Наближене обчислення визначеного інтегралу від функції однієї змінної

Лекція 7

Кафедра вищої та прикладної математики

Українська інженерно-педагогічна академія

2

План лекції

1. Задача чисельного інтегрування.
2. Квадратурні формули прямокутників.
3. Квадратурна формула трапецій.
4. Квадратурна формула Сімпсона.
5. Квадратурна формула Гаусса.

1. Задача чисельного інтегрування

Задача **чисельного інтегрування** полягає в знаходженні наближеного значення інтегралу

$$J[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

де f(x) — задана функція.

Не для кожної елементарної функції первісна є теж елементарною. Поширеними також є ситуації, коли підінтегральна функція подається графіком або таблицею експериментально одержаних значень.

У всіх цих випадках не можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца і тому вдаються до чисельних методів інтегрування. Чисельні методи дозволяють знайти значення інтегралу безпосередньо по значеннях підінтегральної функції f(x) і не залежать від способу її подання.

1. Задача чисельного інтегрування.

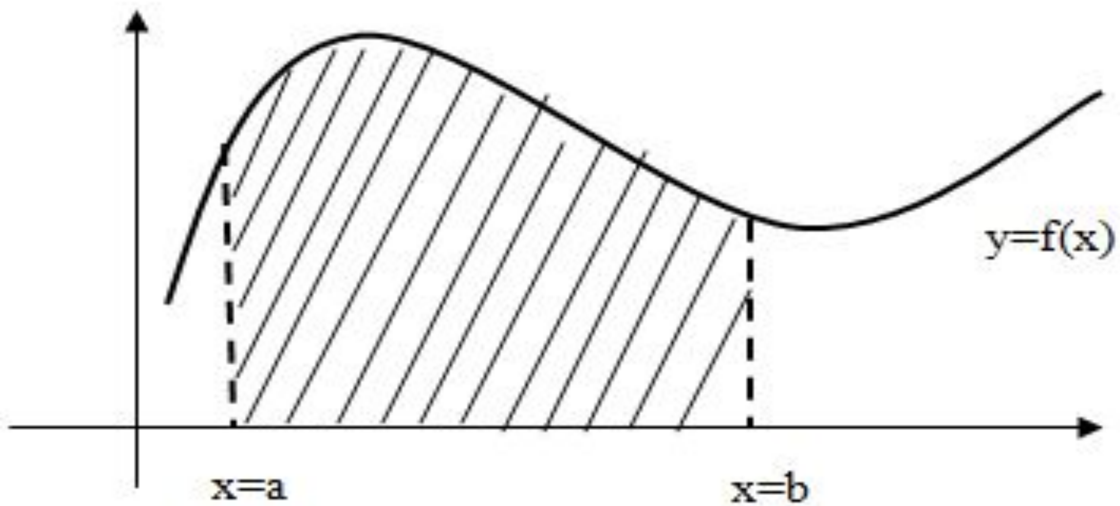
Суть чисельних методів полягає в заміні підінтегральної функції допоміжною, інтеграл від якої легко обчислюється в елементарних функціях. Найчастіше $f(x)$ замінюється деяким інтерполяційним многочленом, що призводить до так званих квадратурних формул:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_n f(x) \qquad (1)$$

Де x_i - вузли інтерполяції, A_i- коефіцієнти, $R_n(f)$ – залишковий член або похибка методу.

1. Задача чисельного інтегрування

Відомо, що $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженної графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a, x = b$.



Алгоритм обчислення значення інтегралу за допомогою квадратурної формули полягає в наступному.

1. Відрізок інтегрування $[a,b]$ розбивається на n частин $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$

2. Наближено обчислюються значення площ, що відповідають кожному відрізку.

3. Сума цих площ і дає наближене значення інтегралу.

1. Задача чисельного інтегрування.

В залежності від способу розбиття відрізку інтегрування $[a,b]$ системою точок (вузлів інтерполяції) $x_i, i=\overline{0,n}$, розрізняють два підходи до побудови квадратурних формул.

В залежності від способу розбиття відрізку інтегрування $[a,b]$ системою точок (вузлів інтерполяції) $x_i, i=\overline{0,n}$, розрізняють два підходи до побудови квадратурних формул.

