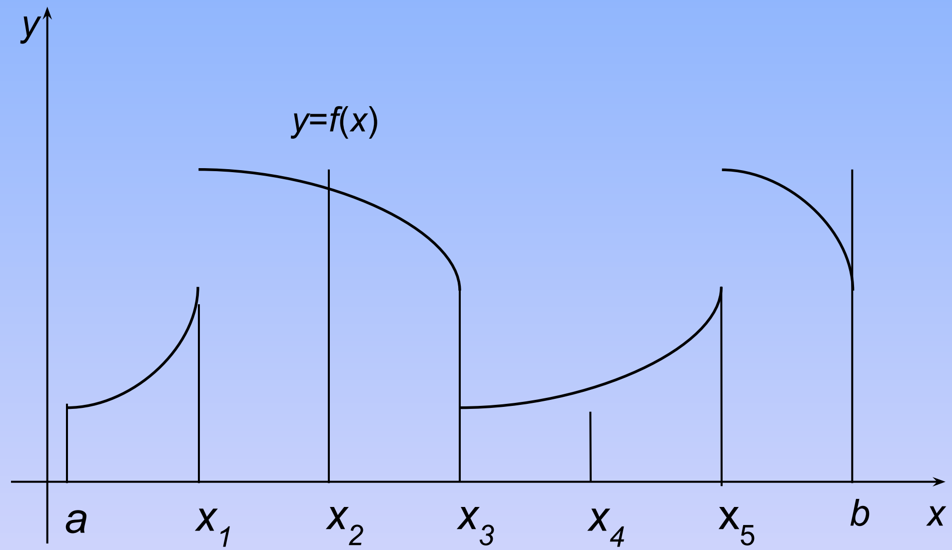
$$f(-x)=-f(x)$$

3. Функція називається ***монотонно зростаючою*** на всій області визначення (чи на інтервалах), якщо для будь-якого значення *x* з області визначення функції (чи з інтервалу) виконується нерівність

$$(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)>f(x_2))$$

Якщо за тих же умов виконується нерівність: $(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)<f(x_2))$ тоді функція називається ***монотонно спадною.***

# Властивості функцій



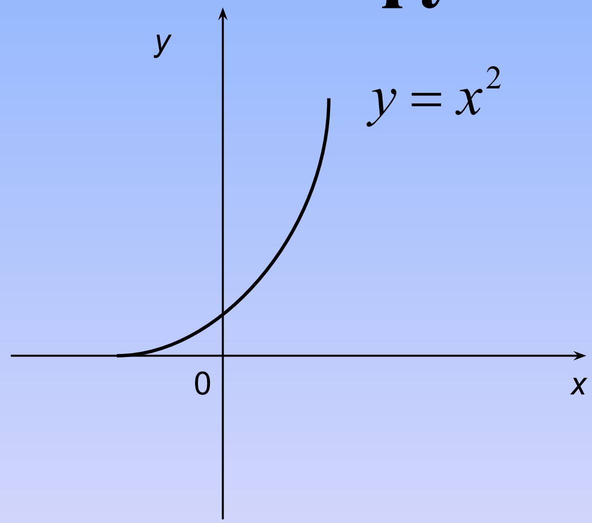

На інтервалах $]a; x_2[$, $]x_4; b[$ функція *y=f(x)* зростає, на інтервалі $]x_2; x_4[$ спадає;

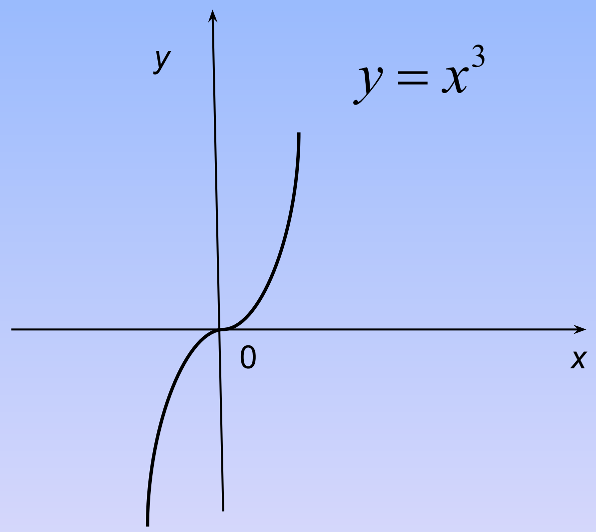
в точках $x = x_2$ - максимум, $x = x_4$ - мінімум;

точки $x = x_1$, $x = x_3$, $x = x_5$ - точки перегину.

