Теория механизмов и машин

Лекция 5
Кинематика зубчатых механизмов.

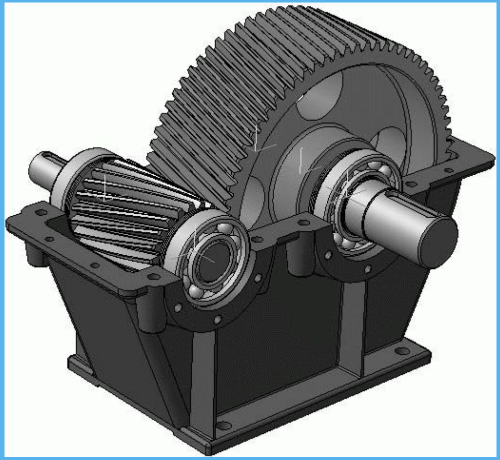
Лектор: ассистент каф. 202
Светличный Сергей Петрович
ауд. 246 м.к

Основные понятия и определения.

- **Зубчатые механизмы** – это механизмы, содержащие в своем составе высшие кинематические пары (зубчатые зацепления) и предназначенные для передачи вращательного движения от входного звена механизма к выходному.

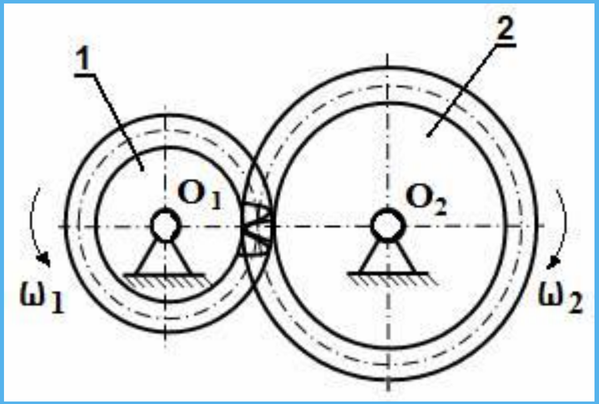
Основные понятия и определения.

- Если скорость вращения ведущего зубчатого колеса больше скорости вращения ведомого, то такой зубчатый механизм называется **редуктором** .
- При обратном соотношении между скоростями вращения ведущего и ведомого колес механизм называется **мультипликатором**.



Основные понятия и определения.

- **<u>Простая зубчатая передача</u>** – это трехзвенный механизм, в котором два подвижных звена являются зубчатыми колесами, соединенными с неподвижным звеном механизма (со стойкой) с помощью вращательной кинематической пары пятого колеса.

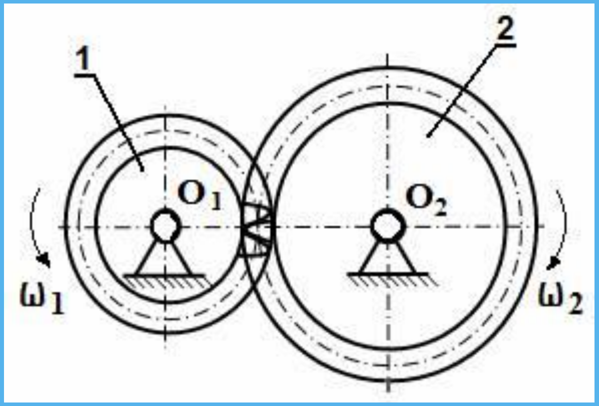


Основные понятия и определения.

- Колесо зубчатой передачи, имеющее меньшее количество зубьев, называется **шестерной**, а большее – **колесом**.

Основные понятия и определения.

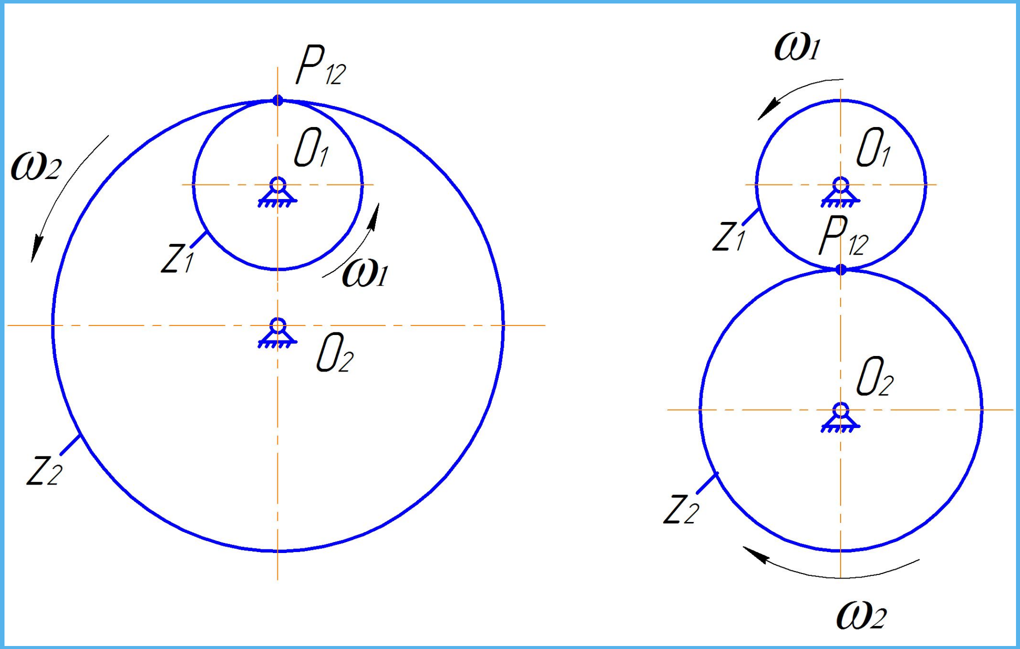
- Основной и единственной кинематической характеристикой зубчатой передачи является ее **передаточное отношение**, под которым понимается отношение угловых скоростей вращения ведущего (1) и ведомого (2) колес



$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Основные понятия и определения.