При **першому підході** місцеположення і довжина інтервалів розбиття обираються заздалегідь, на початку обчислень. Для рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + ih,\ h=\frac{b-a}{n},\ x_0=a,\ x_n=b,\ i=\overline{0,n}$$

квадратурні формули називаються формулами **Ньютона-Котеса.** Вони розрізняються степенями використаних інтерполяційних многочленів. Широко застосовуються формули прямокутників, трапецій і Сімпсона.

При **другому підході** місцеположення і довжина інтервалів обираються таким чином, щоб досягти найвищої точності при заданому числі інтервалів n (формула Гаусса).

2. Квадратурні формули прямокутників

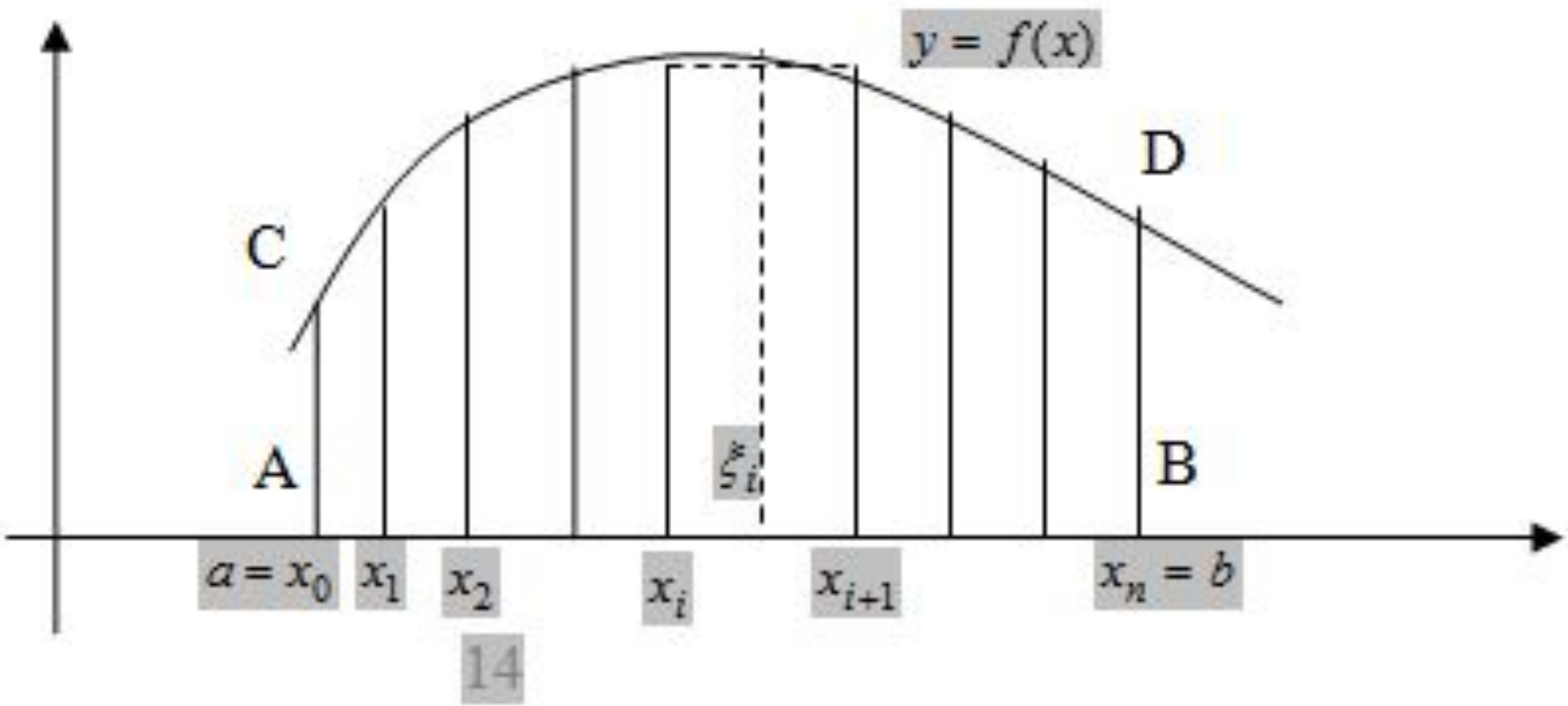
Квадратурна формула прямокутників випливає з геометричного змісту визначеного інтеграла, як площі криволінійної трапеції. **Для знаходження площі цієї трапеції потрібно**:

1. Розібити її основу (відрізок інтегрування $[a,b]$) точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n рівних частин довжиною $h = \dfrac{b-a}{n}$.

