МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2 семестр

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

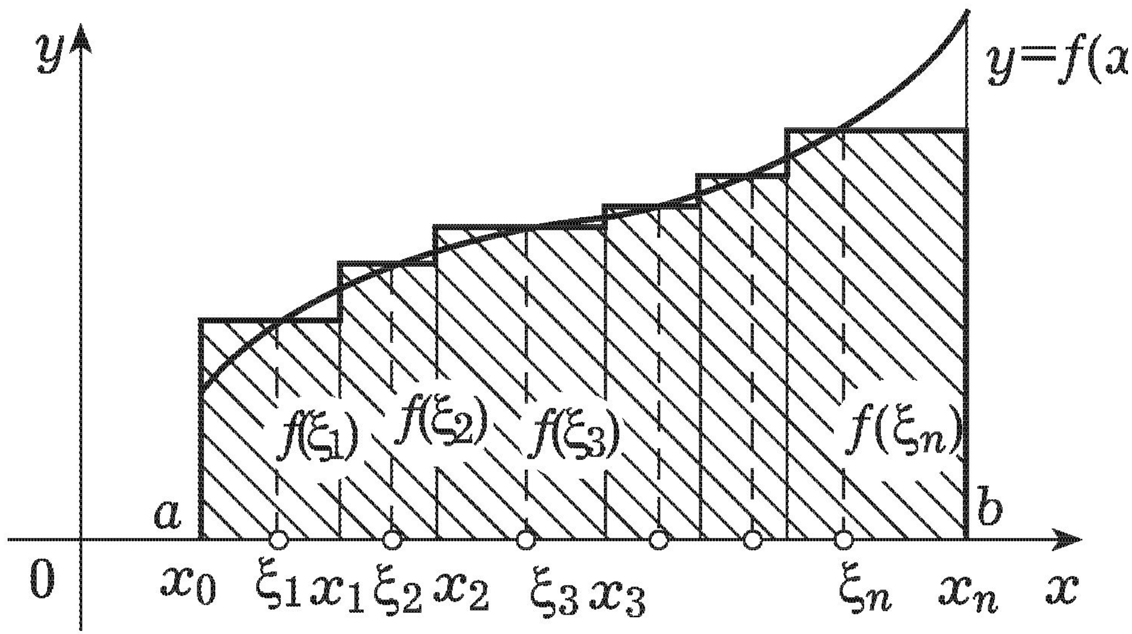
- Даны:

- отрезок $[a,b]$,

- неотрицательная функция $f(x)$

Криволинейная трапеция

Площадь?


y
y=f(x
f(ξ1)
f(ξ2)
f(ξ3)
f(ξn)
a
b
0
x0
ξ1
x1
ξ2
x2
ξ3
x3
ξn
xn
x

- 4 шага:

1. Разбить отрезок.
2. Выбрать точки.
3. Интегральная сумма.
4. Перейти к пределу.

1. $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1} \quad (i=1,2,\ldots,n)$

2. $\xi_1\in[x_0,x_1],\ \xi_2\in[x_1,x_2],\ldots,\ \xi_n\in[x_{n-1},x_n]$

3. Интегральная сумма

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

- 4. $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

при $\lambda \to 0$ существует, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$, обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$.

- Особенность предела!
- Пример интегрируемой функции: $f(x)=c$.

- Замечание. Если функция интегрируемая, то она ограниченная. Обратное неверно (функция Дирихле)

- Много ли интегрируемых функций?

ТЕОРЕМА 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке

ТЕОРЕМА 2. Монотонная ограниченная функция является интегрируемой.

-

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- 1. (договоренность) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

- 2. (договоренность) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3. (линейность) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то функция $cf(x)+dg(x)$ также интегрируема на $[a,b]$, причем

$$\int_a^b [cf(x)+dg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx$$

4. Произведение интегрируемых функций интегрируемая функция. **ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕ СУЩЕСТВУЕТ!**

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема и на $[c,d] \subset [a,b]$.

6. (аддитивность) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на $[a,b]$. При этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула справедлива при любом расположении точек a, b, c

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ

1. Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и интегрируемая, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Если $f(x) \geq m$ на $[a,b]$ и интегрируемая, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a).$$

3. Если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $f(x) > 0$ в некоторой точке, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

4. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируемая на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые на $[a,b]$, $f(x)\geq 0$ и $m\leq g(x)\leq M$. Тогда

$$m\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b f(x)dx$$

- ТЕОРЕМА 3 (о среднем значении). Пусть $f(x)$ интегрируемая на $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$. Существует число $\mu \in [m,M]$, для которого

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Геометрический смысл

- СЛЕДСТВИЕ. Если дополнительно функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует число $\xi \in [a,b]$, для которого

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ТЕОРЕМА 4. Функция $F(x)$ непрерывная.

ТЕОРЕМА 5. Если функция $f(x)$ непрерывная, то функция $F(x)$ дифференцируемая, причем $F'(x)=f(x)$.

- СЛЕДСТВИЕ. (Формула Ньютона-Лейбница)

- Если функция $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ и $\Phi(x)$ – первообразная $f(x)$, то

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

$$1)\ \int\limits_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b;$$

a=0, b=π/2

$$2)\ \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

$$3)\ \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e};$$

$$4)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

ТЕОРЕМА 6. Пусть

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$;

2) *сегмент* $[a, b]$ *является множеством значений некоторой функции* $x = g(t)$, *определенной на сегменте* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *и имеющей на этом сегменте непрерывную производную*;

3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

- ПРИМЕРЫ
- 1. $\int\limits_{1}^{2} \ln x \frac{dx}{x}$
- 2. $\int\limits_{\pi^2/4}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

- ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ
- ТЕОРЕМА 7. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

- ПРИМЕРЫ

$$1)\ \int_1^2 \ln x\, dx$$

$$2)\ \int_1^2 xe^x\, dx$$

$$3)\ \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Длина дуги кривой

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$
$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

t - параметр

Функции **непрерывные**!

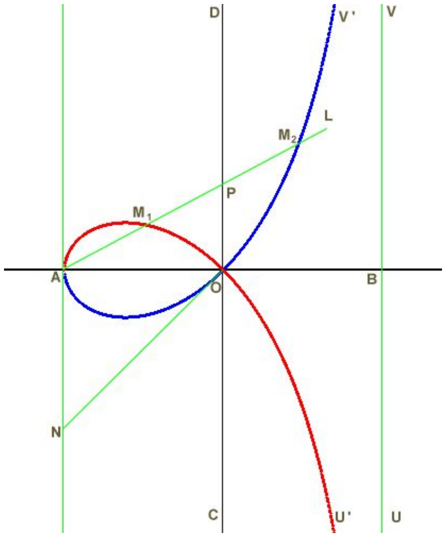
Если разным значениям параметра соответствуют разные точки плоскости, то дуга называется простой.

