Численные методы решения систем линейных уравнений

§2. Численные методы решения СЛУ

В. Какие методы решения СЛУ Вы изучали?

О. - метод подстановки,
- метод сложения,
- метод Гаусса,
- метод Крамера,
- матричный метод.

§2. Численные методы решения СЛУ

В. С какими проблемами можно столкнуться при решении СЛУ?

О. - многие точные методы настолько трудоёмки, что применять их не целесообразно;
- как правило, точное решение не является необходимым, а достаточно приближённого решения, с наперёд заданной точностью.

§2. Численные методы решения СЛУ

В. Что нужно знать для численного решения СЛУ?

О. - итерационные формулы;

- формулы оценки погрешности.

§2. Численные методы решения СЛУ

Цель: научиться решать СЛУ численными методами.

Задачи: изучить итерационные формулы и формулы оценки погрешности для численного решения СЛУ.

§2. Численные методы решения СЛУ

п1. Постановка задачи.

Методы решения систем линейных уравнений разбиваются на две группы:
1) точные методы - алгоритмы, позволяющие получить решение за конечное число арифметических действий (метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод);
2) приближенные методы - алгоритмы, позволяющие получить приближенное решение за некоторое число определённых итераций.

Необходимость в приближенных методах возникает, так как использование точных методов требует большого числа арифметических операций. Метод Крамера и матричный метод считается целесообразным применять при количестве переменных до 10^3, метод Гаусса – до 10^6

§2. Численные методы решения СЛУ

п1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} при неизвестных и свободные члены b_i – действительные числа.

Опр. Вектор $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ называется решением системы (1), если при подстановке его координат в систему (1) каждое уравнение превращается в верное числовое равенство.

Система (1) имеет единственное решение если $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Поставим задачу нахождения решения системы линейных уравнений (1) с точностью ε.

Рассмотрим два приближенных метода решения систем линейных уравнений: метод итерации и метод Зейделя.

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Рассмотрим систему линейных уравнений (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Приведём систему (1) к виду (2) $\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$.

Запишем систему (2) в матричной форме $x = Cx + d$, где $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Рекуррентная формула метода итераций имеет вид $x^{[k+1]} = Cx^{[k]} + d$, $k = 0,1,2,\ldots$, где в качестве начального приближения $x^{[0]}$ можно выбрать любой вектор, но, как правило, выбирают $x^{[0]} = d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Достаточное условие сходимости итерационной последовательности имеет вид:

Теорема. Если матрица C коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2) удовлетворяет условию

$$q = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1,$$

то система (2) имеет единственное решение x и построенная последовательность сходится к точному решению при любом начальном приближении $x^{[0]}$, причем имеет место оценка погрешности:

$$\Delta_k = \frac{q^k}{1-q} \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{[1]} - x_i^{[0]} \right| \le \varepsilon, \ \ k = 1,2,\ldots$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Пример. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Приведем систему к итерационному виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_3 = -x_1 + x_2 + 2 \\ 2x_2 = -0{,}5x_1 + x_3 + 1 \\ 5x_1 = x_2 - x_3 + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}5 \\ x_2 = -0{,}25x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}5 \\ x_1 = 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}8 \\ x_2 = -0{,}25x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}5 \\ x_3 = -0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}5 \end{cases}$$

Найдем $q = \max\{|0| + |0{,}2| + |-0{,}2|; |-0{,}25| + |0| + |0{,}5|; |-0{,}25| + |0{,}25| + |0|\} = \max\{0{,}4; 0{,}75; 0{,}5\} = 0{,}75 < 1$ – условия метода выполнены, последовательность будет сходится к точному решению при любом выборе начального приближения $x^{[0]}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Решение:

Итак, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$. Пусть $x^{[0]} = d$.

1 итерация

$$x^{[1]} = Cx^{[0]} + d = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}55 \\ 0{,}425 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \frac{q^1}{1-q}\max_{i=\overline{1,n}}\left|x_i^{[1]} - x_i^{[0]}\right| = \frac{0{,}75^1}{1-0{,}75}\max_{i=\overline{1,n}}\{|0{,}8-0{,}8|; |0{,}55-0{,}5|; |0{,}425-0{,}5|\} =$$

$= 0{,}225 \le 0{,}01$ – неверно, переходим ко 2 итерации.

