

***Тема уроку: Основи динаміки
обертального руху.***



Мета уроку:

- Ознайомити студентів з обертальним рухом, його основними характеристиками та одиницями вимірювання
- Сформулювати теорему Штейнера
- Провести аналогію між поступальним і обертальним рухами

План уроку

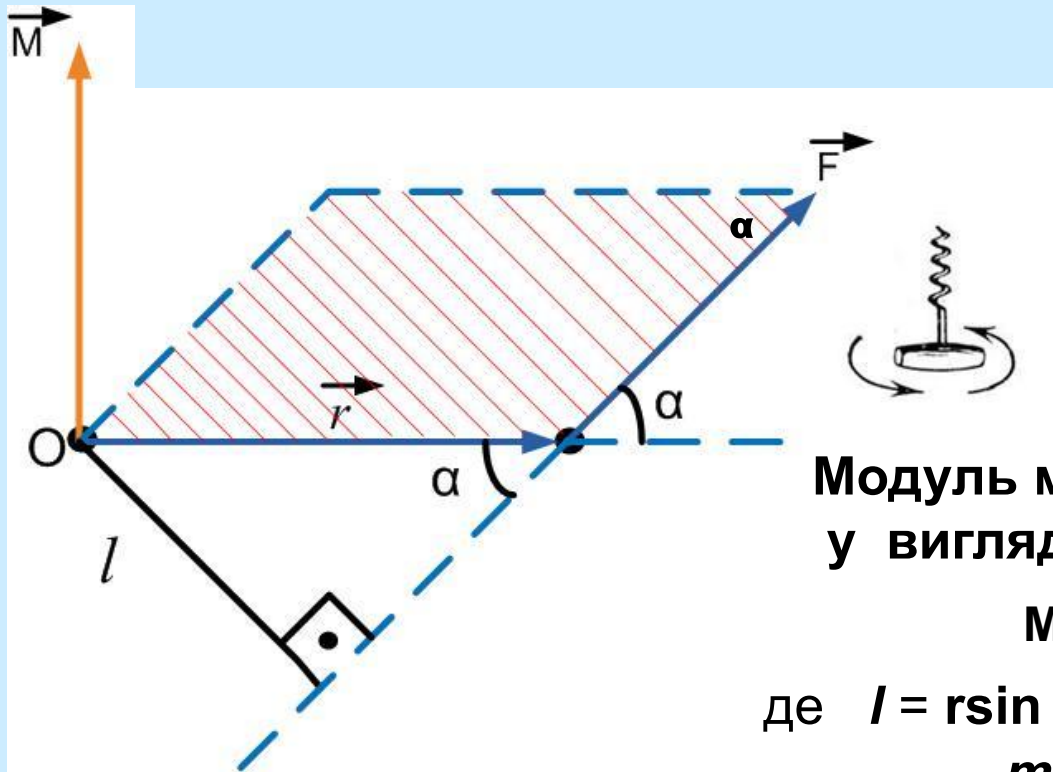
- Момент сили.
- Момент інерції тіла відносно нерухомої осі. Теорема Штейнера.
- Момент імпульсу відносно нерухомої осі обертання.
- Закон збереження моменту імпульсу.
- Основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла.

- **Обертний рух тіла навколо осі – це рух, при якому траєкторією руху усіх його точок є кола з центром, що лежать на одній прямій, яка називається *віссю обертання*.**

- ***Абсолютно тверде тіло* (тверде тіло) — це тіло, взаємне положення точок якого не змінюється, тобто тіло не деформується. Абсолютно тверде тіло можна трактувати як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок**

Момент сили

Моментом сили відносно нерухомого центра O називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіуса – вектора \vec{r} , проведеного з точки O до точки прикладання сили, на вектор сили \vec{F}