- Различают зубчатые передачи внутреннего (слева) и внешнего (справа) зацеплений. При внутреннем зацеплении шестерня и колесо вращаются в одном направлении, т.е. $U_{12} > 0$, а при внешнем зацеплении $U_{12} < 0$



Основные понятия и определения.

- При изображении зубчатых колес в плане принято представлять их в виде двух соприкасающихся дисков, обкатывающихся друг относительно друга без проскальзывания.
- Радиальные размеры этих дисков соответствуют радиусам так называемых **<u>начальных окружностей</u>** зубчатых колес и r_{w1} r_{w2}
- Точка соприкосновения колес P_{12} называется **<u>полюсом зацепления</u>**, который делит межцентровое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям вращения зубчатых колес.

Основные понятия и определения.

- Полюс зацепления является мгновенным центром скоростей колес в их относительном движении, а начальные окружности – геометрическим местом мгновенных центров скоростей в относительном движении.
- Так как линейные скорости точек колес z_1 и z_2, совпадающих с полюсом зацепления, одинаковы, то:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{w_2}}{r_{w_1}}$$

Передаточное отношение.

- При аналитическом определении передаточного отношения простой зубчатой передачи справедлива формула:

$$U_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

где знак “+” соответствует зубчатой передаче с внутренним зацеплением, а знак “–” – передаче с внешним зацеплением колес.

Графический метод.

- в масштабе $\mu_l\left[\frac{ì}{ì\ ì}\right]$ вычерчиваются колеса зубчатой передачи в той плоскости, в которой находятся их оси вращения, а на произвольную вертикаль (уу) проецируются оси обоих колес O_1, O_2 и полюс зацепления p_{12} .

- Изображая линейную скорость полюса зацепления произвольным отрезком $(p_{12}a)$ и соединяя точку «а» с точками линиями O_1, O_2 , получают картину распределения линейных скоростей 1 и 2 по радиусам соответствующих колес в некотором масштабе $\mu_v\left[\frac{ì\ /\ ñ}{ì\ ì}\right]$

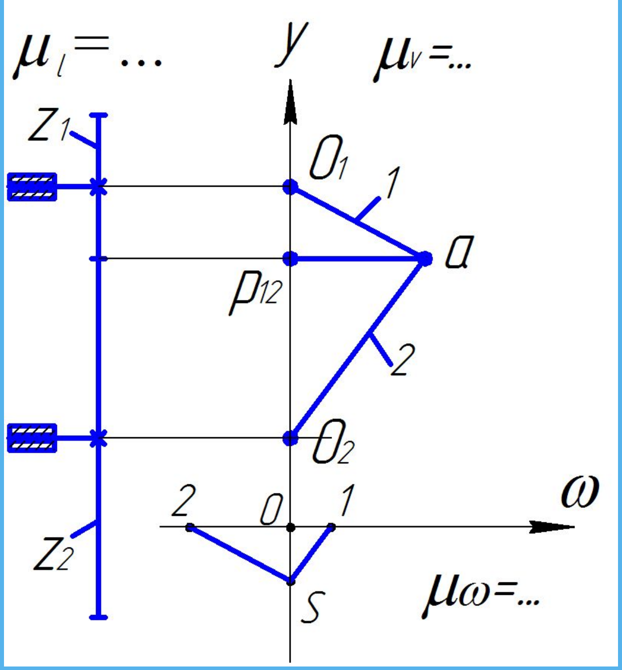
Графический метод.

- После этого строят план угловых скоростей механизма. Для этого проводят горизонтальную ось угловых скоростей пересекающую вертикаль в некоторой точке 0.
- Отложив от точки 0 по вертикали произвольный отрезок (OS), получают полюс S , из которого проводят лучи, параллельные законам 1 и 2 распределения линейных скоростей по телам зубчатых колес.
- Отрезки, отсекаемые этими лучами на оси будут пропорциональны угловым скоростям колес:

Графический метод.

- По направлениям отрезков можно судить о направлениях вращения колес

$$U_{12} = \frac{(\overline{01})}{(\overline{02})} = -\frac{(01)}{(02)}$$



- Связь масштабов:

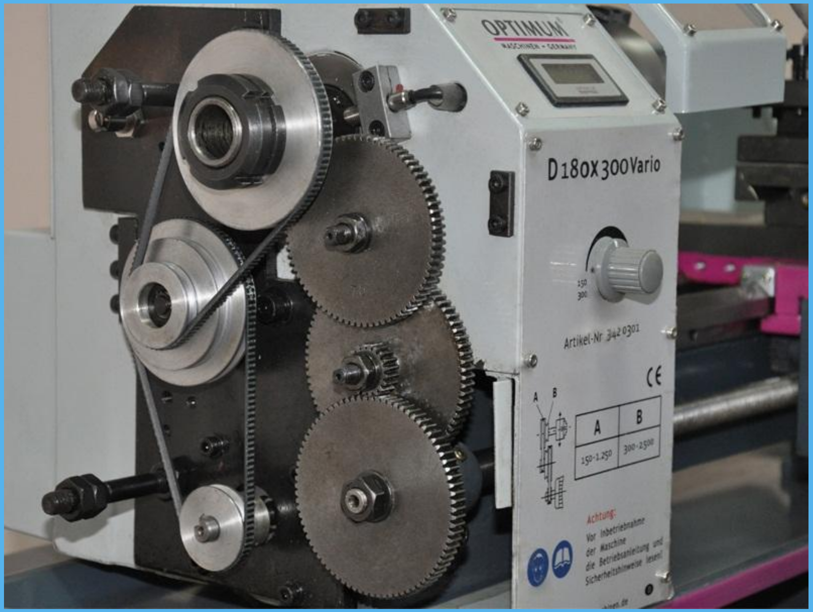
$$\mu_{\omega} = \frac{\mu_{v}}{(OS)\cdot\mu_{l}} \cdot \left[\frac{\text{ì /c}}{\text{ìì}}\right]$$

Кинематика сложных зубчатых механизмов

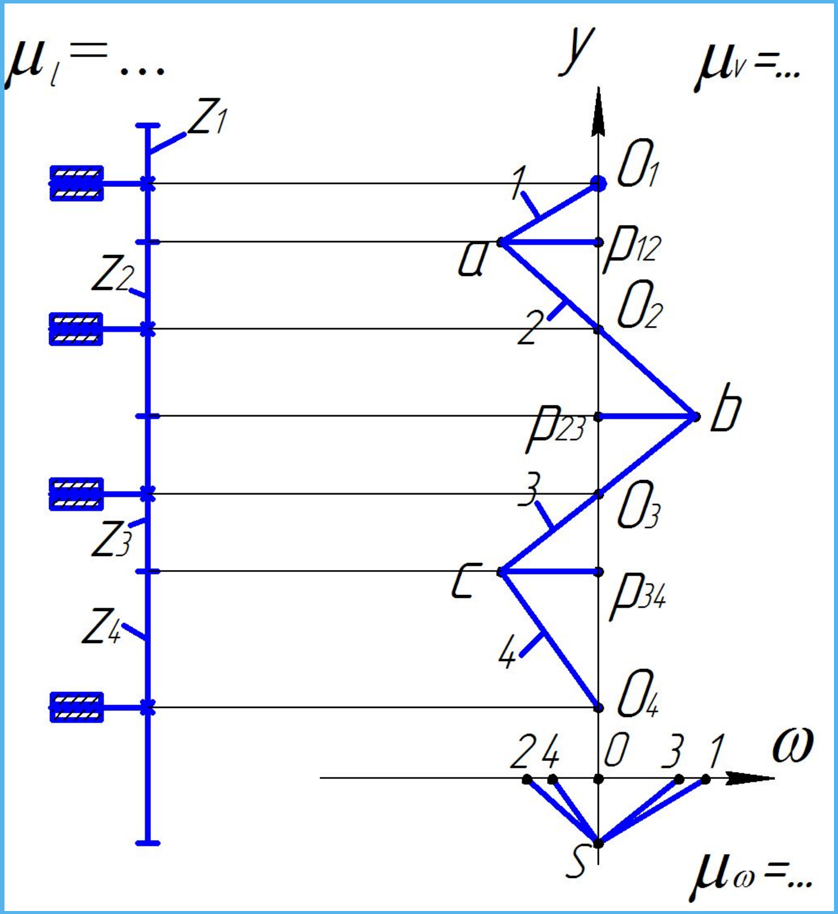
- Зубчатые механизмы, содержащие более двух зубчатых колес, относятся к сложным и подразделяются на два основных вида:
- механизмы, зубчатые колеса которых имеют неподвижные оси вращения (**рядные и кратные зубчатые механизмы**);
- механизмы, в состав которых входят зубчатые колеса с подвижными осями вращения (**дифференциальные и планетарные механизмы**).

Рядные зубчатые механизмы

- Под **<u>рядной передачей </u>**понимается такая сложная зубчатая передача, в которой все зубчатые колеса, кроме первого и последнего, участвуют в двух зубчатых зацеплениях, а оси вращения всех колес неподвижны.



Передаточное отношение рядного механизма



$$u_{14} = -\frac{(01)}{(04)}$$

Передаточное отношение рядного механизма

- Для определения передаточного отношения аналитическим методом, необходимо его выразить через числа зубьев колес механизма. Так как $u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}$ то разделив и умножив правую часть равенства на угловые скорости промежуточных колес z_2 и z_3, получим:

$$u_{14} = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3}{\omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4}$$

Так как частные передаточные отношения легко выразить через числа зубьев, т.е

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \qquad u_{23} = -\frac{z_3}{z_2}; \qquad u_{34} = -\frac{z_4}{z_3}$$

Передаточное отношение рядного механизма

- то общее передаточное отношение

$$u_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$

- Передаточное отношение рядного механизма не зависит от числа зубьев промежуточных колес z_2 и z_3
- Промежуточные колеса рядного механизма называют паразитными.