2 итерация

$$x^{[2]} = Cx^{[1]} + d = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}55 \\ 0{,}425 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}825 \\ 0{,}5125 \\ 0{,}4375 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \frac{q^2}{1-q}\max_{i=\overline{1,n}}\left|x_i^{[1]} - x_i^{[0]}\right| = \frac{0{,}75^2}{1-0{,}75}\max_{i=\overline{1,n}}\{|0{,}8-0{,}8|; |0{,}55-0{,}5|; |0{,}425-0{,}5|\} =$$

$= 0{,}16875 \le \varepsilon$ – неверно, переходим к 3 итерации.

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Решение:

Дальнейшие вычисления можно проводить вручную или составить программу, выводящую результат в виде таблицы

n	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$	Δ_k

Воспользовавшись, например, Excel, получим

k	0	1	2	3	4	...	11	12
$x_1^{[k]}$	0,8	0,8	0,825	0,815	0,818125		0,8169	0,816902
$x_2^{[k]}$	0,5	0,55	0,5125	0,5125	0,507188		0,507044	0,507042
$x_3^{[k]}$	0,5	0,425	0,4375	0,421875	0,424375		0,422534	0,422536
Δ_k		0,225	0,16875	0,126563	0,094922		0,012671	0,009503
Максимум изменения		0,075	0,0375	0,015625	0,005312		0,000007	0,000002

Итак, на 12 шаге точность достигнута. Выпишем решение с верными значащими цифрами и требуемой погрешностью $x \approx (0{,}817; 0{,}507; 0{,}423)$.

Ответ: $(0{,}817; 0{,}507; 0{,}423) \pm 0{,}01$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п2. Метод итераций.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

а) $\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 8{,}7x_1 - 3{,}1x_2 + 1{,}8x_3 - 2{,}2x_4 = -9{,}7 \\ 2{,}1x_1 + 6{,}7x_2 - 2{,}2x_3 = 13{,}1 \\ 3{,}2x_1 - 1{,}8x_2 - 9{,}5x_3 - 1{,}9x_4 = 6{,}9 \\ 1{,}2x_1 + 2{,}8x_2 - 1{,}4x_3 - 9{,}9x_4 = 25{,}1 \end{cases}$

Дополнительные задания.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

а) $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5 \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 6{,}1x + 0{,}7y - 0{,}05z = 6{,}97 \\ -1{,}3x - 2{,}05y + 0{,}87z = 0{,}1 \\ 2{,}5x - 3{,}12y - 5{,}03z = 2{,}04 \end{cases}$

Домашнее задание.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

а) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 \end{cases}$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итераций. В данном методе при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i учитываются уже найденные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Приведём систему (1) к виду (2) $\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \dots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$.

Запишем систему (2) в матричной форме $x = Cx + d$, где $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

Первое приближение $x^{[1]}$ ищется по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{[1]} = c_{11}x_1^{[0]} + c_{12}x_2^{[0]} + c_{13}x_3^{[0]} + \cdots + c_{1n}x_n^{[0]} + d_1 \\ x_2^{[1]} = c_{21}x_1^{[1]} + c_{22}x_2^{[0]} + c_{23}x_3^{[0]} + \cdots + c_{2n}x_n^{[0]} + d_2 \\ x_3^{[1]} = c_{31}x_1^{[1]} + c_{32}x_2^{[1]} + c_{33}x_3^{[0]} + \cdots + c_{3n}x_n^{[0]} + d_3 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{[1]} = c_{n1}x_1^{[1]} + c_{n2}x_2^{[1]} + c_{n3}x_3^{[1]} + \cdots + c_{nn}x_n^{[0]} + d_n \end{cases}$$

Аналогично строятся вторая, третья и т.д. итерации.