2. Через ці точки провести прямі $x = x_i,\ i = \overline{0,n}$, паралельно осі OY. Як результат, криволінійна трапеція розіб'ється на n смужок шириною h. Кожну смужку наближено замінемо прямокутниками висотою $f(\xi_i)$ де ξ_i – довільна точка на відрізку $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$ Площі прямокутників рівні $S_i = f(\xi_i)h,\ i = \overline{1,n}$ Підсумовуючи площі всіх прямокутників, одержимо наближене значення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)\right). \qquad (2)$$

2. Квадратурні формули прямокутників

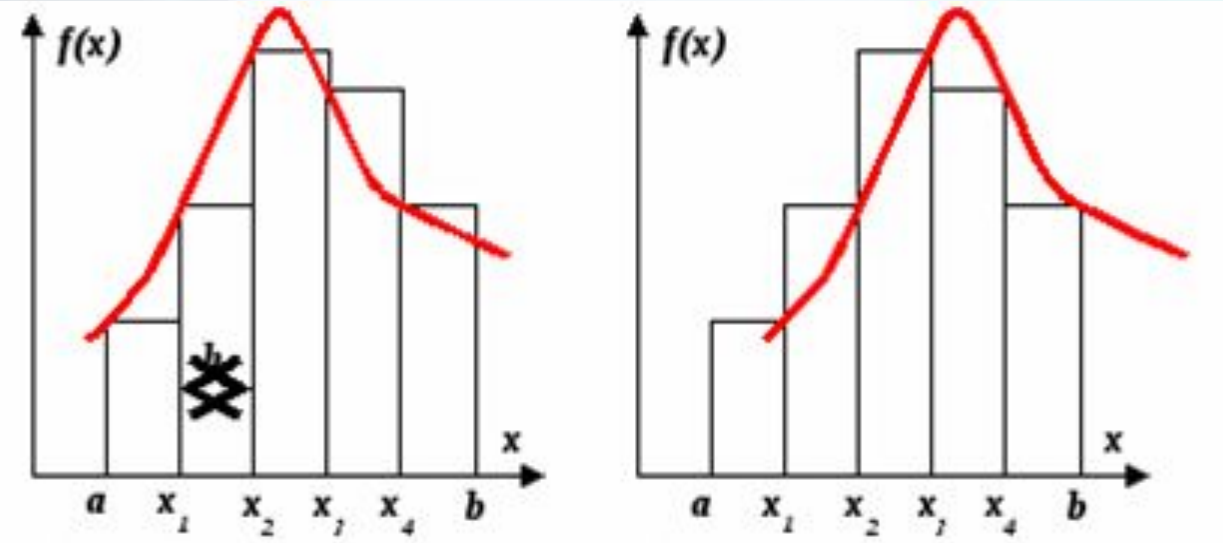


2. Квадратурні формули прямокутників

Поклавши $\xi_i = x_{i-1}$, або $\xi_i = x_i$, або $\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, отримуємо три формули прямокутників (лівих, правих і середніх):

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_l = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k);$$

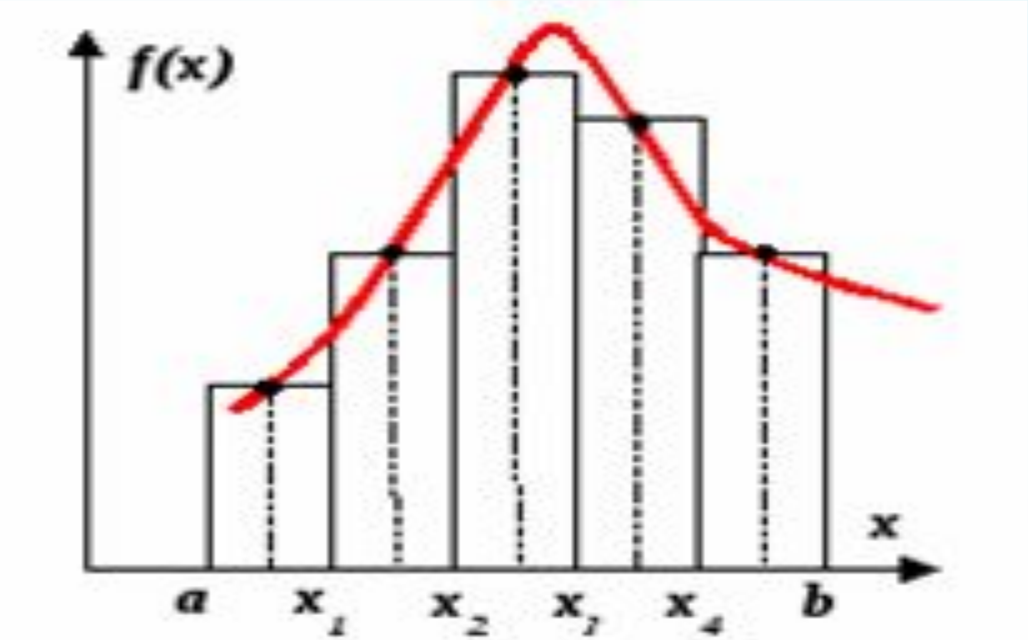
$$\int_a^b f(x)dx \approx I_r = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k);$$