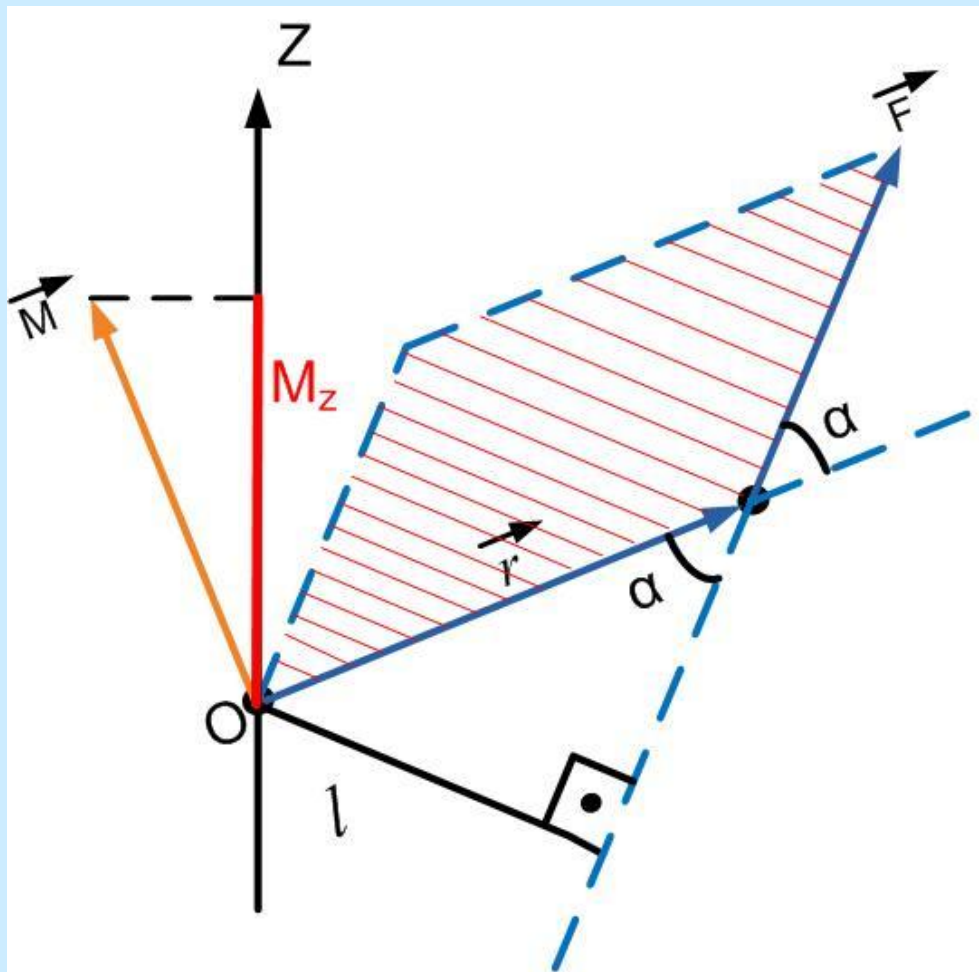
$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$$

Модуль моменту сили можна подати у вигляді:

$$M = rF \sin \alpha = Fl$$

де $l = r \sin \alpha$ – плече сили відносно точки O

(довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили)



При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі OZ сила, що діє на тіло створює **момент сили відносно осі**, що є проекцією вектора на вісь OZ :