Рекуррентная формула метода Зейделя имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{[k+1]} = c_{11}x_1^{[k]} + c_{12}x_2^{[k]} + c_{13}x_3^{[k]} + \cdots + c_{1n}x_n^{[k]} + d_1 \\ x_2^{[k+1]} = c_{21}x_1^{[k+1]} + c_{22}x_2^{[k]} + c_{23}x_3^{[k]} + \cdots + c_{2n}x_n^{[k]} + d_2 \\ x_3^{[k+1]} = c_{31}x_1^{[k+1]} + c_{32}x_2^{[k+1]} + c_{33}x_3^{[k]} + \cdots + c_{3n}x_n^{[k]} + d_3 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{[k+1]} = c_{n1}x_1^{[k+1]} + c_{n2}x_2^{[k+1]} + c_{n3}x_3^{[k+1]} + \cdots + c_{nn}x_n^{[k]} + d_n \end{cases}$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

$$\begin{cases} x_1^{[k+1]} = c_{11}x_1^{[k]} + c_{12}x_2^{[k]} + c_{13}x_3^{[k]} + \cdots + c_{1n}x_n^{[k]} + d_1 \\ x_2^{[k+1]} = c_{21}x_1^{[k+1]} + c_{22}x_2^{[k]} + c_{23}x_3^{[k]} + \cdots + c_{2n}x_n^{[k]} + d_2 \\ x_3^{[k+1]} = c_{31}x_1^{[k+1]} + c_{32}x_2^{[k+1]} + c_{33}x_3^{[k]} + \cdots + c_{3n}x_n^{[k]} + d_3 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{[k+1]} = c_{n1}x_1^{[k+1]} + c_{n2}x_2^{[k+1]} + c_{n3}x_3^{[k+1]} + \cdots + c_{nn}x_n^{[k]} + d_n \end{cases}$$

Достаточное условие сходимости метода Зейделя полностью совпадает с достаточным условием сходимости метода итераций:

Теорема. Если матрица C коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2) удовлетворяет условию

$$q = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1,$$

то система (2) имеет единственное решение x и построенная последовательность сходится к точному решению при любом начальном приближении $x^{[0]}$, причем имеет место оценка погрешности:

$$\Delta_k = \frac{q^k}{1-q} \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{[1]} - x_i^{[0]} \right| \le \varepsilon, \ \ k = 1,2, \ldots$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

Пример. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Система была приведена к итерационному виду в методе итераций:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}8 \\ x_2 = -0{,}25x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}5 \\ x_3 = -0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}5 \end{cases}$$

Вычислим $q = \max\{0{,}4; 0{,}75; 0{,}5\} = 0{,}75 < 1$ - условия метода выполнено, последовательность будет сходится к точному решению при любом выборе начального приближения $x^{[0]}$. Пусть $x^{[0]} = d = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Решение:

Итак, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$. Пусть $x^{[0]} = d$.

1 итерация

$$x_1^{[1]} = 0{,}2x_2^{[0]} - 0{,}2x_3^{[0]} + 0{,}8 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 = 0{,}8$$
$$x_2^{[1]} = -0{,}25x_1^{[1]} + 0{,}5x_3^{[0]} + 0{,}5 = -0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 0{,}55$$
$$x_3^{[1]} = -0{,}25x_1^{[1]} + 0{,}25x_2^{[1]} + 0{,}5 = -0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}55 + 0{,}5 = 0{,}4375$$
$$\Delta_1 = \frac{q^1}{1-q} \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{[1]} - x_i^{[0]} \right| = \frac{0{,}75^1}{1-0{,}75} \max_{i=\overline{1,n}} \{|0{,}8-0{,}8|; |0{,}55-0{,}5|; |0{,}4375-0{,}5|\} =$$

$= 0{,}1875 \leq 0{,}01$ – неверно, переходим ко 2 итерации.

2 итерация

$$x_1^{[2]} = 0{,}2x_2^{[1]} - 0{,}2x_3^{[1]} + 0{,}8 = 0{,}2 \cdot 0{,}55 - 0{,}2 \cdot 0{,}4375 + 0{,}8 = 0{,}8225$$
$$x_2^{[2]} = -0{,}25x_1^{[2]} + 0{,}5x_3^{[1]} + 0{,}5 = -0{,}25 \cdot 0{,}8225 + 0{,}5 \cdot 0{,}4375 + 0{,}5 = 0{,}513125$$
$$x_3^{[2]} = -0{,}25x_1^{[2]} + 0{,}25x_2^{[2]} + 0{,}5 = -0{,}25 \cdot 0{,}8225 + 0{,}25 \cdot 0{,}513125 + 0{,}5 = 0{,}422656$$