2. Квадратурні формули прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_m = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0+\frac{h}{2})+f(x_1+\frac{h}{2})+\cdots+f(x_{n-1}+\frac{h}{2})\right)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k+\frac{h}{2})=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{2k-1}{2}h).$$



2. Квадратурні формули прямокутників

Похибка інтеграла, обчисленого за формулою середніх прямокутників, оцінюється за формулою:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2, \qquad (3)$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, якщо $f(x)$ - два рази неперервно диференційовна на $[a,b]$, тобто $f(x) \in C^2[a,b]$.

Якщо треба обчислити інтеграл з похибкою не більшою ε, то необхідна кількість частин n розбиття інтервалу інтегрування знаходиться із нерівності:

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{24\varepsilon}}. \qquad (4)$$

2. Квадратурні формули прямокутників

Приклад. Побудувати квадратурні формули середніх прямокутників $I1$, трапецій $I2$, Сімпсона $I3$ та формулу Гаусса $I4$ для наближеного обчислення визначеного інтегралу в межах від a до b від функції однієї змінної, поділивши відрізок інтегрування на 6 частин, за даними таблиці 1. Знайти похибки обчислення визначеного інтегралу.

Таблиця 1.

Підінтегральна функція $f(x)$	Інтервал інтегрування $[a,b]$	Первісна функція $F(x)$
$x\sqrt{x^2+4}$	$[0;1.2]$	$\frac{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{3}$

2. Квадратурні формули прямокутників

Побудуємо квадратурну формулу середніх прямокутників. Візьмемо $n=6$ і знайдемо значення підінтегральної функції у вузлах $x_k = a + (2k-1)\dfrac{h}{2}$, $k = 1,\ldots,6;$ $h = \dfrac{1.2-0}{6} = 0.2,$ $a = 0.$

Таблиця 2

k	x_k	$f(x_k)$
1	0,1	0,2002
2	0,3	0,6067
3	0,5	1,0308
4	0,7	1,4833
5	0,9	1,9739
6	1,1	2,5108
		$s = 7,8057$

Згідно з формулою середніх прямокутників

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}\,dx \approx h\sum_{k=1}^{6} f(x_k) = 0.2 \cdot 7,8057 = 1.56114 \approx 1.5611.$$

3. Квадратурна формула трапецій

Квадратурна формула трапецій також випливає з геометричного змісту визначеного інтеграла, як площі криволінійної трапеції.

Для знаходження площі цієї трапеції:

Крок 1 і 2 – з формули прямокутників.