# Елементарні функції

**Степенева функція** $y = x^n$



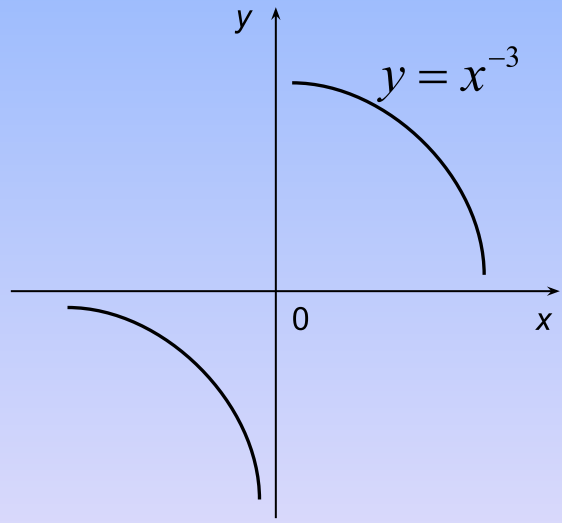



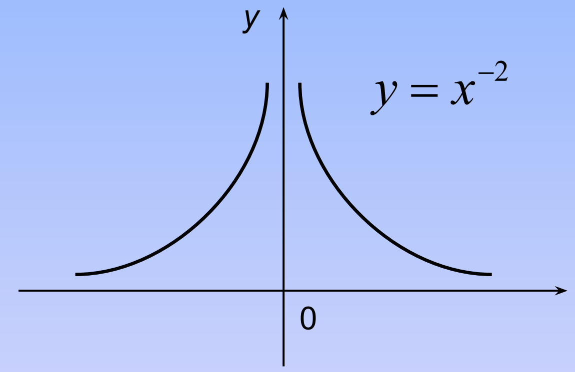

Степенева функція $y=x^n$, де $n$ – парне натуральне число.

Степенева функція $y=x^n$, де $n$ – непарне натуральне число.

# Елементарні функції

**Степенева функція:** $y = x^n$



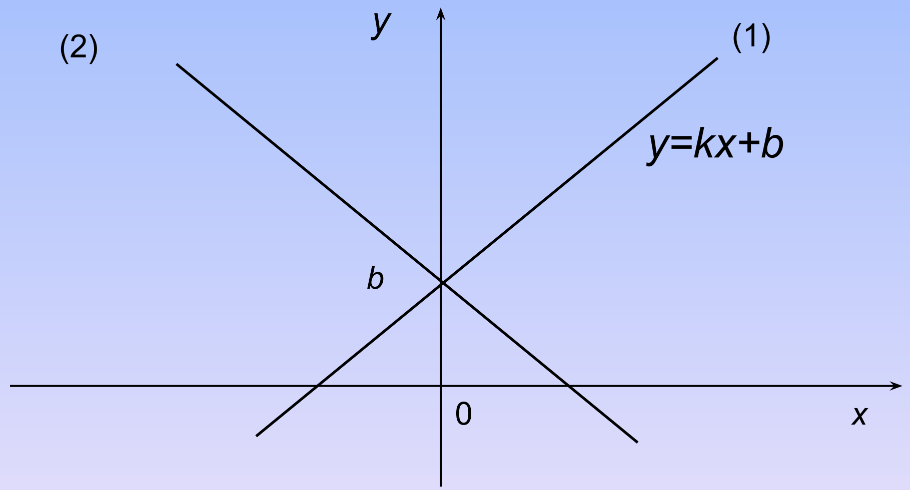




Степенева функція $y=x^n$,
де $n=-(2k+1)$,

Степенева функція $y=x^n$,
де $n=-2k$

# Елементарні функції

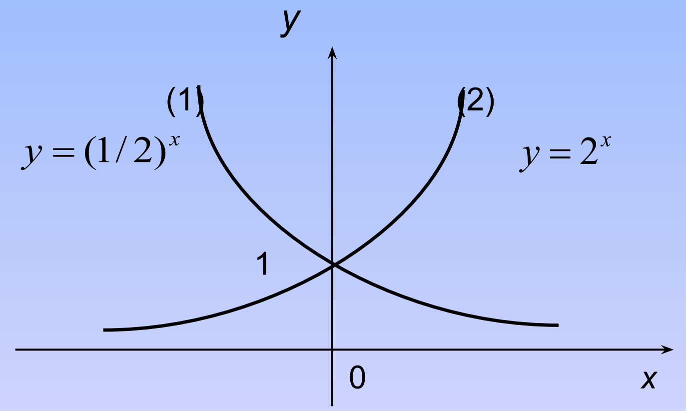
**Лінійна функція**: $y = kx + b$ , де $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}$ - будь-які постійні числа.