$\Delta_2 = \frac{q^2}{1-q} \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{[1]} - x_i^{[0]} \right| = \frac{0{,}75^2}{1-0{,}75} \cdot 0{,}0625 = 0{,}140625 \leq 0{,}01$ – неверно, переходим к 3 итерации.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Решение:

Дальнейшие вычисления можно проводить вручную или составить программу, выводящую результат в виде таблицы

n	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$	Δ_k

Воспользовавшись, например, Excel, получим

k	0	1	2	3	4	…	11	12
$x_1^{[k]}$	0,8	0,8	0,8225	0,818094	0,816925	…	0,816901	0,816901
$x_2^{[k]}$	0,5	0,55	0,513125	0,506805	0,506858	…	0,507042	0,507042
$x_3^{[k]}$	0,5	0,4375	0,422656	0,422178	0,422483	…	0,422535	0,422535
Δ_k		0,1875	0,140625	0,105469	0,079102	…	0,010559	0,007919
Максимуму отклонения		0,0625	0,036875	0,00632	0,001168	…	0	0

Итак, на 12 шаге точность достигнута. Выпишем решение с верными значащими цифрами и требуемой погрешностью $x \approx (0{,}817; 0{,}507; 0{,}423) \pm 0{,}01$.

Ответ: $(0{,}817; 0{,}507; 0{,}423) \pm 0{,}01$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

а) $\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 8{,}7x_1 - 3{,}1x_2 + 1{,}8x_3 - 2{,}2x_4 = -9{,}7 \\ 2{,}1x_1 + 6{,}7x_2 - 2{,}2x_3 = 13{,}1 \\ 3{,}2x_1 - 1{,}8x_2 - 9{,}5x_3 - 1{,}9x_4 = 6{,}9 \\ 1{,}2x_1 + 2{,}8x_2 - 1{,}4x_3 - 9{,}9x_4 = 25{,}1 \end{cases}$

Дополнительные задания.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

а) $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5 \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 6{,}1x + 0{,}7y - 0{,}05z = 6{,}97 \\ -1{,}3x - 2{,}05y + 0{,}87z = 0{,}1 \\ 2{,}5x - 3{,}12y - 5{,}03z = 2{,}04 \end{cases}$

Домашнее задание.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

а) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 \end{cases}$

§2. Численные методы решения СЛУ

Выводы

Метод итерации и метод Зейделя решения систем линейных уравнений являются состоятельным сами по себе. У каждого из методов есть свои минусы и свои плюсы, которые ярко выражаются лишь на конкретных примерах.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$, точность $\varepsilon = 0{,}01$

Метод итераций: 12 итераций, $(0{,}817; 0{,}507; 0{,}423) \pm 0{,}01$.

Метод Зейделя: 12 итераций, $(0{,}817; 0{,}507; 0{,}423) \pm 0{,}01$.

б) $\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$, точность $\varepsilon = 0{,}01$

Метод итераций: 4 итераций, $(0{,}140; 0{,}529; -0{,}227) \pm 0{,}01$.

Метод Зейделя: 6 итераций, $(0{,}140; 0{,}529; -0{,}227) \pm 0{,}006$.

в) $\begin{cases} 8{,}7x_1 - 3{,}1x_2 + 1{,}8x_3 - 2{,}2x_4 = -9{,}7 \\ 2{,}1x_1 + 6{,}7x_2 - 2{,}2x_3 = 13{,}1 \\ 3{,}2x_1 - 1{,}8x_2 - 9{,}5x_3 - 1{,}9x_4 = 6{,}9 \\ 1{,}2x_1 + 2{,}8x_2 - 1{,}4x_3 - 9{,}9x_4 = 25{,}1 \end{cases}$, точность $\varepsilon = 0{,}01$

Метод итераций: 33 (16) итерации, $(-0{,}746; 1{,}880; -0{,}942; -1{,}961) \pm 0{,}01$.

Метод Зейделя: 34 (11) итерации, $(-0{,}746; 1{,}880; -0{,}942; -1{,}961) \pm 0{,}01$.