- ЗАМЕЧАНИЯ
- 1. Входят кривые, заданные уравнениями

  $y=f(x)$.

  2. Параметр не единственный! Непрерывная монотонная функция $u(t)$, u – тоже параметр

- Строфоида $x = a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad y = at\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad -\infty < t < \infty$



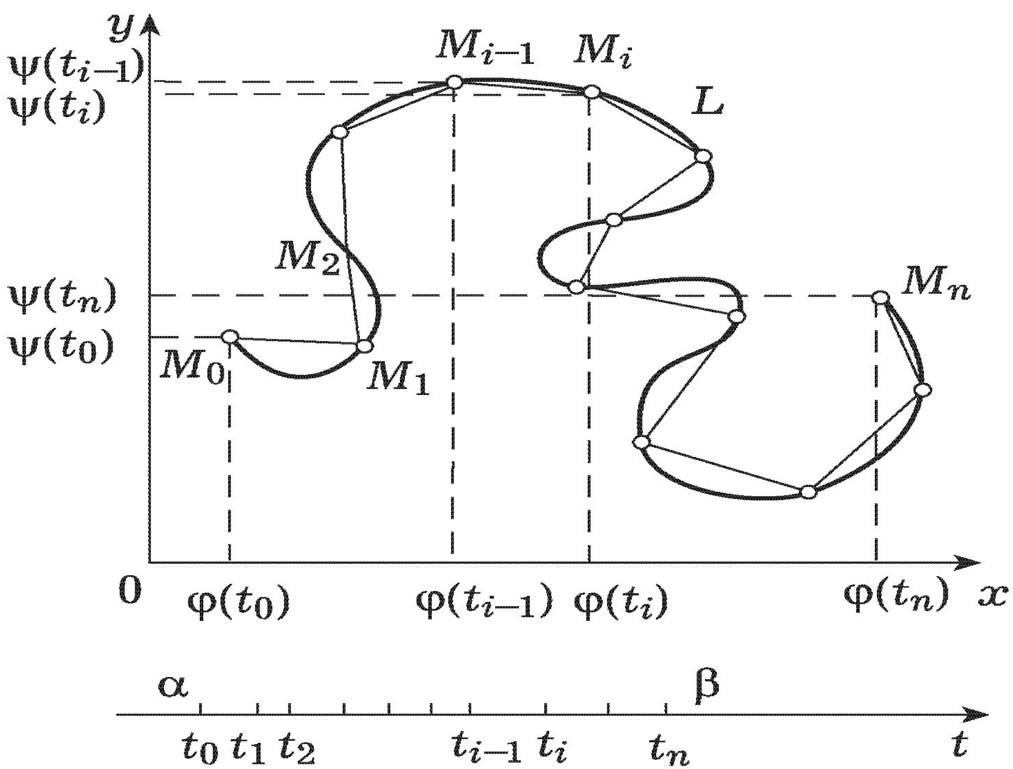
- Простые дуги на множествах $t<0$, $t>0$

- Пространственные кривые

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

- Пример
- $x=r \sin t$, $y=r \cos t$, $z=ct$

- Длина дуги. Диагональ квадрата
- Вписанная ломаная $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$



- Шаг разбиения $\lambda=\max\{\Delta t_i\}$
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Предел длин вписанных ломаных при $\lambda\to 0$, если он существует, называется длиной дуги, дуга в этом случае называется спрямляемой.

- ТЕОРЕМА 8 (Достаточные условия спрямляемости. Вычисление длины дуги)
- Пусть функции $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке [α,β].
- Тогда дуга спрямляемая, ее длина

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

- Для дуги пространственной кривой - аналогично

1. Если дуга спрямляемая, то длина не зависит от параметризации непрерывно дифференцируемой функцией.
2. Если спрямляемая кривая разбита на части, то каждая часть спрямляемая и длина всей дуги равна сумме длин частей.
3. Пусть $l=l(t)$ – длина дуги кривой от α до t.

   l – параметр (натуральный)

- Для кривой $y=f(x)$ $$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

- Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r(\theta)$ $(\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

- **Дифференциал дуги**

$$l(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}\, d\tau$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1$$

- Для пространственной кривой

- Примеры вычисления длины дуги.
- 1. Циклоида

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

- 2. Цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$

$[0, a]$

- 3. Длина дуги эллипса

$$x = a \sin t,\ y = b \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

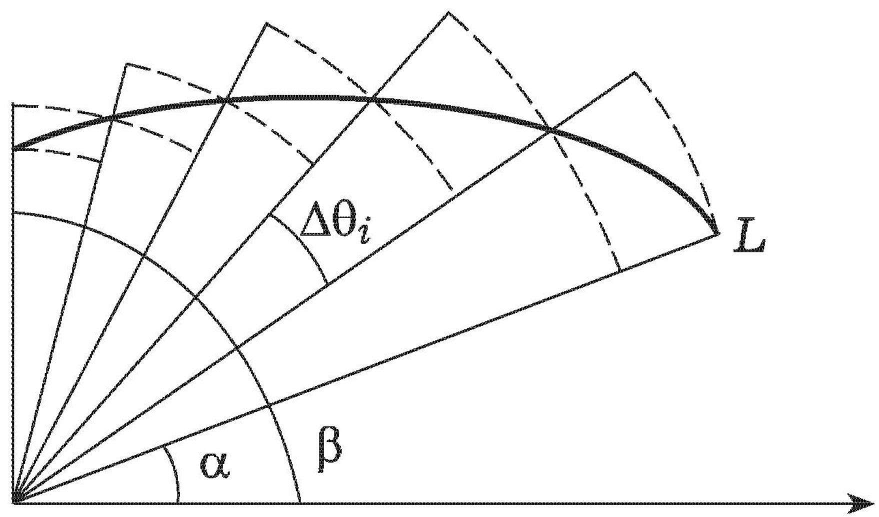
ПЛОШАДЬ ПЛОСКИХ ФИГУР

- 1. Криволинейная трапеция

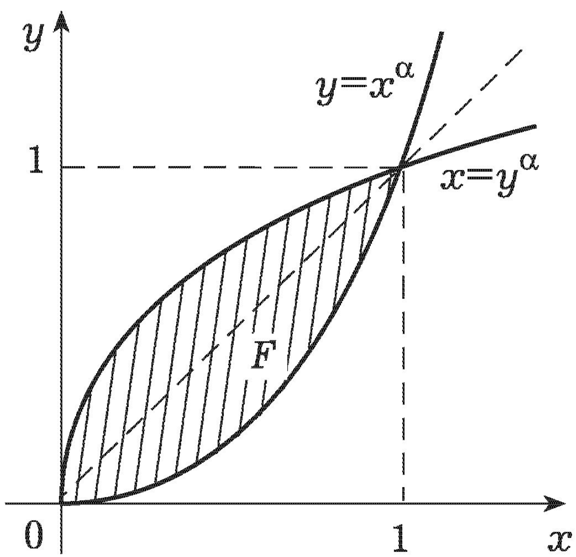
$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