Передаточное отношение рядного механизма

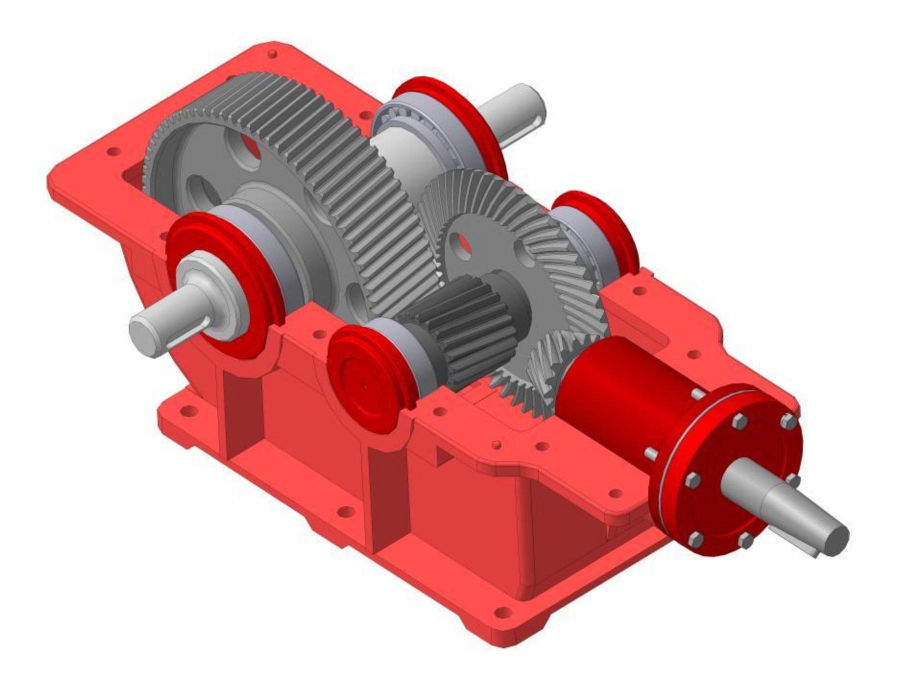
- Передаточное отношение рядного механизма, содержащего «n» зубчатых колес, зависит только от чисел зубьев первого и последнего колес

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_n}{z_1}$$

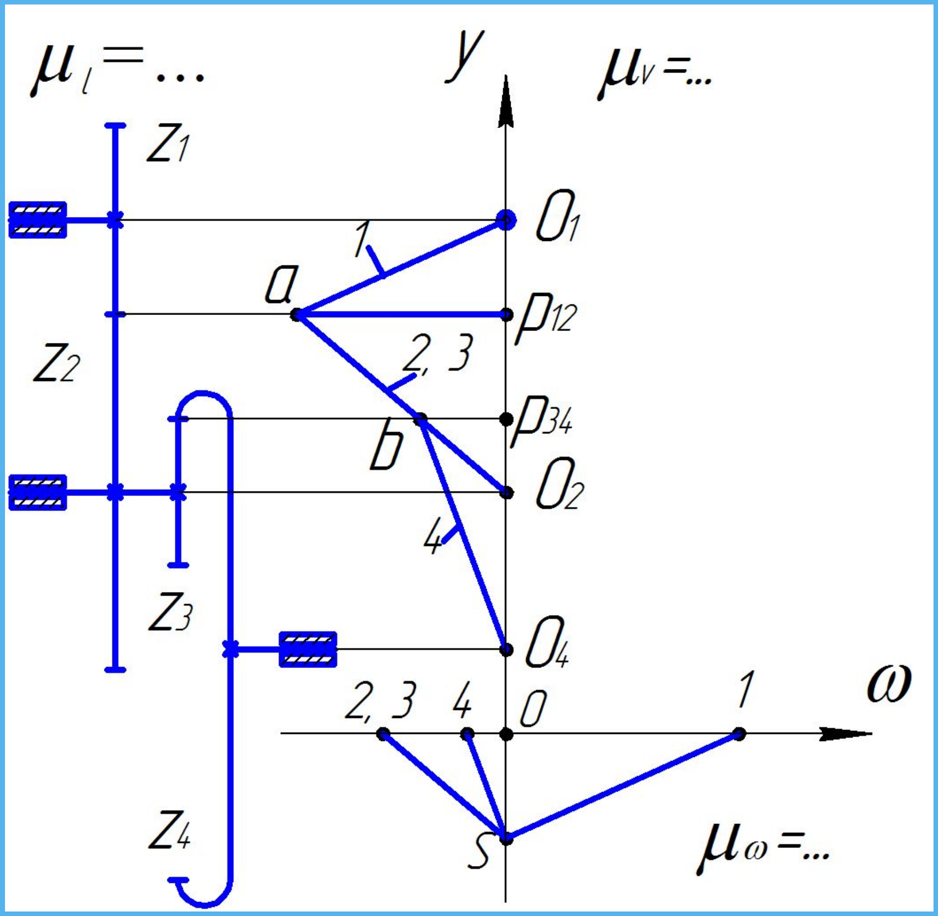
- где m – количество внешних зацеплений в кинематической цепи от 1-го до n-го зубчатого колеса.

Кратные зубчатые механизмы

- **Кратные (многоступенчатые) зубчатые механизмы** – механизмы, содержащие четное количество зубчатых колес с неподвижными осями вращения, каждое из которых участвует лишь в одном зацеплении.