$$M_z = (\overset{\vee}{M})_z$$

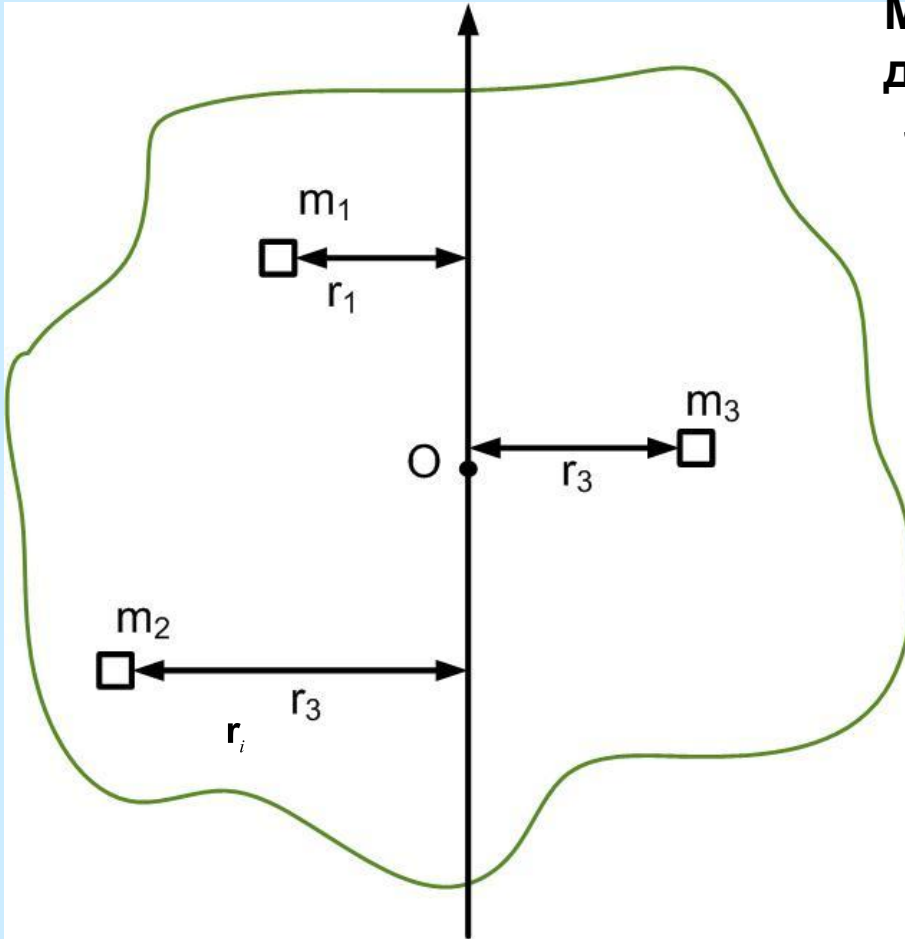
Момент інерції

Моментом інерції тіла відносно деякої нерухомої осі OZ є величина J_z , що визначається рівністю.

$$J_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

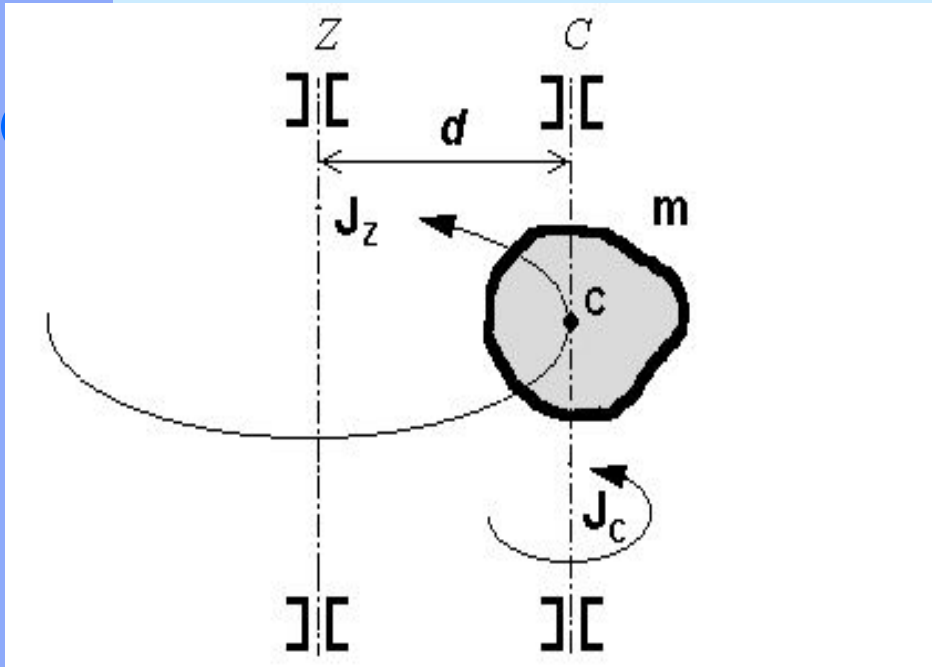
де m - маса i -ї частинки тіла, яке умовно “розбивається” на N частинок, настільки малих, що для кожної з них можна однозначно вказати

r_i - відстань частинки від осі OZ



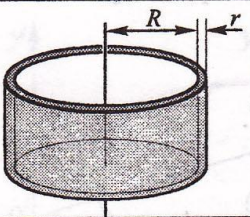
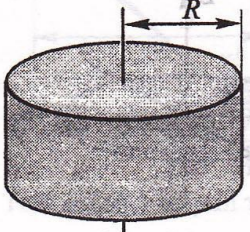

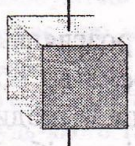

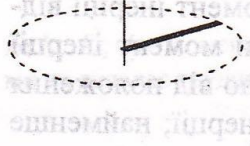
- ***Момент інерції тіла відносно осі дорівнює сумі добутків елементарних мас тіла на квадрати їх віддалей від осі обертання***
- **Момент інерції – величина скалярна, вимірюється в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.**

Момент інерції тіла J_z відносно довільної осі визначають за теоремою Штейнера



Теорема Штейнера:
Момент інерції тіла J_z відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції J_C відносно осі, паралельної даній, що проходить через центр мас тіла і добутку маси тіла m на квадрат відстані між осями d .

