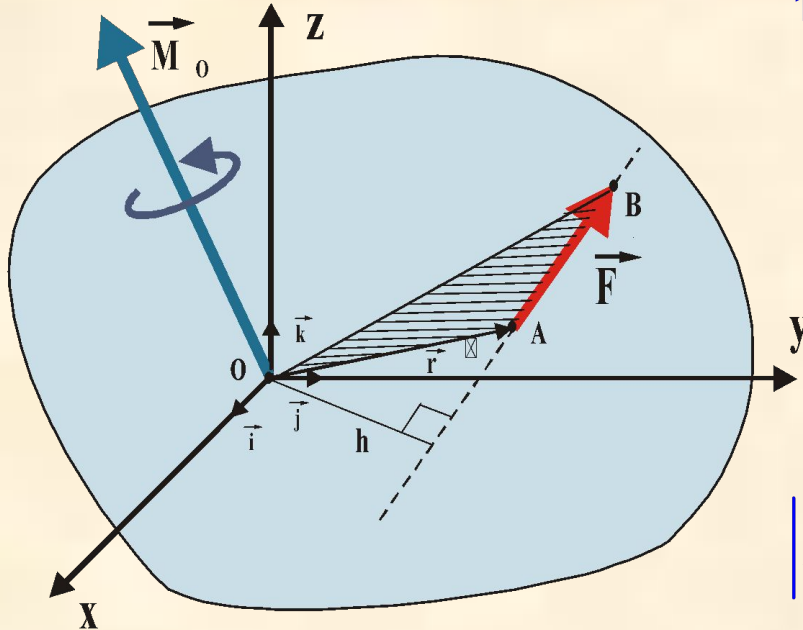


МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА

Моментом силы относительно центра в пространстве (векторным моментом) называют вектор, приложенный в этой точке, с модулем, равным произведению модуля силы на плечо относительно данной точки и направленный перпендикулярно плоскости, содержащей линию действия силы и моментную точку в ту сторону, откуда поворот, вызываемый силой, кажется происходящим против движения часовой стрелки.



1) Момент силы не изменяется при переносе силы по линии ее действия.

2) Момент силы равен нулю если плечо силы $h=0$.

$$3) |\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{F}| h = 2 S_{\triangle OAB}.$$

Момент силы относительно центра можно выразить в виде векторного произведения:

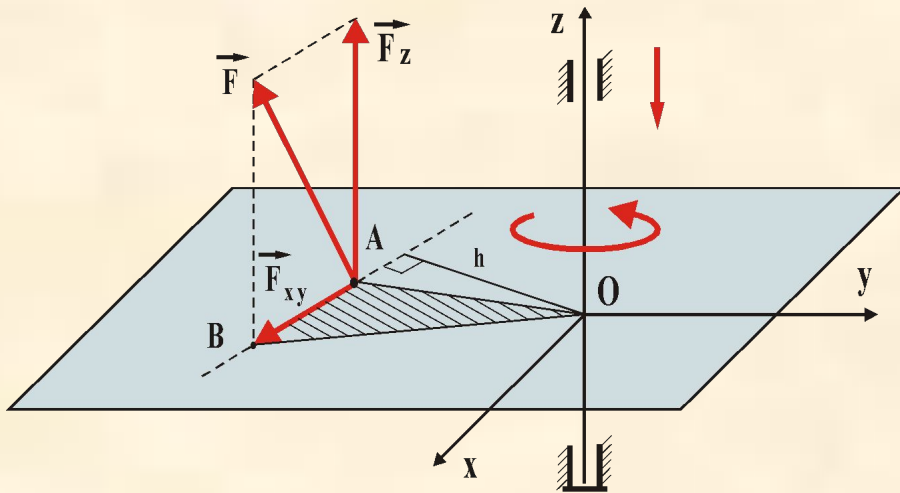
$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = |\vec{F}| \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})|.$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная взятому со знаком «+» или «-» моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Правило знаков: момент силы относительно оси считают положительным, если, смотря навстречу оси, видят поворот, который стремится совершить сила, происходящим против хода часовой стрелки и отрицательным в противном случае.



$$M_z(F) = \pm |F_{xy}| \cdot h$$

Свойства момента силы относительно оси

- 1) Момент силы относительно оси не изменяется при переносе силы по линии ее действия.
- 2) Момент силы относительно оси равен нулю:
 - а) если плечо силы $h=0$;
 - б) если сила коллинеарна оси.