Передаточное отношение кратного механизма



$$u_{14} = \frac{(\bar{0}\,\bar{1})}{(\overline{04})} = -\frac{(01)}{(04)}$$

Передаточное отношение кратного механизма

- Определим передаточное отношение аналитическим методом, учитывая, что $\omega_2 = \omega_3$

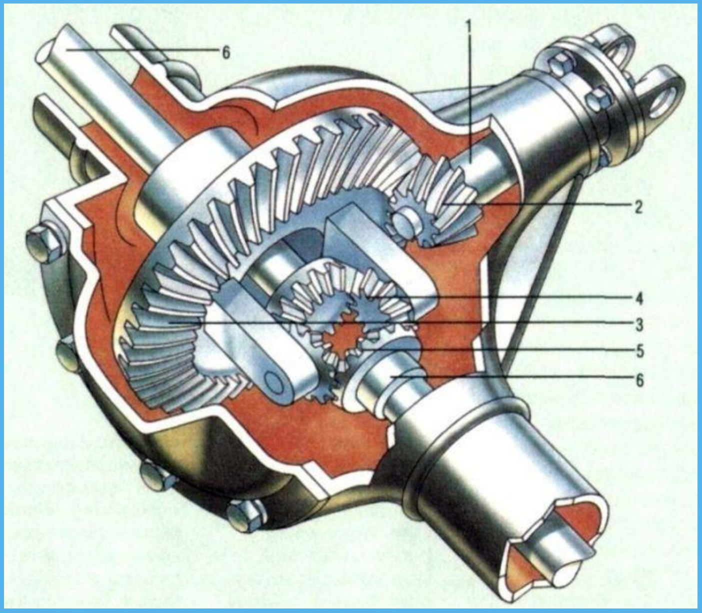
$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

- В общем случае, когда кратный зубчатый механизм содержит «n» ступеней редукции и в два раза большее количество зубчатых колес, его передаточное отношение

$$u_{1,2n} = (-1)^m \frac{z_2 z_4 z_6 \dots z_{2n}}{z_1 z_3 z_5 \dots z_{2n-1}}$$

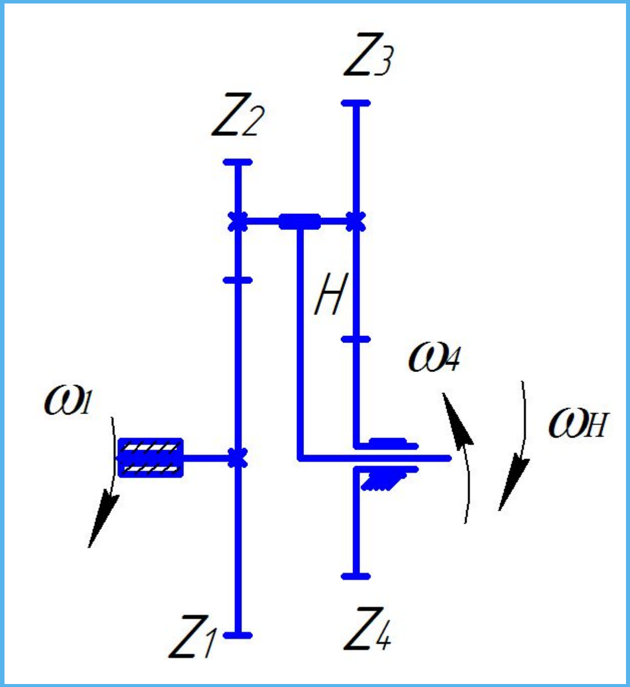
Дифференциальные зубчатые механизмы

- **Дифференциальные механизмы** – сложные зубчатые механизмы, в состав которых входят колеса с подвижными осями вращения, а степень подвижности механизма больше единицы.



Дифференциальные зубчатые механизмы

- Рассмотрим дифференциальный механизм, образованный четырьмя цилиндрическими зубчатыми колесами.



Дифференциальные зубчатые механизмы

- Оси вращения колес z_1 и z_4 неподвижны, а оси колес z_2 и z_3 движутся вместе с вращающимся водилом Н, в котором они расположены.
- Блок колес $z_2 - z_3$ совершает сложное движение, складывающееся из вращательного движения вокруг собственной оси и вращения вместе с водилом вокруг центральной оси механизма.
- Колеса $z_2 - z_3$ называются **сателлитами.**
- Дифференциальные механизмы выполняются, как правило, многосателлитными.
- Зубчатые z_1 и z_4 колеса называются центральными.

Формула Виллиса

- Установим связь между абсолютными угловыми скоростями ω_1, ω_2 и ω_H в дифференциальном механизме. Применим метод инверсии, заключающийся в том, что всем его звеньям сообщим дополнительные вращения с угловой скоростью $(-\omega_H)$.
- Тогда новые угловые скорости вращения звеньев будут равны сумме их действительных угловых скоростей и скорости дополнительного вращения, т.е.

$$\omega_1' = \omega_1 - \omega_H; \omega_4' = \omega_4 - \omega_H; \omega_H' = \omega_H - \omega_H = 0$$

Формула Виллиса

- Водило H станет неподвижным, а дифференциальный механизм превратится в двухступенчатый кратный механизм, для которого передаточное отношение от одного центрального колеса (z_1) к другому (z_4) определяется по следующей зависимости:

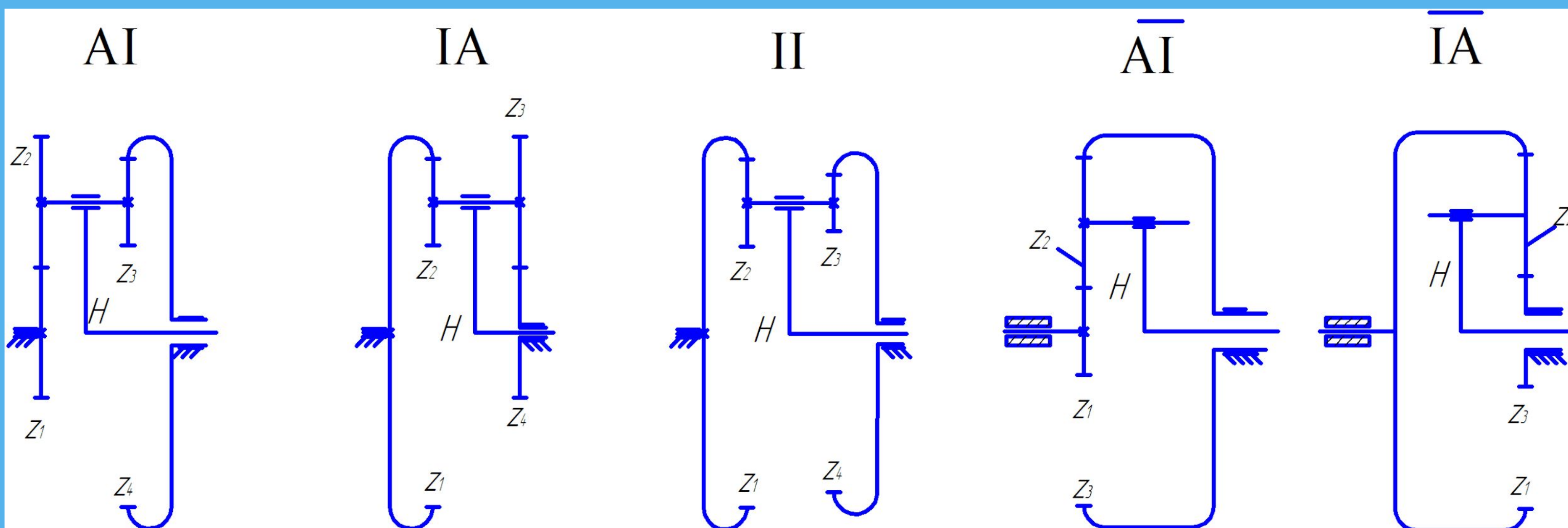
$$\frac{\omega_1'}{\omega_4'} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \qquad \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Формула Виллиса

- Отметим, что дифференциальный механизм с остановленным по методу инверсии водилом называется **приведенным механизмом**.

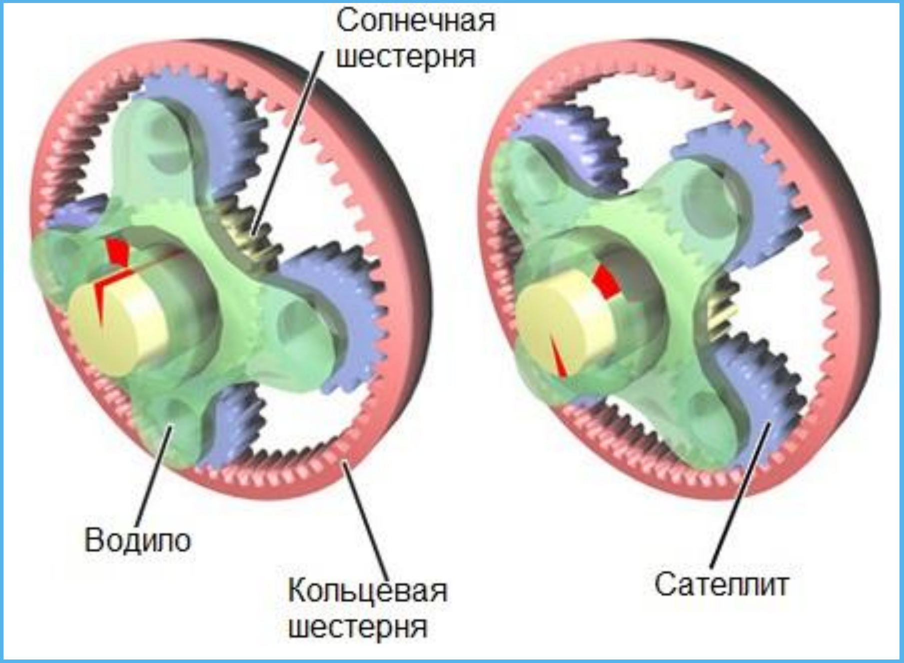
$$\omega_1 = \omega_H \left(1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\right) + \omega_4 \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Схемы дифференциальных механизмов



Кинематика простых и замкнутых планетарных механизмов.

- В отличие от дифференциальных планетарные механизмы имеют одну степень подвижности и могут быть получены из дифференциальных путем введения в их кинематическую цепь дополнительной связи.