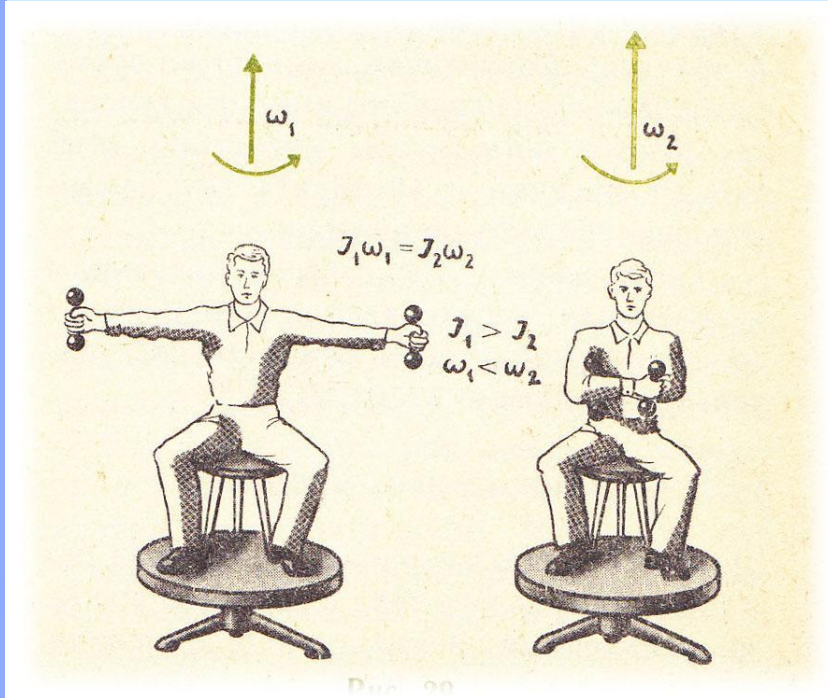
$$J_z = J_C + md^2$$

Малюнок	Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
	Порожнистий тонкостінний циліндр або обрuch радіусом R	Вісь симетрії	mR^2
	Суцільний циліндр або диск радіусом R	Вісь симетрії	$\frac{1}{2}mR^2$
	Куля радіусом R	Вісь проходить через центр кулі	$\frac{2}{5}mR^2$
	Куб з ребром завдовжки a	Вісь проходить через центр куба перпендикулярно до його грані	$\frac{1}{6}ma^2$
	Прямий тонкий стрижень завдовжки l	Вісь перпендикулярна до стрижня і проходить через його середину	$\frac{1}{12}ml^2$
	Прямий тонкий стрижень завдовжки l	Вісь перпендикулярна до стрижня і проходить через його кінець	$\frac{1}{3}ml^2$

Момент імпульсу

- Якщо тверде тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі OZ , то вводиться поняття *моменту імпульсу відносно нерухомої осі*.
- Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі OZ L_z дорівнює проекції на вісь OZ величини L

- Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі дорівнює сумі моментів імпульсів елементарних мас цього тіла відносно вказаної осі.



$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{iz}$$

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = J_z \omega$$

ω – кутова швидкість тіла,

J_z – момент інерції тіла відносно осі OZ.

- Співвідношення, що зв'язує між собою момент сили, який діє на тіло, і момент імпульсу цього тіла у випадку обертального руху навколо нерухомого центру має вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

$$\frac{d(J_z \omega)}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon$$

$$J_z \varepsilon = M_z$$

Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі: *момент сили відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на набуте тілом кутове прискорення*

- Якщо система замкнена, то момент зовнішніх сил дорівнює нулю. Тоді:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

а це значить, що: $\vec{L} = \text{const}$

Закон збереження моменту імпульсу:
момент імпульсу замкненої системи постійний у часі

Кінетична енергія тіла, що обертається

$$W_k = \sum_n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad v_i = \omega R_i \quad W_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_n m_i R_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

Співставлення формули $\frac{J_z \omega^2}{2}$ з формулою для кінетичної енергії поступального руху $\frac{mv^2}{2}$ підтверджує факт, що *момент інерції тіла* є мірою інертності тіла при обертальному русі.

Аналогії між формулами механіки поступального і обертального рухів

Поступальний рух	Обертальний рух
\vec{v} – лінійна швидкість	ω – кутова швидкість
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – лінійне прискорення	$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення
m – маса	J_z – момент інерції
$\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс	$L_z = J_z\omega$ – момент імпульсу
\vec{F} – сила	\vec{M} або M_z – момент сили
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{dL}{dt} = M$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$J_z\epsilon_z = M_z$
$W_k = \frac{mv^2}{2}$	$W_k = \frac{J_z\omega^2}{2}$

Питання для самоконтролю:

- Що називають моментом інерції матеріальної точки відносно нерухомої осі обертання?
- Одиниці виміру моменту інерції.
- Момент інерції тіл, правильної геометричної форми.
- Теорема Штейнера
- Що таке момент сили?
- Приймаючи людину за циліндр радіуса 20 см, висотою 1,7 м і масою 70 кг, розрахуйте моменти інерції:
 - а) в положенні стоячи навколо осі, що проходить через центр мас людини.
- Що таке момент імпульсу?