- 2. Криволинейный сектор

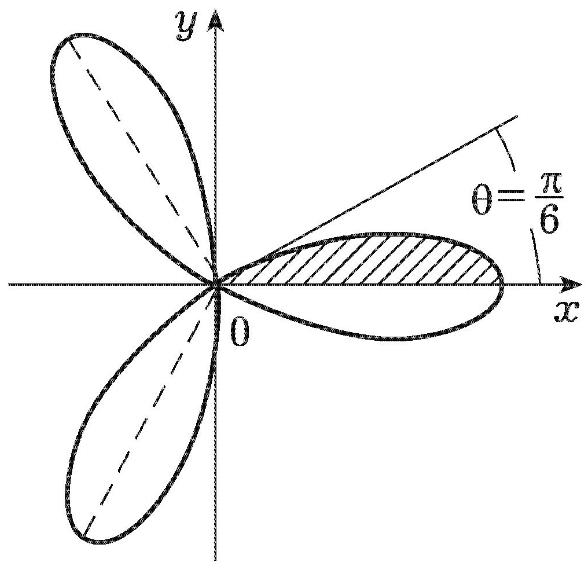
$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta$$



- Примеры
- 1. $y=x^2$, $[0,1]$
- 2. $y = x^\alpha$ и $x = y^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$

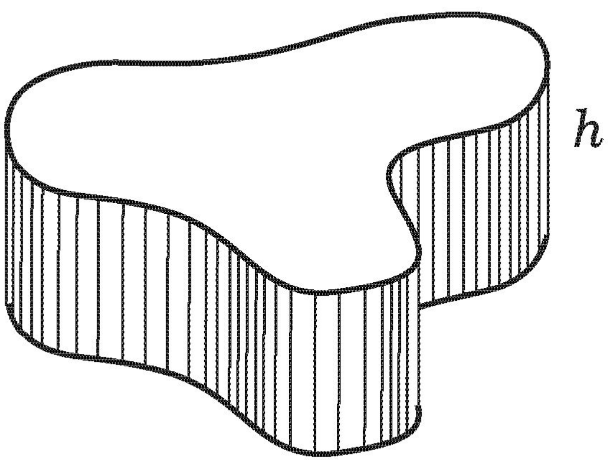


• 3. Трилистник $r = a\cos 3\theta$

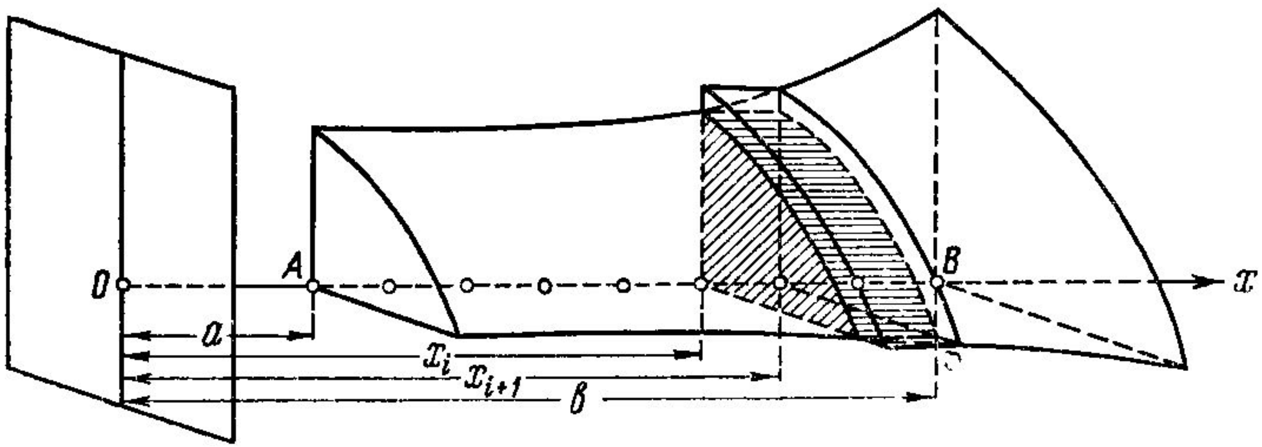


ОБЪЕМ ТЕЛ

- Объем аддитивен
- Объем единичного кубика 1
- ОТСЮДА
- Объем цилиндрического тела $V=Sh$



- $S(x)$ – площадь сечения



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

- Объем тела вращения
- Криволинейная трапеция

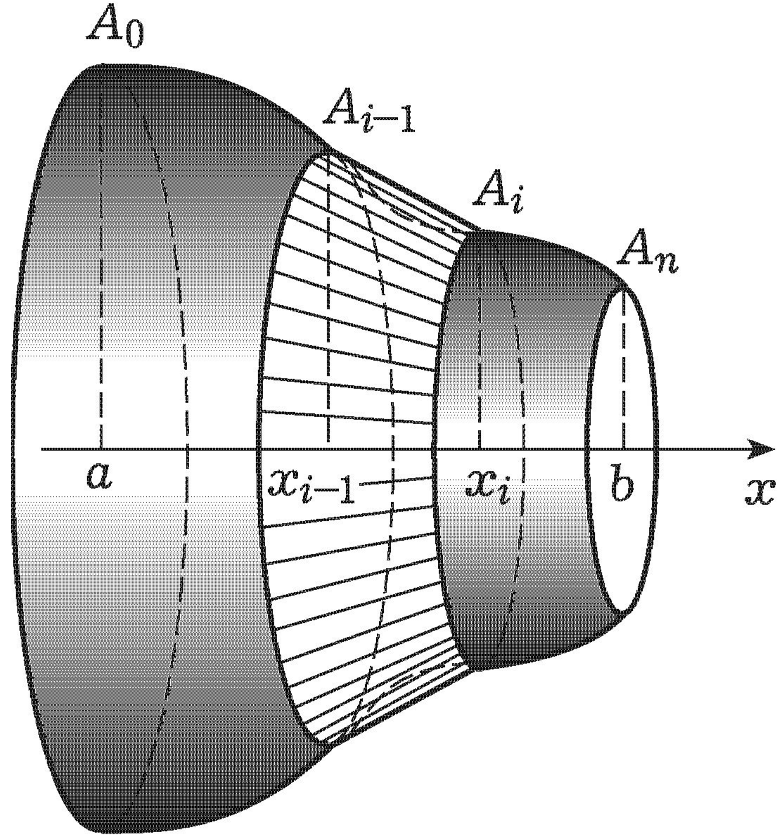
$a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, $f(x)$ – непрерывная функция