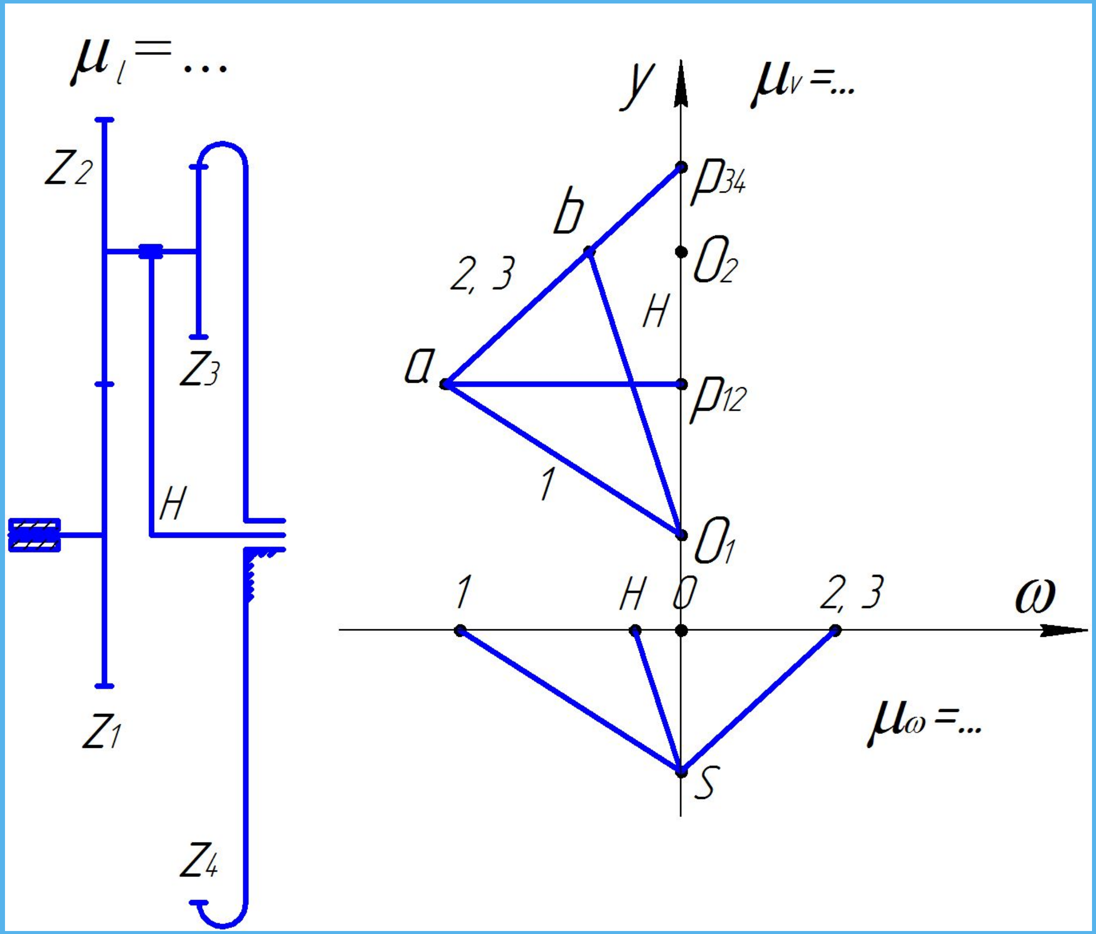
Кинематика простых и замкнутых планетарных механизмов.

- Это может быть выполнено двумя путями:
- остановкой, т.е. жестким соединением со стойкой, одного из центральных колес дифференциального механизма; такие планетарные механизмы принято называть **простыми**;
- установлением дополнительной кинематической связи между какими-либо двумя звеньями дифференциального механизма, имеющими неподвижные оси вращения, с помощью дополнительного зубчатого механизма, образующего цепь замыкания; такие планетарные механизмы называют **замкнутыми**.

Кинематика простых планетарных механизмов.

- Рассмотрим планетарный механизм, полученный из дифференциального, схемы AI путем остановки центрального колеса (z_4),и выполним его кинематическое исследование графическим и аналитическим методами.

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.



$$u_{1H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{(01)}{(OH)}$$

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.

- Для аналитического определения передаточного отношения планетарных механизмов используется метод инверсии. Чтобы вывести аналитическое выражение для передаточного отношения планетарного механизма, необходимо:
- записать формулу Виллиса как передаточное отношение между центральными колесами при “остановленном” водиле, представив левую часть равенства как отношение таких угловых скоростей центральных колес, которые они приобретают после сообщения всему механизму дополнительного вращения с угловой скоростью $(-\omega_H)$

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.

- а правую – в виде соотношения чисел зубьев центральных колес и сателлита, которое соответствует передаточному отношению “приведенного” механизма при неподвижном водиле;
- числитель и знаменатель левой части полученного равенства разделить почленно на угловую скорость того звена механизма, к которому отыскивается передаточное отношение.

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.

- После выполнения этих операций одно из отношений угловых скоростей, содержащихся в левой части равенства, является искомой величиной, а все другие либо принимают вполне определенные численные значения (0 или 1) (в простых планетарных механизмах), либо легко выражаются через числа зубьев колес цепи замыкания.

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.

- Запишем формулу Виллиса для механизма схемы AI

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

- где правая часть представляет собой передаточное отношение кратного механизма, образованного колесами $z_1 - z_2 - z_3 - z_4$ при “остановленном” водиле.
- Так как нас интересует передаточное отношение от колеса z_1 к водилу H, то числитель и знаменатель левой части равенства делим на угловую скорость ω_H

Передаточное отношение простого планетарного механизма схемы AI.

- Тогда получим

$$\frac{\dfrac{\omega_1}{\omega_H}-1}{\dfrac{\omega_4}{\omega_H}-1}=-\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

  Отношение $\frac{\omega_1}{\omega_H}=U_{1H}^{(4)}$ - искомая величина, а $\frac{\omega_4}{\omega_1}=0$, т. к колесо неподвижно.

