Метод Гомори решения задач ЦЛП

Лекция 8

План лекции

- I Постановка задачи ЦЛП в общем виде
- II Алгоритм метода Гомори
- III Пример реализации

Общая постановка ЗЦЛП

- Целевая функция

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (1)$$

- Система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \quad (3)$$

$$x_j \in Z(\text{целые}) \ j = \overline{1,k},\ k \le n \quad (4)$$

- Если k<n задача частичноцелочисленная
- Если k=n задача полностью целочисленная

Пример

- Дано

$$F = x_1 + 1.5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 4x_2 \le 45 \end{cases}$$

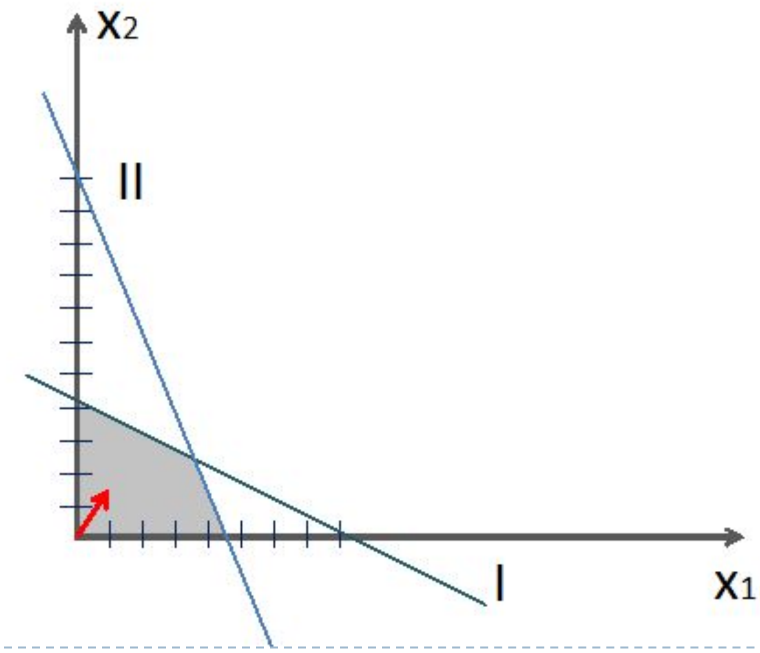
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

$$x_1, x_2 \in Z$$

- Решим геометрически

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 17 \\ 10x_1 + 4x_2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3.5 \\ x_2 = 2.5 \end{cases}$$



Алгоритм метода Гомори

- 1. Решаем задачу ЛП (1- 3) симплекс-методом.
- 2. Полученное оптимальное решение задачи (1-3), если оно существует, проверяем на целочисленность:
  - если все x_j, допустимые целые, то, полученное оптимальное решение задачи ЛП является оптимальным решением задачи целочисленного программирования, конец алгоритма;
  - если задача ЛП решения не имеет, то не имеет решения и задача целочисленного программирования;
  - наконец, если хотя бы одна координата не удовлетворяет условию (4), то переходим к шагу 3.
- 3. Строим дополнительное линейное ограничение, с помощью которого отсекается та часть допустимой области, определяемой условиями (2-3), в которой содержится оптимальное решение задачи ЛП (1-3), но нет ни одного допустимого решения, удовлетворяющего условию (4) и вновь выполняем пункт 1 для задачи ЛП с дополнительным ограничением.

