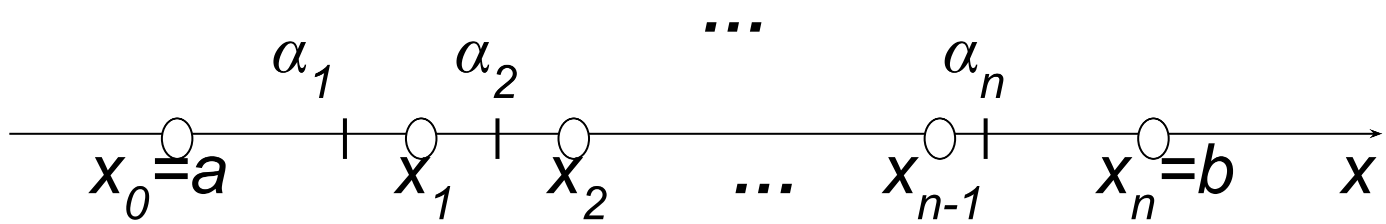
# Тема. Визначений інтеграл

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Властивості визначеного інтеграла.
3. Теорема Ньютона-Лейбніца.
4. Метод заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
5. Інтегрування парних та непарних функцій у симетричних межах.
6. Геометричні застосування визначених інтегралів.
7. Економічні застосування визначених інтегралів.

$y = f(x)$ - визначена і неперервна на $[a;b]$




$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$- довжина $i$-го частинного відрізка

---

$$S_n = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + ... + f(\alpha_n)\Delta x_n =$$

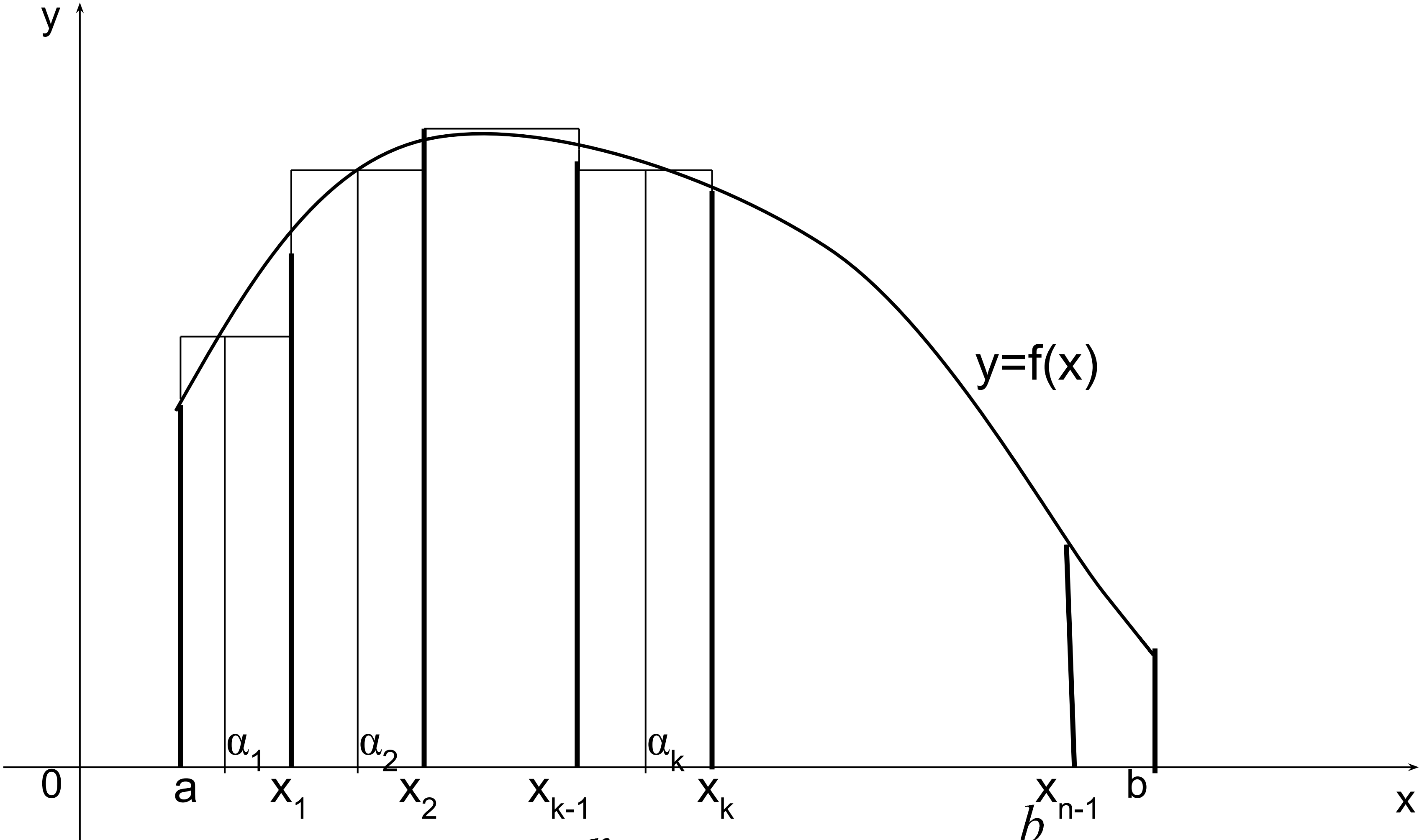
$= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$ - $n$-на інтегральна сума

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} S_n = S.$$

---

$$\int_a^b f(x)dx$$




$$S_{кр.тр.} = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

(геометричний зміст визначеного інтеграла)

# Основні властивості визначеного інтеграла

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

5) $$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

6) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7) $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad (a < c < b)$$

# Формула Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

# Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ x = a: \quad a = \varphi(\alpha) \\ x = b: \quad b = \varphi(\beta) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклад: $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

# Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Приклад: $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \textit{якщо } f(x) - \textit{парна}, \\ 0, \textit{якщо } f(x) - \textit{непарна} \end{cases}$$

Приклади:

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\int_{-4}^{4} e^{-x^2} \sin xdx$$