- Окончательно получим:

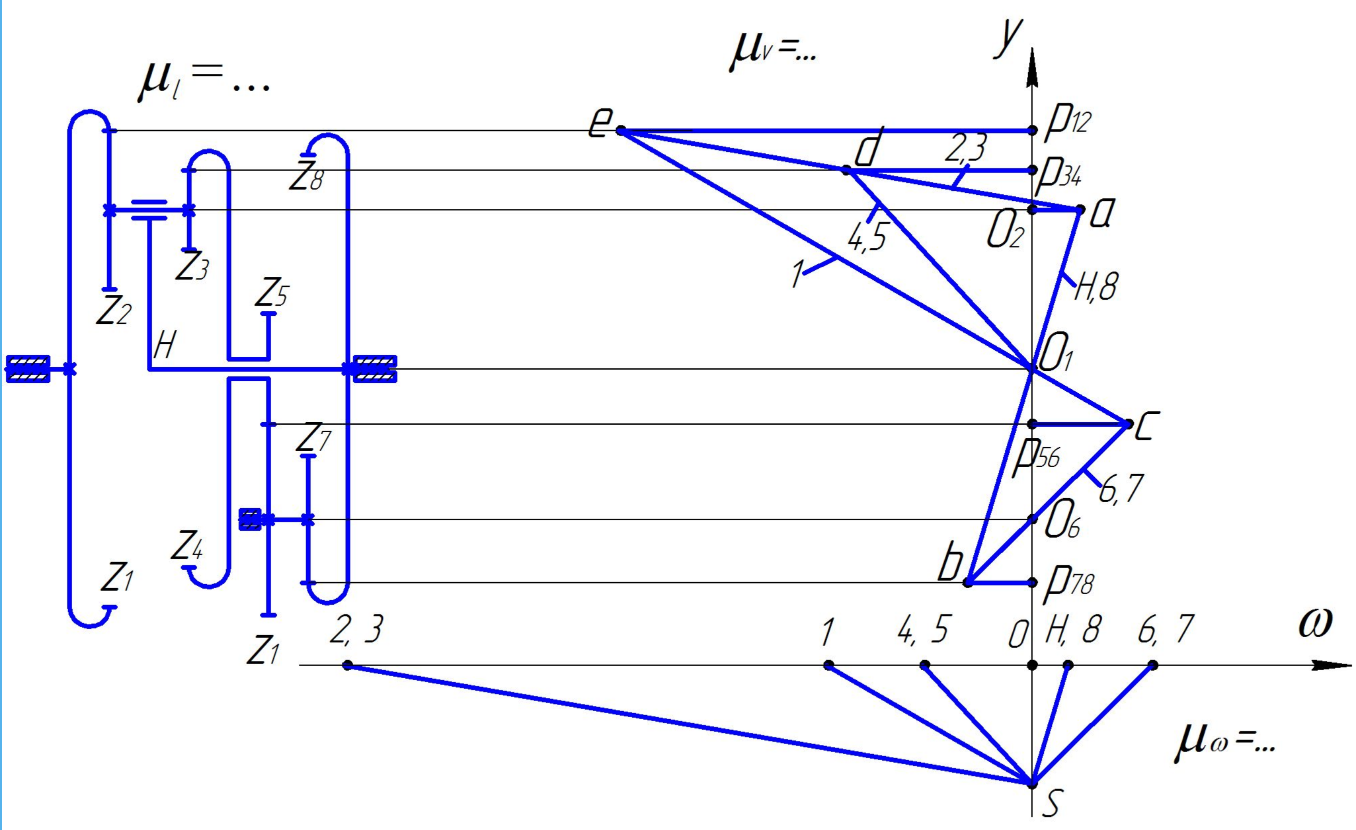
$$u_{1H}^{(4)}=1+\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- Рассмотрим кинематику планетарного механизма, полученного из дифференциальной схемы II путем введения цепи замыкания в виде соосного кратного зубчатого механизма, образованного колесами z_5, z_6, z_7 и z_8 оси, вращения которых неподвижны, а колеса z_5 и z_8 жестко соединены соответственно с центральным колесом z_4 и водилом Н.
- При исследовании кинематики замкнутых планетарных механизмов графическим методом построение картины распределения линейных скоростей следует начинать не с входного колеса z_1,

Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- а с какого-либо звена, входящего в состав замкнутого кинематического контура.



Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- Аналитическую связь между передаточным отношением и числами зубьев колес механизма выполним в соответствии с ранее указанными рекомендациями:
- запишем формулу Виллиса как передаточное отношение приведенного механизма:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- разделим числитель и знаменатель левой части этого равенства на угловую скорость того звена, к которому отыскивается передаточное отношение, т.е. на

  ω_8

$$\frac{\dfrac{\omega_1}{\omega_8} - \dfrac{\omega_H}{\omega_8}}{\dfrac{\omega_4}{\omega_8} - \dfrac{\omega_H}{\omega_8}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- Так как водило Н жестко соединено с колесом z_8 то $\frac{\omega_H}{\omega_8} = 1$ а отношение угловых скоростей колёс z_4 и z_8 имеющих неподвижные оси вращения, выражаются через числа зубьев колес цепи замыкания, представляющей собой кратный двухступенчатый механизм:

$$\frac{\omega_4}{\omega_8} = \frac{\omega_5}{\omega_8} = -\frac{z_6 z_8}{z_5 z_7}$$

Передаточное отношение замкнутого планетарного механизма схемы II.

- После подстановки и соответствующих преобразований получим:

$$u_{18} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\left(\frac{z_6 z_8}{z_5 z_7} + 1\right) = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} - \frac{z_2 z_4 z_6 z_8}{z_1 z_3 z_5 z_7}$$