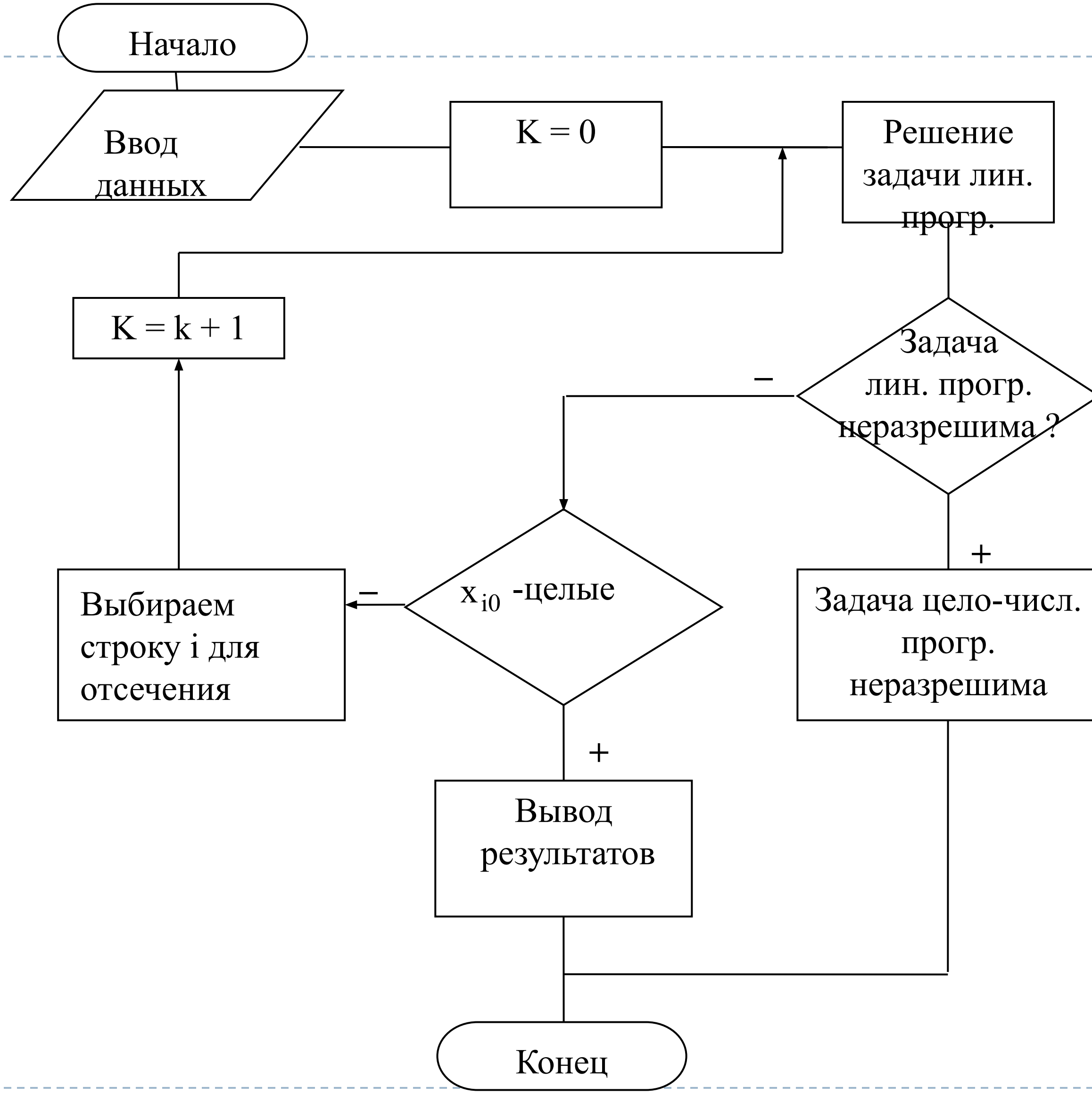
Построение отсечения

- Гомори показал, что при «k-м" возвращении к решению задачи ЛП, “k-е" дополнительное ограничение имеет вид:

$$x_{n+k+1} = -(x_{i0} - [x_{i0}]) + \sum_{j \in I_s} (x_{ij} - [x_{ij}]) x_j, \quad k = 0,1,2,\ldots, \; x_{n+k+1} \geq 0 \quad (5)$$

- где $[x_{i0}]$, $[x_{ij}]$ – целая часть соответствующей величины;
- x_{i0} – нецелая координата оптимального плана задачи (1-3) у которой нецелая часть самая большая;
- x_{ij} – координаты разложения векторов A_j, не попавших в базис;
- I_s – множество векторов, не попавших в базис

Блок-схема алгоритма метода Гомори



Расчетные формулы для построения отсечения

- Ограничение (5) может быть записано в виде:
- 1) отсечение для целочисленной задачи ЛП

$$\sum_{j \in I_s} \{x_{ij}\} x_j \geq \{x_{i0}\} \quad (6)$$

- 2) отсечение для частично целочисленной задачи

$$\sum_{j \in I_s} \gamma_{ij} x_j \geq \{x_{i0}\} \quad (7)$$

- где коэффициенты зависит от типа переменной:
  - а) для переменных, которые могут быть нецелыми

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & x_{ij} \geq 0 \\ \dfrac{\{x_{i0}\}}{1 - \{x_{i0}\}} \cdot x_{ij}, & x_{ij} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

  - б) для переменных, которые должны быть целые

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \{x_{ij}\}, & \{x_{ij}\} < \{x_{i0}\} \\ \dfrac{1 - \{x_{ij}\}}{1 - \{x_{i0}\}} \cdot \{x_{i0}\}, & \{x_{ij}\} \geq \{x_{i0}\} \end{cases}$$

Пример

- Дано

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2.5 \\ x_2 \le 2.5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

$$x_1, x_2 \in Z$$

- Канонический вид

$$F = x_1 + 1x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2{,}5 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \in Z$$

Решение методом Гомори

- Решение симплекс-методом без учета требования целочисленности

Базис	$C_{баз.}$	b опор.	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2,5	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
		F=5	0	0	1	1

- Решение $x^* = (2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 0 \quad 0)$
- В частично целочисленной задаче отсечения строятся по переменной, на которую наложено требование целочисленности. Отсечение строиться по переменной с наибольшей дробной частью, в нашем случае выберем первую строку:

$$1x_3 + 0x_4 \ge \{2{,}5\}$$

$$x_3 \ge 0.5$$

Решение методом Гомори. Вторая итерация

- Выразим фиктивную переменную x_3 из первого ограничения и подставим его в полученное отсечение:

$$2.5 - x_1 \geq 0{,}5$$

$$x_1 \leq 2$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2{,}5 \\ x_2 \leq 2{,}5 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \in Z$$

$$F = x_1 + 1x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in Z$$

Базис	$C_{баз.}$	b опор.	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
		F=4,5	0	0	1	1

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 & 2{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение методом Гомори. Третья итерация

- Построение отсечения

$$0x_3 + 1x_4 \geq \{2,5\}$$
$$x_4 \geq 0.5$$

- Выражаем фиктивную переменную

$$2.5 - x_2 \geq 0,5$$
$$x_2 \leq 2$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2,5 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$
$$x_1, x_2 \in Z$$

$$F = x_1 + 1x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in Z$$

Базис	$C_{баз.}$	b опор.	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2	1	0	1	**0**
A_2	1	2	0	1	0	**1**
		F=4	**0**	**0**	**1**	**1**

Задание на практику

Решить методом Гомори пример

$$F = x_1 + 1.5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 4x_2 \le 45 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

$$x_1, x_2 \in Z$$