Тело получено вращением трапеции вокруг оси абсцисс

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

- ПРИМЕРЫ
- 1. $y=\sin x$ на $[0,\pi]$
- 2. Астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

• ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



- Площадь боковой поверхности конического тела

$$P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i-1} + y_i \right) l_i$$

- $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Площадью поверхности вращения называется

$$P = \lim_{\lambda \to 0} P(x_i)$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

- При параметрическом задании

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

- ПРИМЕРЫ
- 1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- 2. Циклоида

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- Обобщение интеграла на бесконечные промежутки и неограниченные функции
- 1 рода
- Пусть функция $f(x)$

- определена на $[a,\infty)$
- интегрируемая на $[a,b]$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Несобственным интегралом 1 рода называется

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

- Если предел не существует, то интеграл расходится

- Примеры

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$$

- Аналогично

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{a} f(x)dx.$$

- Если $f(x)$ непрерывна на всей прямой, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

- Достаточное условие сходимости НИ 1 рода
- ТЕОРЕМА 9. Если $f(x)\geq 0$, интегрируема на $[a,b]$ при любом $b>a$ и

$$\int_a^b f(x)dx \leq M,$$

то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходится.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2 РОДА

Пусть на полусегменте $[a, b)$ задана функция $f(x)$. Точку b мы будем называть особой, если функция не ограничена на полусегменте $[a, b)$, но ограничена на любом сегменте $[a, b-\alpha]$ $\alpha>0$, заключенном в полусегменте $[a, b)$. Будем также предполагать, что на любом таком сегменте функция $f(x)$ интегрируема. При наших предположениях на полусегменте $(0, b-a)$ задана функция аргумента α

$$F(\alpha)=\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Несобственным интегралом 2 рода называется

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Обозначение $\int_a^b f(x)dx$

Если предел не существует, то интеграл расходится.

- Аналогично, если особая точка – левый конец промежутка.

- ПРИМЕР. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$$

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

- Числовая последовательность

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Числовым рядом называется символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

- Частичные суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Числовой ряд сходится, если существует $S = \lim S_n$.

  S – сумма ряда

  Если предел не существует, то ряд расходится.

- ПРИМЕРЫ
- 1.

$$1-1+1-1+\ldots$$

- 2.

$$1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots$$

- 3.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

- ТЕОРЕМА 10 (необходимый признак сходимости ряда).

- Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится, то $u_i \to 0$.

- ПРИМЕР. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k}$

- ЗАМЕЧАНИЯ.
- 1.

Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

2°. *Если c — отличная от нуля постоянная, $u'_k = cu_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.*

- 3.Сумма сходящихся рядов сходящийся ряд.

РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

- ТЕОРЕМА 11. Для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были ограничены.
- ТЕОРЕМА 12. (признак сравнения) Пусть

$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} u_i'$ -

ряды с положительными членами, причем $\forall i \ u_i \le u_i'$.

Если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i'$, то сходится и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$

Если расходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$, то расходится и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i'$

- ЗАМЕЧАНИЯ.

1. То же самое справедливо, если $\forall i\ u_i \le c u_i'$ при некотором $c>0$.
2. Неравенство может выполняться начиная с некоторого i.

- ТЕОРЕМА 13. (предельный признак сравнения) Если $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} u'_i$ - ряды с положительными ч ми, причем
-
- существует $\lim_{i\to\infty} \frac{u_i}{u'_i} = L > 0,$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

- ПРИМЕРЫ
- 1. $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^i}$$
- 2.

- ТЕОРЕМА 14. (Признак Даламбера)
- 1. Если члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ положительные и

начиная с некоторого номера

то ряд сходится (расходится)

2. Если существует предел

то при $L<1$ ряд сходится,

при $L>1$ ряд расходится

- ТЕОРЕМА 15. (Признак Коши)

1. Если начиная с некоторого номера

то ряд сходится (расходится).

2. Если существует предел

то при $L<1$ ряд сходится,

при $L>1$ ряд расходится

- ПРИМЕРЫ

1.

2.

- ТЕОРЕМА 16. (Интегральный признак сходимости).
- Пусть неотрицательная функция $f(x)$ является невозрастающей на множестве $[1,+\infty)$.

Ряд и

сходятся или расходятся одновременно.

- ПРИМЕРЫ
- 1.
- 2.

- Для произвольных рядов – критерий Коши

  (следствие критерия для последовательностей)

  ТЕОРЕМА 17. Для сходимости ряда

  необходимо и достаточно, чтобы

- Знакопеременные ряды
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ называется абсолютно сходящимся, если

  сходится ряд

- ТЕОРЕМА 18. Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$

сходится условно, если ряд

расходится.

- Перестановки ряда
- ТЕОРЕМА 19. (Коши) Перестановка любого абсолютно сходящегося ряда – абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

- ТЕОРЕМА 20. (Риман) Если ряд сходится условно, то для любого L существует перестановка ряда, сумма которой равна L.

- Знакочередующийся ряд
- ТЕОРЕМА 21. (Признак Лейбница) Если ряд

  удовлетворяет условиям

\-

\- последовательность
убывает и является бесконечно малой,
то он сходится

- Пример

- Следствие. Для ряда лейбницевского типа

- Отсюда, для любого k

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

- Функциональная последовательность

- Функциональный ряд

- Определены на множестве X

- ПРИМЕРЫ
- 1.

- 2. Ряд

- Область сходимости
- Предельная функция для последовательности
- Сумма функционального ряда

- Предельная функция для примера 1.
- e^x сумма ряда их примера 2

Равномерная сходимость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Функциональная последовательность

равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, если

Для рядов аналогично

- Пример 1 – не равномерная сходимость
- ТЕОРЕМА 22. (Критерий Коши равномерной сходимости функц. последовательностей)
- Для равномерной сходимости функц. последовательности на множестве X необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

- ТЕОРЕМА 23. (Критерий Коши равномерной сходимости функц. рядов)
- Для равномерной сходимости функц. ряда на множестве X необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

• ТЕОРЕМА 24. (Признак Вейерштрасса)

Если для функционального ряда

существует сходящиися числовой ряд

такой, что при всех x то функц. ряд сходится равномерно.