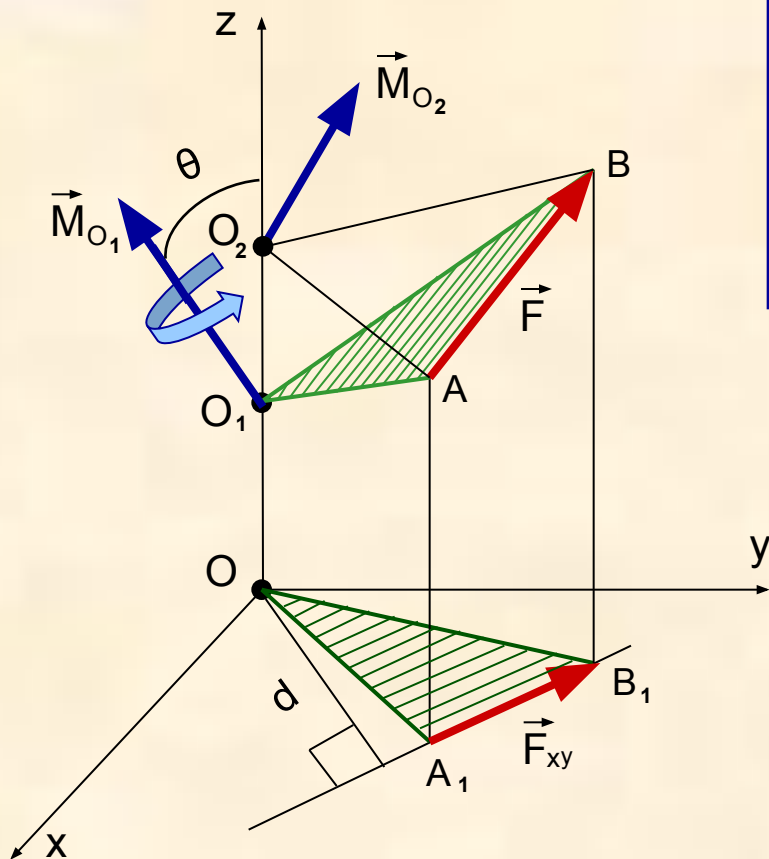
$$M_z(\vec{F}) = |\vec{F}_{xy}| h = 2 S_{\triangle OAB}.$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ МОМЕНТОМ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И МОМЕНТОМ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛЮБОГО ЦЕНТРА, ЛЕЖАЩЕГО НА ЭТОЙ ОСИ

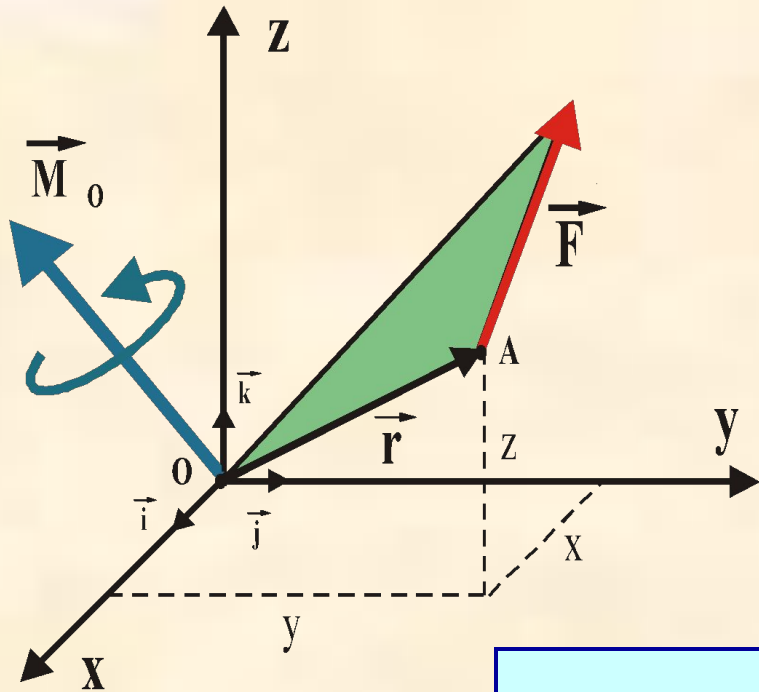
Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно любого центра, лежащего на данной оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\begin{aligned} \left| \vec{M}_{O_1}(F) \right| &= 2 \cdot S_{\Delta AO_1B}; \\ M_Z(F) &= 2 \cdot S_{\Delta A_1OB_1}; \\ S_{\Delta A_1OB_1} &= S_{\Delta AO_1B} \cdot \cos \theta; \\ M_Z(F) &= \left| \vec{M}_{O_1}(F) \right| \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$



АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ



$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

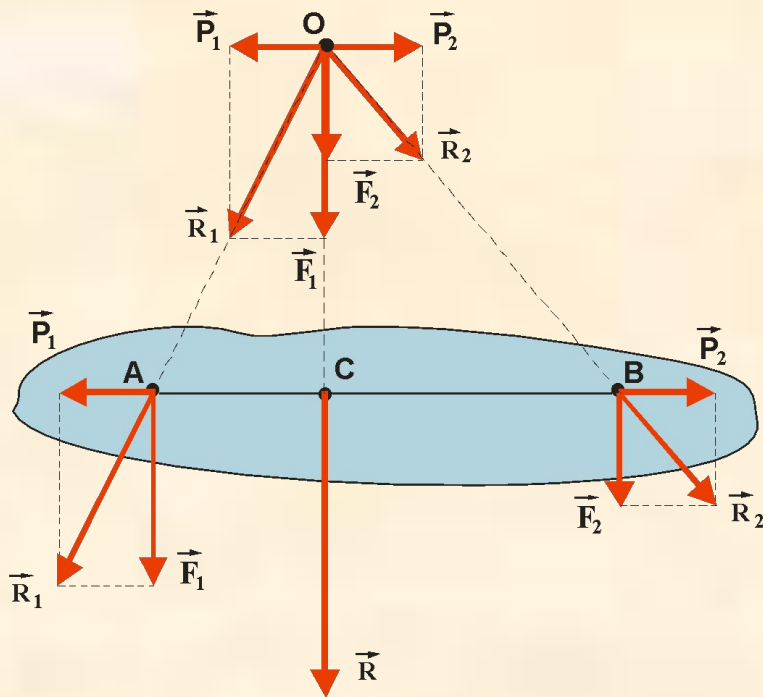
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}.$$

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y, \\ M_y = zF_x - xF_z, \\ M_z = xF_y - yF_x. \end{cases}$$

СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

1) Силы направлены в одну сторону



Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, им параллельна, направлена в ту же сторону и равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, а ее линия действия проходит между линиями действия слагаемых сил и делит расстояние между ними на части обратно пропорциональные модулям этих сил.

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2, |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2|;$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim 0;$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2);$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, |\vec{R}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|.$$

$$\triangle AOC \sim \triangle F_1 P_1 R_1 \Rightarrow \frac{AC}{|\vec{P}_1|} = \frac{OC}{|\vec{F}_1|};$$

$$OC \cdot |\vec{P}_1| = AC \cdot |\vec{F}_1|;$$

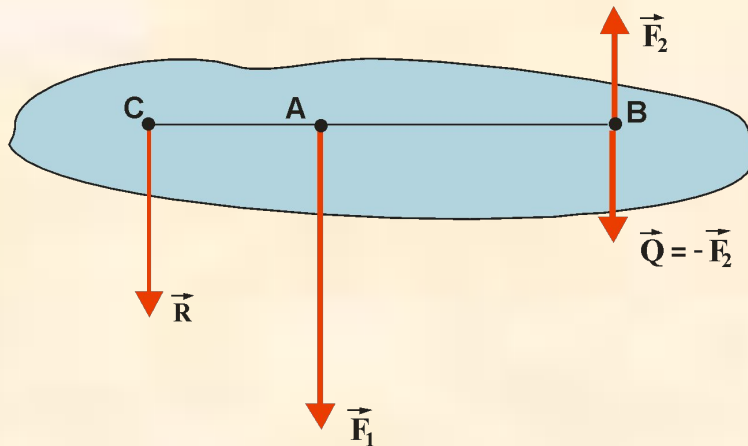
$$\triangle BOC \sim \triangle F_2 P_2 R_2 \Rightarrow \frac{BC}{|\vec{P}_2|} = \frac{OC}{|\vec{F}_2|};$$

$$OC \cdot |\vec{P}_2| = BC \cdot |\vec{F}_2|;$$

$$|\vec{F}_1| \cdot AC = |\vec{F}_2| \cdot BC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|}.$$

СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

2) Силы направлены в противоположные стороны. ($|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$)



$$|\vec{R}| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|;$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{R}|} \Rightarrow AC = AB \cdot \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{R}|} = AB \cdot \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|}.$$

Равнодействующая двух антипараллельных сил равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в ту же сторону большей силы, а ее линия действия делит расстояние между линиями действия слагаемых сил внешним образом на части обратно пропорциональные модулям этих сил.