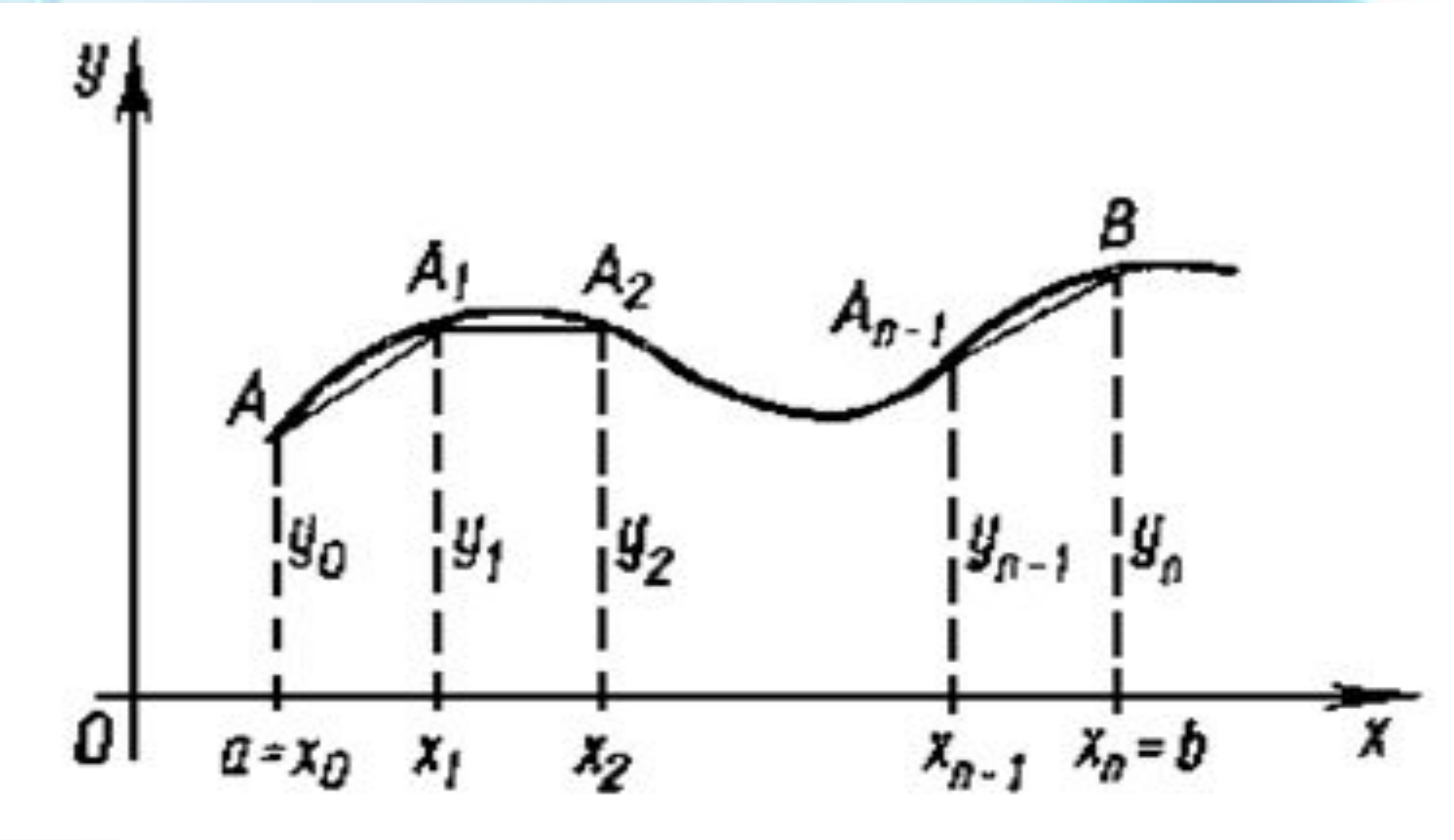
Як результат, криволінійна трапеція розіб'ється на n смужок шириною h. Кожну смужку наближено замінемо прямолінійною трапецією з основами $y_i = f(x_i)$, $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ і висотою $h(i = \overline{0, n-1})$.

Площі прямолінійних трапецій дорівнюють $S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}h, i = \overline{0, n-1}$. Підсумовуючи площі всіх прямолінійних трапецій, отримаємо наближене значення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h =$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

3. Квадратурна формула трапецій



3. Квадратурна формула трапецій

Приклад. Знайдемо значення підінтегральної функції y_i у вузлах $x_i = a + \frac{b-a}{n} i, (i = \overline{0,n})$, тобто $x_i = 0 + \frac{1.2-0}{6} i, i = \overline{0,6}$ (див. табл. 3.).

Таблиця 3.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,0	0,0000	4	0,8	1,7233
1	0,2	0,4020	5	1,0	2,2361
2	0,4	0,8158	6	1,2	2,7989
3	0,6	1,2528			

Згідно з формулою трапецій

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}\,dx \approx \frac{1.2-0}{6}\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{5} y_i + \frac{y_6}{2}\right) =$$

$$= 0,2\left[\frac{0}{2} + 0.4020 + 0.8158 + 1.2528 + 1.7233 + 2.2361 + \frac{2.2789}{2}\right] = 1,56589 \approx 1,5659.$$