МАЖОРАНТА

- ПРИМЕР

- Признак Вейерштрасса ДОСТАТОЧНЫЙ, НО НЕ НЕОБХОДИМЫЙ
- ПРИМЕР.

- ТЕОРЕМА 25. Пусть последовательность НЕПРЕРЫВНЫХ функций

сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$.

Тогда функция $f(x)$ также НЕПРЕРЫВНАЯ.

Для рядов аналогично.

Условие ДОСТАТОЧНОЕ, не НЕОБХОДИМОЕ

- ТЕОРЕМА 26. Пусть последовательность НЕПРЕРЫВНЫХ функций

  сходится РАВНОМЕРНО на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$.

  Тогда последовательность

  сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ к функции

-

- Для всего промежутка

- Для рядов

- ТЕОРЕМА 27. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, причем
- последовательность производных $f'_n(x)$ РАВНОМЕРНО сходится (к функции $g(x)$),
- При некотором $c \in [a,b]$ последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится.

ТОГДА

- последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно (к функции $G(x)$),
- функция $G(x)$ дифференцируемая и $G'(x)=g(x)$.

- Иная форма записи:

- Для рядов: при соответствующих условиях

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

- Далее будем рассматривать случай $x_0=0$.
-

- Область сходимости степенного ряда
- Всегда сходится в 0.
- Может сходиться только в 0

- Может сходиться абсолютно при любом x

- ТЕОРЕМА 28. Пусть степенной ряд сходится при некотором $x \neq 0$ и сходится. не всюду Существует такое число $R > 0$ (радиус сходимости), для которого ряд сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.
- Если сходится всюду, то полагают $R = \infty$.

- Основа доказательства:
- Если ряд сходится, то при $|x_1|<|x_0|$ ряд сходится абсолютно.

$R=\sup\{x\text{: ряд} \quad \text{сходится}\}$

Концы промежутка???

- Для нахождения радиуса сходимости можно использовать признаки Даламбера и Коши

- ПРИМЕР.

СВОЙСТВА СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА

- ТЕОРЕМА 29. Пусть $R>0$ − радиус сходимости степенного ряда, число $r\in(0, R)$. На отрезке $[-r, r]$ степенной ряд сходится равномерно.
- СЛЕДСТВИЕ. Сумма степенного ряда непрерывна на интервале $(-R, R)$.

- ТЕОРЕМА 30. Пусть $R>0$ – радиус сходимости степенного ряда

Радиус сходимости степенных рядов

- полученных почленным дифференцированием и интегрированием исходного ряда, также равен R.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННОЙ РЯД

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, если существует степенной ряд, сумма которого на этом интервале равна $f(x)$.
- Функция, которая разлагается в степенной ряд, называется аналитической на $(-R, R)$.

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Аналитическая функция имеет непрерывные производные любого порядка.

   УСЛОВИЕ НЕОБХОДИМОЕ, НО НЕ ДОСТАТОЧНОЕ!

2. Если функция аналитическая, то коэффициенты степенного ряда определяются однозначно.

- Если на $(-R, R)$,
- то

- Ряд называется рядом

Тэйлора (или Маклорена) функции $f(x)$.

- Когда

  на области сходимости ряда?

Формула Тейлора

Необходимое и достаточное условие:

при всех x из интервала сходимости.

- Остаточный член в форме Лагранжа:

-

  для всякого x (можно рассмотреть ряд)

- ТЕОРЕМА 31. Если для каждого x из интервала существует число M, для которого

  то функция аналитическая.

- По этому признаку при $x \in (-\infty, \infty)$

- Вычисления

- Интегралы (считаем, чт при $t=0$)

- Можно доказать: при $x \in (-1,1)$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Рассматриваем функции, определенные на области X плоскости или пространства (R^2, R^3)

f: $X \to R$.

Обозначения: $f(M)$ ($M \in X$) или $f(x,y)$, $f(x_1,x_2)$, $f(x,y,z)$, $f(x_1,x_2,x_3)$

Окрестности точки $M=(x_1,x_2,x_3)\in X$:

шары $\{N\in X:\rho(N, M)<\varepsilon\}$ или

параллелепипеды $\{(y_1,y_2,y_3)\in X:|y_i-x_i|<\varepsilon\}$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Точка M называется внутренней точкой множества X, если она принадлежит X вместе с НЕКОТОРОЙ окрестностью.
- Точка M называется внешней точкой множества X, если НЕКОТОРАЯ ее окрестность не пересекается с X.
- Точка M называется граничной точкой множества X, если она не является ни внутренней, ни внешней.

- Иначе. Точка граничная, если в ЛЮБОЙ ее окрестности есть как точки, входящие в X, так и точки, не входящие в X.
- Граничные точки множества и его дополнения совпадают.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Множество X называется открытым, если все его точки внутренние (не содержит граничных точек).
- Множество X называется замкнутым, если в него входят все граничные точки.
- ТЕОРЕМА 32. Дополнение открытого множества замкнутое.
- Дополнение замкнутого множества открытое.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Множество называется ограниченным, если оно содержится в некотором круге (шаре).
- (Непрерывная) кривая - вспомним!
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ в R^k называется **сходящейся**, если существует точка $A \in R^k$ такая, что

- A – предел последовательности, $M_n \to A$

- ТЕОРЕМА 33. Для того, чтобы

необходимо и достаточно выполнение условий

Предел последовательности если существует, то единственный.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ в в R^k называется фундаментальной, если

- ТЕОРЕМА 34. (Критерий Коши) Сходимость последовательности точек в R^k равносильна ее фундаментальности.

НАПОМИНАНИЕ. Множество $X \subset R^k$ ограниченное, если оно содержится в некотором шаре, т.е. для некоторого числа A $(\forall M \in X)$ $(\rho(O, M) < A)$

Равносильно с параллелепипедом

Сходящаяся последовательность ограничена.

- ТЕОРЕМА 35. (Больцано-Вейерштрасса)

  Из любой ограниченной последовательности точек в R^k можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.