Важно заметить, что при $|\vec{F}_2| \rightarrow |\vec{F}_1|$ $AC \rightarrow \infty$, $|\vec{R}| \rightarrow 0$.

Таким образом, действие на тело двух равных по модулю антипараллельных сил не может быть заменено действием лишь одной силы. Вместе с тем эти силы не находятся в равновесии т.к. не удовлетворяют условию **Аксиомы I** статики. Следовательно, данная система сил должна изучаться особо, как самостоятельный элемент статики.

ТЕОРИЯ ПАР

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на АТТ.

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Плечом пары d называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Пара сил, действующая на твердое тело, может вызвать его вращение. Вращательный эффект, создаваемый парой, зависит от:

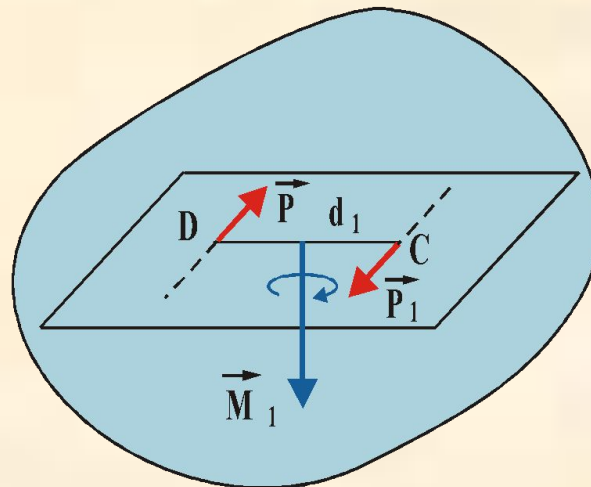
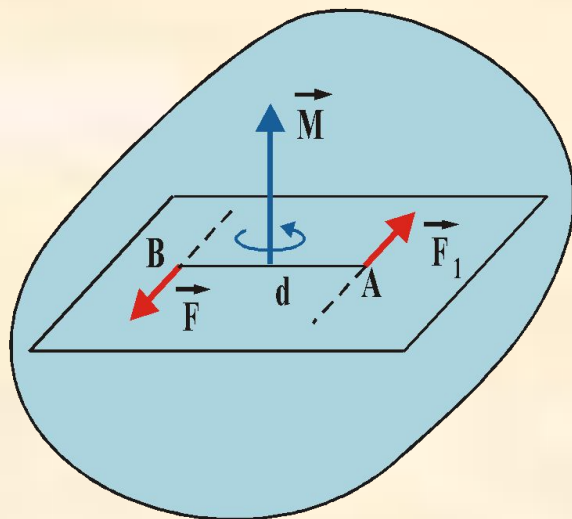
- величины момента пары, равного произведению модуля одной из сил пары на ее плечо;

- плоскости действия пары;

- направления поворота, вызываемого парой в плоскости ее действия.