4. Квадратурна формула Сімпсона

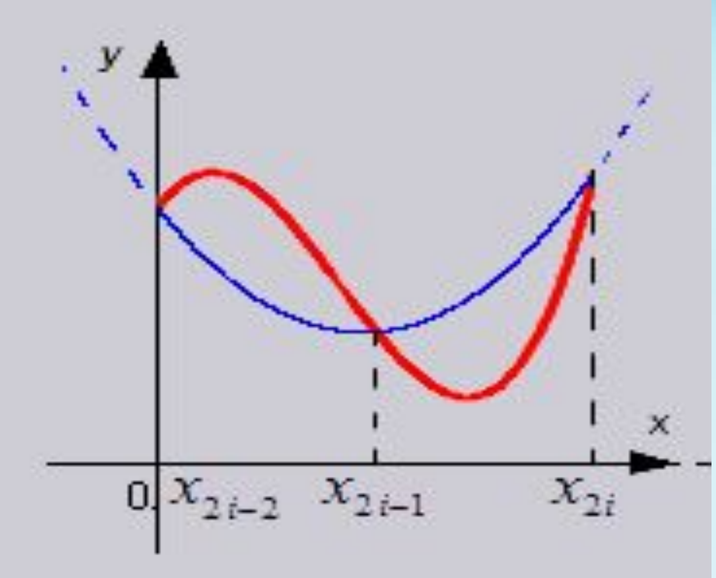
При парній кількості інтервалів розбиття $n = 2m$ і заміні підінтегральної функції на кожних двох суміжних частинах параболою, що проходить через точки $(x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}), (x_{2i+2}, y_{2i+2}), i = \overline{0, m-1}$, квадратурна формула набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\right). \qquad (9)$$

Цей вираз отримав назву формули Сімпсона або формули парабол. Значення функції $f(x)$ у вузлах з непарними номерами $x_1, x_3, \cdots, x_{n-1}$ містяться у формулі з коефіцієнтом 4, у вузлах з парними номерами $x_2, x_4, \cdots, x_{n-2}$ - з коефіцієнтом 2, а в точках $x_0 = a, x_n = b$ - з коефіцієнтом 1.

Геометричний зміст формули Сімпсона полягає в наступному. Через три послідовні точки з ординатами $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, i = \overline{1, n-1}$ розбиття проводиться парабола, і визначається площа одержаної фігури. Сума площ всіх побудованих таким чином фігур дає наближене значення інтегралу.

4. Квадратурна формула Сімпсона



Якщо $f(x)$ має кусково-неперервну $f''(x)$ на $[a,b]$ і $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, то для залишкового члена квадратурної формули Сімпсона справедлива оцінка

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{81n^2} M_2. \qquad (10)$$

При наявності на відрізку $[a,b]$ неперервної похідної четвертого порядку підінтегральної функції оцінка похибки відсікання визначається формулою

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \qquad (11)$$

де $M_4 = \max\limits_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|$.

4. Квадратурна формула Сімпсона

Приклад. Використаємо дані з таблиці 3. Тоді, згідно з формулою Сімпсона маємо

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}\,dx \approx \frac{1.2-0}{18}\big(f(x_0)+4(f(x_1)+$$

$$+f(x_3)+f(x_5))+2(f(x_2)+f(x_4))+f(x_6)\big)=1,56271\approx 1,5627.$$

На практиці для оцінки похибки часто обчислюють інтеграл з кроком h і з кроком $\frac{h}{2}$ і вважають, що співпадаючі десяткові знаки результату є точними. При необхідності n подвоюють. Можна також скористатись правилом Рунге для оцінки цієї похибки:

$$\Delta \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{15}, \qquad (14)$$

де I_n - значення інтеграла, обчисленого з кроком h, а I_{2n} - з кроком $\frac{h}{2}$.

5. Квадратурна формула Гаусса

У формулах прямокутників, трапецій і парабол використовуються рівновіддалені вузли при довільній їх кількості.

Суть формул Гаусса полягає в наступному: при заданій кількості інтервалів розбиття треба розмістити їх кінці так, щоб одержати найвищу точність інтегрування.

В математичному плані це означає вибір коефіцієнтів A_i, вузлів t_i, $(i=\overline{1,n})$ квадратурних формул Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) + R_n(f) \qquad (15)$$

такими, щоб ці формули були точними для многочленів найвищого можливого степеня N. Можна довести, що при n вузлах точно інтегруються всі многочлени степеня $N \leq 2n-1$.