1. Число b - предел функции $f(M)$ в точке A, если из того, что $M_n \to A$ $(M_n \neq A)$ следует, что $f(M_n) \to b$.
2. Число b - предел функции $f(M)$ в точке A, если

- ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ПРЕДЕЛ НА БЕСКОНЕНОСТИ
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Число b - предел функции $f(M)$ на бесконечности, если

- Арифметические операции
- Если $b=0$, то функция бесконечно малая в точке M.
- ПРИМЕР.
- $(x-1)^p+(y-2)^q$ при $p,q>0$ – бесконечно малая в точке (1,2).

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.

1. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке A, если

- 2. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке A, если

- Функция называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

- Пусть $u=f(M)$. Приращение функции в точке A:

  $\Delta u=f(M)-f(A)$

  $A=(a_1, a_2)$, $M=(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2)$

  $\Delta u=f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2)-f(a_1, a_2)$

- Разностная форма непрерывности:

- Частные приращения:

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУННКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ТЕОРЕМА 36.

Если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке A, то функции $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$ непрерывны в точке A (отношение при $g(A)\neq 0$).

Сложная функция.

Дано: $f(x_1, x_2, x_3)$,

$g(t_1, t_2)=(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))$

Определена функция

$h(t_1, t_2)=f(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))$

$g:R^2\to R^3$, $h:R^3\to R$

$h=g\circ f$ – композиция, суперпзиция

ТЕОРЕМА 37.

Если функции

$x_1(t_1, t_2)$, $x_2(t_1, t_2)$, $x_3(t_1, t_2)$ непрерывны в точке (b_1, b_2),

функция $f(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна в точке

$a_1 = x_1 (b_1, b_2)$, $a_2 = x_2 (b_1, b_2)$, $a_3 = x_3 (b_1, b_2)$,

ТО

функция $h(t_1, t_2)$ непрерывна в точке

(b_1, b_2).

ТЕОРЕМА 38. (Устойчивость знака)

Если функция $f(M)$ непрерывна в точке A и $f(A)\neq 0$, то существует окрестность точки A, в которой функция сохраняет знак.

- ТЕОРЕМА 39.(Аналог теоремы о промежуточном значении)

  Пусть функция $f(M)$ непрерывна на СВЯЗНОМ множестве X; $A,B \in X$. Для любого числа a, расположенного между $f(A)$ и $f(B)$, существует точка $C \in X$, для которой $f(C)=a$.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Замкнутое и ограниченное множество называется компактным.

- ТЕОРЕМА 39. (Теорема Вейерштрасса) Функция, непрерывная на компактном множестве, ограниченная и достигает наибольшего и наименьшего значений.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

- Пусть точка $M(x,y)$ является внутренней точкой области определения функции $f(x,y)$
- Отнош

- Вспомним производные!
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Частной производной функции $f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ по переменной x называется

если предел существует.

Аналогично по y

- Обозначения:

- Примеры
- 1.

- 2.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если

$$\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=$$

$$=A\Delta x+B\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

A,B НЕ ЗАВИСЯТ от $\Delta x,\Delta y$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0}\alpha_1=\lim_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0}\alpha_2=0$$

$\alpha_1,\alpha_2=0$ при $\Delta x=\Delta y=0$

- Другая форма записи.

$$\Delta f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из дифференцируемости следует непрерывность.

- ТЕОРЕМА 40. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то в этой точке существуют частные производные, причем

- ОБРАТНОЕ НЕВЕРНО!

- $u(x,y)$ – график – поверхность.

- Что такое «касательная плоскость к поверхности»?

- На поверхности – точка $N_0=(x_0,y_0,u_0)$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Плоскость π, проходящая через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между этой плоскостью и прямой, проходящей через точку N_0 поверхности и любую точку поверхности $N_1(x,y,u) \neq N_0$, стремится к 0 при $N_1 \to N_0$

- ТЕОРЕМА 41. Если функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то касательная плоскость к графику функции в точке N_0 существует и задается уравнением

- Нормальный вектор к плоскости

- Плоскость проходит через точку N_0.

- Достаточное условие дифференцируемости
- ТЕОРЕМА 42. Если функция $f(x,y)$ имеет НЕПРЕРЫВНЫЕ частные производные в окрестности точки (x,y), то функция в этой точке дифференцируема.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Дифференциалом (полным) дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точке (x,y) называется

- Частные дифференциалы:

Дифференцирование сложной функции

Дано: $f(x_1, x_2, x_3)$,

$g(t_1, t_2)=(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))$

Определена функция

$h(t_1, t_2)=f(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))$

$g{:}R^2\to R^3, f{:}R^3\to R$

$h=g\circ f$ – композиция, суперпозиция

- Точка $A \in R^2$, $B = g(A) \in R^3$
- ТЕОРЕМА 43.

  Пусть

  - функции $x_i(t_1, t_2)$ $(i=1,2,3)$ дифференцируемы в точке A,

  - функция f дифференцируема в точке B.

  ТОГДА

  функция h дифференцируема в точке A,

- ее частные производные равны

ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

- $h(u,v)=f(x(u,v),\ y(u,v))$
- u,v – независимые переменные

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

- $d(cu)=cdu$
- $d(u \pm v)=du \pm dv$
- $d(uv)=udv+vdu$
- $d(u/v)=(vdu-udv)/v^2$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

- $f(x, y, z)$
- $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- Вектор $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный
- Отложим отрезок длины t
- Получим точку

  $M(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$

  $g(t)=f(M)$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Производной функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ называется производная $g'(t)$ при $t=0$, если она существует.
- Обозначение:

- ТЕОРЕМА 44. Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0 , то производная по любому направлению существует.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Градиентом дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор

Градиент – направление наискорейшего возрастания функции, скорость – модуль градиента.

- Для двух переменных

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

- Производные

- Пример: $f(x, y) = x^y$
- Определяются индуктивно

- ТЕОРЕМА 45. Если смешанные производные

  непрерывны, то они равны.

  СЛЕДСТВИЕ. Смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, если они непрерывны.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Функция $f(x,y,z)$ называется n раз дифференцируемой, если все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемые.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Дифференциалом второго порядка функции $f(x,y)$ называется

$d^2f(x,y)=d(df(x,y))$.

- x,y НЕЗАВИСИМЫЕ
- dx, dy тоже
- Тогда
- Неинвариантность формы второго дифференциала

- Индуктивно – дифференциалы более высоких порядков.

- Оператор

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- **Для одной переменной**
- $(n+1)$ раз дифференцируемая функция $F(t)$ на интервале, содержащем отрезок $[0,1]$.

- Дано:

  функция $f(x,y)$, $(n+1)$ раз дифференцируемая в окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$
  точка $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ в этой окрестности.

  $F(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$

  То же для функции любого числа переменных.