Графік функції *y=kx+b* перетинає вісь *Ox* в точці *x=-k/a*, вісь *Oy* в точці *y=b*.
Два випадки: (1) *a*>0; (2) *a*<0.

# Елементарні функції

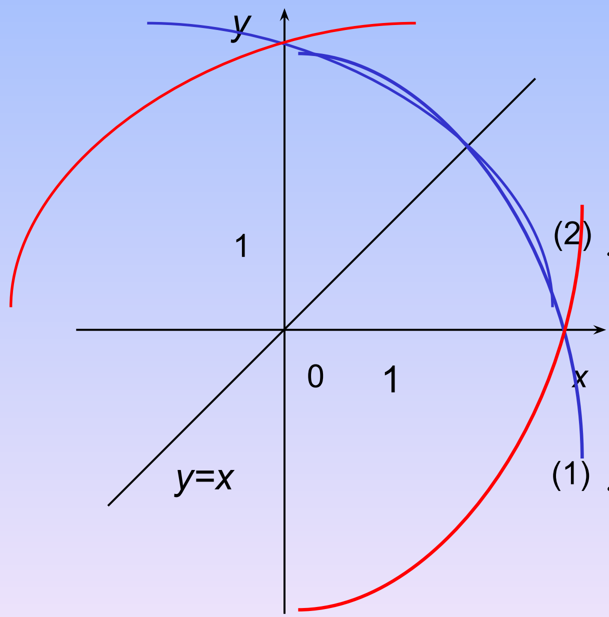
**Показникова функція**: $y = a^x$, де ***a*** - додатне стале число, відмінне від одиниці .




Графік функції $y = a^x$ .
Випадки: (1) 0<*a*<1, (2) *a*>1.

# Елементарні функції

**Логарифмічна функція**: $y = \log_a x$, де - ***a*** додатне стале число.

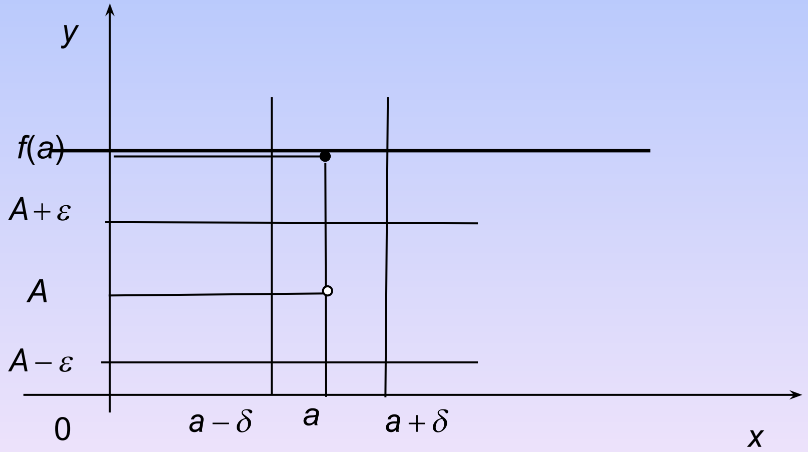



Графіки функції $y = \log_a x$
(1) 0<*a*<1, (2) *a*>1.

# *ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ*

Число $A$ називається ***границею функції f(x)*** при $x$, що прямує до $a$ ($x \to a$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке мале число $\delta > 0$, що для всіх $x$, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Границю функції записують у вигляді:




$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Графічне зображення значення функції ***f(a)*** та границі функції ***A*** в точці *a.*

# Теореми про границі функції

$$1)\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$2)\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$3)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad,\left(\lim_{x\to a}g(x)\neq 0\right)$$

$$4)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$5)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e=2{,}71828....$$

# Приклади визначення границі функції

№1

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}=\lim_{x\to 6}\frac{6^2-8\cdot 6+12}{6^2-7\cdot 6+6}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-2)}{(x-6)(x-1)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-2}{x-1}=\frac{6-2}{6-1}=\frac{4}{5}$$

№2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-5}{3x^2+2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(3+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}=\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{1-\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty^2}}{3+\frac{2}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}=\frac{1}{3}$$

№3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x\cos x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=5\cdot 1\cdot 1=5.$$