5. Квадратурна формула Гаусса

В результаті формула Гаусса набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \tilde{R}_n(f), \tag{20}$$

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$; $\tilde{R}_n(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n(f)$, або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \tag{25}$$

Квадратурна формула Гаусса забезпечує високу точність інтегрування при невеликій кількості вузлів.

Для вузлів t_i і коефіцієнтів A_i складені таблиці, які можна знайти у довідниках.

Приклад. За формулою (25) маємо

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}\,dx \approx \frac{1.2-0}{2}\sum_{k=1}^{5} A_i f(x_i),$$

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i = 0,6 + 0,6t_i$.

Значення $t_i, x_i, A_i, f(x_i), i = \overline{1,5}$ наведені в таблиці 4.

5. Квадратурна формула Гаусса

Таблиця 4.

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i	$A_i f(x_i)$
1	−0,906180	0,0563	0,1126	0,236927	0,0267
2	−0,538470	0,2769	0,5591	0,478629	0,2676
3	0	0,6000	1,2528	0,568889	0,7127
4	0,538470	0,9231	2,0333	0,478629	0,9732
5	0,906180	1,1437	2,6350	0,236927	0,6243
					$s = 2,6045$

Користуючись формулою (25), дістаємо

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx \approx \frac{1.2}{2}\left(A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)+A_3 f(x_3)+A_4 f(x_4)+A_5 f(x_5)\right) = 0,6\cdot 2,6045 = 1,5627.$$

5. Квадратурна формула Гаусса

Обчислимо абсолютні похибки формул чисельного інтегрування функції за формулою $\Delta = |I^* - I|$; тут I^* - це точне значення інтеграла, а I - значення інтеграла, отримане в результаті застосування певної формули інтегрування.

Знайдемо точне значення інтеграла

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+4} = t; x^2+4 = t^2; \\ 2xdx = 2tdt, xdx = tdt; \\ \text{при} \quad x = 0 : t = \sqrt{4} = 2; \\ \text{при} \quad x = 1,2 : t = \sqrt{5,44} \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^{\sqrt{5,44}} t \cdot tdt = \int_2^{\sqrt{5,44}} t^2 \cdot dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_2^{\sqrt{5,44}} = \frac{1}{3}((\sqrt{5,44})^3 - 2^3) = 1,5627171077 \approx 1,5627.$$

5. Квадратурна формула Гаусса

Отже, абсолютні похибки наближення рівні:

$$\Delta_{\text{сер.}} = |1{,}5627 - 1{,}5611| = 0{,}0016; \quad \Delta_{\text{тр.}} = |1{,}5627 - 1{,}5659| = 0{,}0032;$$

$$\Delta_{\text{Сімс.}} = |1{,}5627 - 1{,}5627| = 0{,}0000; \quad \Delta_{\text{Гаусс.}} = |1{,}5627 - 1{,}5627| = 0{,}0000.$$

Якщо необхідні значення функції обчислювати з більшою кількістю знаків після коми, то похибка наближення даного інтеграла за формулою Сімпсона буде $4 \cdot 10^{-6}$, а за формулою Гаусса $3 \cdot 10^{-8}$.

Висновок: квадратурна формула Гаусса дає найточніший результат в порівнянні з іншими формулами при обчисленні даного інтеграла.

6. Висновки

Порівняльний аналіз квадратурних формул

Теоретичний і експериментальний аналіз формул чисельного інтегрування показав, що:

1) для функцій, що мають неперервні похідні досить високого порядку, при однаковій кількості вузлів формули Гаусса дають значно точніший результат, ніж формула Сімпсона, а остання - більш точний результат, ніж формула прямокутників. При цьому для одержання однакової точності за формулою Гаусса необхідно виконати менше операцій, ніж за формулою Сімпсона, а за останньою - менше, ніж за формулами прямокутників або трапецій. Але для формули Гаусса треба зберігати в пам'яті ЕОМ всі значення вузлів t_i і коефіцієнти A_i;

2) формула Гаусса забезпечує високу точність при невеликій кількості вузлів, тому її особливо вигідно застосовувати при інтегруванні складних функцій, на обчислення значень яких у вузлах витрачається багато часу. Але для функцій малої гладкості, а також для функцій, що мають розриви похідних, всі вказані формули дають приблизно однакову точність;

3) при інтегруванні функцій, що задані таблицею експериментальних значень, використання формули Гаусса майже неможливе. Формула Сімпсона є достатньо точною, зручно програмується для ЕОМ і тому широко використовується у практичних розрахунках.