- ТЕОРЕМА 46. Существует точка $N \in U$, для которой справедливо равенство

Все дифференциалы вычисляются при $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

- В форме Пеано:

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Функция $f(M)$ $(M \in R^n)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум), если существует такая окрестность точки M_0 в пределах которой $f(M) \geq f(M_0)$ $(f(M) \leq f(M_0))$.
- Локальные экстремумы это локальные максимумы и минимумы.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Пусть A – квадратная симметрическая матрица n-го порядка. Функция вида

  называется квадратичной формой.

- ТЕОРЕМА 47. Если функция $f(M)$ $(M\in R^n)$ имеет в точке M_0
  -все частные производные
  - локальный экстремум,
  то

ОБРАТНОЕ НЕВЕРНО! Примеры: $u=x^2+y^2+z^2$, $u=x^2+y^2-z^2$

Стационарные (критические) точки.

ВИДЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

- 1. Положительно определенные.

$F(M)>0$ при $M=(x_1,\ldots, x_n)\neq 0$

Пример: $F(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$

2. Отрицательно определенные.

$F(M)<0$ при $M=(x_1,\ldots, x_n)\neq 0$

Пример: $F(x_1, x_2)=-x_1^2-x_2^2$

ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ

- 3. Знакопеременная

  $F(M)>0$ при некотором $M \in R^n$

  $F(N)<0$ при некотором $N \in R^n$

  Пример: $F(x_1, x_2)=x_1{}^2-x_2{}^2$

  4. Квазизнакоопределенные

  $F(M)\geq 0$ ($F(M)\leq 0$) при всех M и $F(M)=0$ при некотором $M\neq 0$

  Пример: $F(x_1, x_2)=x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1x_2$

- ТЕОРЕМА 48. Для положительно определенной квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует положительное число m такое, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq m(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

Для отрицательно определенных

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -m(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ трижды дифференцируемая в точке $M_{0.}$

Квадратичная форма относительно $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$

- ТЕОРЕМА 49. Пусть функция $f(M)$ − трижды дифференцируемая в окрестности **стационарной** точки M_0.

  Если форма

  - положительно определенная, то в точке M_0 локальный минимум.

  - отрицательно определенная, то в точке M_0 локальный максимум.

  - знакопеременная, то в точке M_0 локального экстремума нет.

КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА

- Угловые миноры
- Если $\Delta_1>0, \Delta_2>0,\ldots, \Delta_n>0$, то кв. форма положительно определенная
- Если $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0, \Delta_4>0,\ldots$, то форма отрицательно определенная

- Случай двух переменных
- $f(x,y)$, M_0, $df=0$

- ТЕОРЕМА 50. Если $AC-B^2>0$, то функция $f(x,y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум (минимум при $A>0$, максимум при $A<0$)

  Если $AC-B^2<0$, то функция $f(x,y)$ не имеет в точке M_0 локального экстремума.

- Во втором случае:
- Форма $Ax^2+2Bxy+Cy^2$
- $A>0$
- При $x=1$, $y=0$ форма положительная

- При $x=-B/A$, $y=1$ форма отрицательная

- ПРИМЕР
- $f(x,y)=\lambda x^2+y^2-2x-2y$

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

- Задано уравнение $F(x,y,z)=0$
- Например, $x^2+y^2+z^2-1=0$
- $z(x,y)$ - ?

- Вопросы:
- При каких условиях неявная функция существует? Непрерывная? Дифференцируемая?

- ТЕОРЕМА 51. Пусть

  - $F(x_0,y_0,z_0)=0$

  -!!!

  - F дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0).

ТОГДА

- Для любого ε>0 существуют окрестность точки (x_0,y_0)
  и непрерывная и дифференцируемая функция $z(x,y)$, определенная на этой окрестности, такая, что
  - $F(x,y,z(x,y))=0$,
  - $|z(x,y)-z_0|<\varepsilon$

- Частные производные
  $F(x,y,z)=0$

Пример. $xyz=sin(x+y+z)$

- Для двух переменных
  $F(x,y)=0$

Пример. $\sin(x^2+y^2)=\mathrm{e}^{xy}$

- Касательная плоскость к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.
- Полагаем $grad\ F(M_0)\neq 0$
- Уравнение касательной плоскости

- Градиент – нормальный вектор к касательной плоскости (к поверхности)

- Поверхности уровня
- Линии уровня

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

- Даны:
- - функция
- - условие связи.

  Требуется найти
- Экстремум в точках, координаты которых удовлетворяют условию связи

- Пример.
- $z=x^2+y^2$
- Условие связи: $x+y=1$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Говорят, что функция $F(x,y,z)$ достигает в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ условный максимум (минимум) при условии связи $g(x,y,z)=0$, если

- $g(x_0,y_0,z_0)=0$
- существует окрестность U точки M_0 такая, что для любой точки $(x,y,z) \in U$, **для которой $g(x,y,z)=0$,** справедливо неравенство $F(x,y,z) \leq F(x_0,y_0,z_0)$ $(F(x,y,z) \geq F(x_0,y_0,z_0))$.

- ТЕОРЕМА 52. Если в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ достигается условный экстремум функции $F(x,y,z)$ при уравнении связи $g(x,y,z)=0$ и при этом grad $g(M_0)\neq 0$, то
  grad $g(M_0)$ | | grad $F(M_0)$,
  т.е. существует число λ такое, что
  grad $F(M_0)+\lambda$ grad $g(M_0)=0$.

- $\Phi(x,y,z,\lambda)=F(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$ – функция Лагранжа,
- λ - множитель Лагранжа

- Уравнения Лагранжа – НЕОБХОДИМЫЕ условия условного экстремума:

- ПРИМЕР
- $z=x^2-y^2$
- $x^2+y^2=1$

- В многомерном случае

  $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – целевая функция
- Уравнения связи

  $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),\ k < n$

- $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) =$

$= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$

– функция Лагранжа

- Необходимые условия экстремума – уравнения Лагранжа

- $(n+k)$ уравнений с $(n+k)$ неизвестными

Двойной интеграл

- Объем криволинейного цилиндра
- Функция $z=f(x,y)>0$
- Область D на плоскости
- Объем цилиндра (простого) мы знаем

Пусть область D прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$

4 этапа

1. Разбиение на малые прямоугольники
2. Выбор точек
3. Нахождение интегральной суммы
4. Переход к пределу

- 1.
- Выбираем точки $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

  $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,...,n)$

  Выбираем точки $c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$

  $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$ $(j=1,...,m)$

  Разбиение - прямоугольнички D_{ij} со сторонами Δx_i, Δy_j

  Площадь $S_{ij}=\Delta x_i \Delta y_j$

  (nm штук)

- 2. В каждом прямоугольничке – точки $M_{ij}=(\xi_{ij}, \eta_{ij})$

- 3. Интегральная сумма

- Приближение к объему…
- Диаметр D_{ij} равен
-

- 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Двойным интегралом называется

  если он существует.