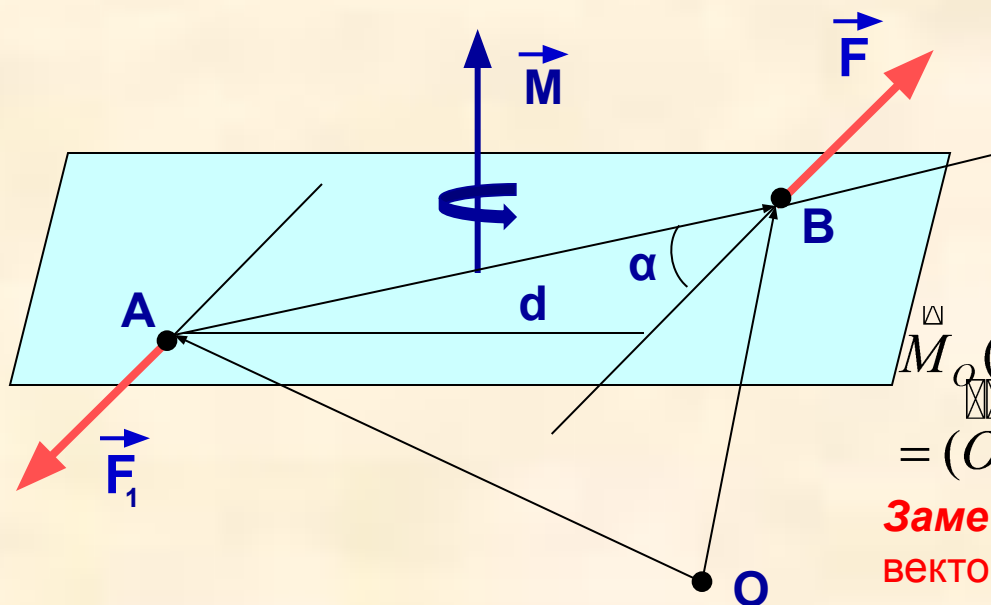
Все эти характеристики действия пары сил можно задать одновременно вводя **вектор-момент пары**, модуль которого равен моменту пары, направив его перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону откуда поворот, вызываемый парой кажется происходящим против хода часовой стрелки.

ТЕОРИЯ ПАР



$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot d = |\vec{F}_1| \cdot d$$

$$|\vec{M}_1| = |\vec{P}| \cdot d_1 = |\vec{P}_1| \cdot d_1$$



Момент пары сил можно представить в виде векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}_1 \\ |\vec{AB} \times \vec{F}| &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = \\ &= |\vec{F}| \cdot d = |\vec{M}|, \end{aligned}$$

здесь A, B – произвольные точки, лежащие на линиях действия сил пары.

Замечание. Момент пары сил в отличие от момента силы не связан ни с какой точкой пространства.

Теорема.

Момент пары сил равен векторной сумме моментов сил пары относительно любой точки пространства.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}_1) &= \vec{OB} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F}_1 = \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA}) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}. \end{aligned}$$

Замечание. Момент пары сил – вектор свободный.

ТЕОРИЯ ПАР

ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПАР

Теорема 1.

Не изменяя механического действия пары сил на свободное АТТ ее можно переносить и как угодно поворачивать в плоскости действия.

Теорема 2.

Не изменяя механического действия пары сил на свободное АТТ ее можно переносить в любую плоскость параллельную плоскости действия пары.

Теорема 3.

Не изменяя механического действия пары сил на свободное АТТ можно произвольным образом изменять модули сил пары и ее плечо, сохранив неизменным их произведение (величину момента пары).

Теорема 4.

Действие системы пар сил на свободное АТТ эквивалентно действию одной пары с моментом равным векторной сумме моментов пар системы.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k.$$

ТЕОРИЯ ПАР

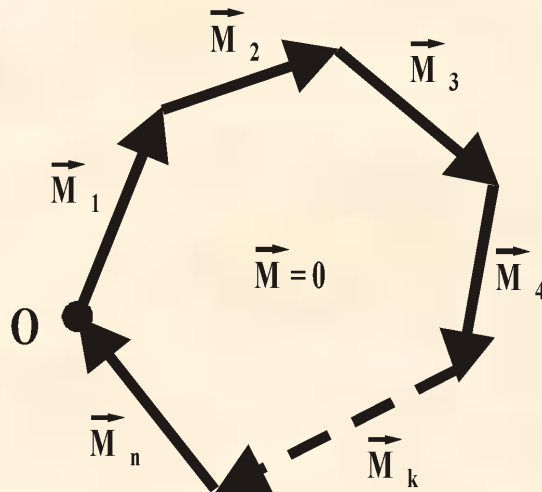
УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ПАР СИЛ

Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов всех пар системы равнялась нулю.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = 0.$$

Условия равновесия системы пар сил:

геометрическая форма



аналитическая форма

$$\begin{cases} \sum M_{kx} = 0, \\ \sum M_{ky} = 0, \\ \sum M_{kz} = 0. \end{cases}$$

Для равновесия системы пар сил многоугольник, построенный на моментах пар системы, должен быть замкнут!