  Обозначения:

Функция называется интегрируемой.

- ЗАМЕЧАНИЕ. Интегрируемая функция ограниченная
- Вопросы:
- Когда двойной интеграл существует?
- Если существует, как его вычислять?

- ТЕОРЕМА 53. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то двойной интеграл существует.
- Если ограниченная функция непрерывна во всех точках области D кроме точек, расположенных на некоторой спрямляемой кривой (или нескольких спрямляемых кривых), то функция интегрируема.

- ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ D, ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОЙ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ СПРЯМЛЯЕМЫМИ КРИВЫМИ
- Строим прямоугольник
- Опр

- 1. Разбиение области произвольными спрямляемыми кривыми. Получаем подобласти D_i с площадями $S_i\ (i=1,\ldots,n)$
- 2. Выбираем точки $M_i \in D_i$
- 3. Интегральная сумма

4. Диаметр области D_i

$$\operatorname{diam}(D_i) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in D_i\}$$

$$\lambda = \max\{\operatorname{diam}(D_i)\}$$

- Замечание. Определения двойного интеграла в старом и новом смысле эквивалентны.

Свойства двойных интегралов

- 1. Аддитивность

  Если функция $f(x,y)$ интегрируема по области D и область разбита спрямляемой кривой на две области D_1, D_2 без общих внутренних точек, то $f(x,y)$ интегрируема по обеим областям D_1, D_2

2. Линейность

Здесь f, g – функции

α, β – числа

- 3. Произведение интегрируемых функций является интегрируемой функцией.

4. Если f и g – функции, интегрируемые в D и $f \leq g$, то

5. Если функция f интегрируема в области D, то функция $|f|$ - также интегрируема в области D и

6. Если функция f интегрируема в области D,

$U = \sup \{f(M): M \in D\}$,

$V = \inf \{f(M): M \in D\}$,

то существует число $\mu \in [V, U]$, для которого

$S(D)$ – площадь области

7. Если функция f непрерывна в связной области D, то существует точка $M \in D$, для которой

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

- На прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$
- Определим функцию

- К доказательству
- 1.
- Выбираем точки $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,...,n)$

  Выбираем точки $c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$

  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(j=1,...,m)$
- Разбиение на прямоугольнички

- 2. В каждом прямоугольничке – точки $M_{ij}=(\xi_{ij},\eta_{ij})$
- ТЕПЕРЬ
  - Выбираем точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$
  - Полагаем $\xi_{ij}=\xi_i$, $\eta_{ij}=\eta_j$

- 3.

- 4. Сначала устремляем к 0 max$\{\Delta y_j\}$

- Теперь устремляем к 0 $\max\{\Delta x_i\}$

- ПРИМЕРЫ

- Вычисление интеграла по произвольной области
- ТЕОРЕМА 55. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками функций $y=g(x)$, $y=h(x)$ $(g(x)\leq h(x))$.

  Если при любом $x\in[a, b]$ существует

и существует, то

Можно интегрировать в другом порядке!

- Пример.

- Можно разбить на части:
- Кольцо

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

- Отображение $(x(u,v), y(u,v))$

- Взаимно однозначно отображает область плоскости (u,v) на область D плоскости (x,y).

- Функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ непрерывно дифференцируемые.

- Матрица Якоби:

- Якобиан:

- Полагаем, что якобиан всюду отличен от 0.

- Разбиваем область на прямоугольнички

  прямыми u=const, v=const.
- Соответственно область D разбивается на области, близкие к параллелограммам

- Пусть левый нижний угол прямоугольника (u,v), стороны Δu, Δv.

- Вершины “почти параллелограмма”
- $A(x(u,v), y(u,v))$
- $B(x(u+\Delta u,v), y(u+\Delta u,v))$
- $C(x(u,v+\Delta v), y(u,v+\Delta v))$

- Площадь:

- Модуль якобиана – коэффициент искажения площади, знак связан с ориентацией

- Функция $f(x,y)$ интегрируемая на D.
- Обозначение:

- Интегральная сумма

- Диаметры областей связаны неравенствами

- Переходя к пределу при $\max\{\operatorname{diam} D_{ij}\} \to 0$, получаем:

- Полярные координаты
- $x = r \cdot \cos\phi$, $y = r \cdot \sin\phi$

- ПРИМЕР

- ПРИМЕР (интеграл Эйлера-Пуассона)

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

- На плоскости xy – область D

- Поверхность π задана уравнением $z(x,y)$ ($(x,y) \in D$)

1. Область D разбиваем на части D_i с площадями ΔS_i $(i=1,\dots,n)$

2. Выбираем точки $P_i \in D_i$

В каждой точке $M_i(P_i, f(P_i))$ проводим касательную плоскость к поверхности

$\Delta\sigma_i$ – площадь области на касательной плоскости, проекция которой совпадает с D_i.

- 3. Находим

  $\lambda = \max\{\mathrm{diam}\,(D_i)\}$

- 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Площадью поверхности π называется

- Вычисление

  γ_i – угол между нормалью к поверхности в точке M_i и осью z

  $$\Delta\sigma_i = \Delta S_i / |\cos \gamma_i|$$

  Вектор нормали: (в точке P_i)

  Вектор $k = (0,0,1)$

- ПРИМЕРЫ
- 1. Площадь сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$
- 2. Площадь части цилиндра $x^2+y^2=a^2$, которая вырезается цилиндром $x^2+z^2=a^2$

ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

- Вектор-функция скалярного аргумента t

- Если вектора отложить от начала координат, то концы векторов пробегают кривую – годограф вектор-функции.

- Предел вектор-функции (совпадает с покоординатным)
- Непрерывность
- Производная , если не равна **0,** направлена по касательной к годографу.

- Правила дифференцирования
- 1. Производная постоянной вектор-функции равна 0.
- 2. Производная суммы равна сумме производных.
- 3.

$(u(t)$ – скалярная функция$)$

- 4. (частный случай)
- 5.
- 6.
- 7. Если $t=t(\tau)$, тс направление касательной не зависит от параметризации

- Если

  то плоскость, проходящая через точку годографа и параллельная

  м

  называется соприкасающейся плоскостью к кривой.

- Особые точки – точки, в которых

  или не существует