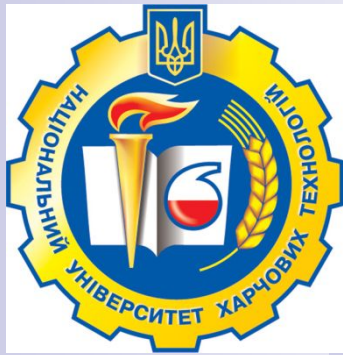




Кафедра вищої математики ім. проф. Можара В.І.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План

1. Коло. Канонічне рівняння кола
2. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса
3. Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи
4. Парабола. Канонічне рівняння параболи
5. Приклади розв'язання типових завдань
6. Запитання для самоконтролю

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай задано загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутки змінних x і y :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Дане рівняння визначає *коло* при $A = B \neq 0$ або *еліпс* при $AB > 0$;

гіперболу при $AB < 0$;

параболу при $A = 0, B \neq 0$ (або $B = 0, A \neq 0$).

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

При цьому можливі випадки виродження.

Для *еліпса* (кола) – в точку або уявний еліпс (коло);

для *гіперболи* – в пару прямих, що перетинаються;

для *параболи* – в пару паралельних прямих.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Коло

Колом називається множина точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

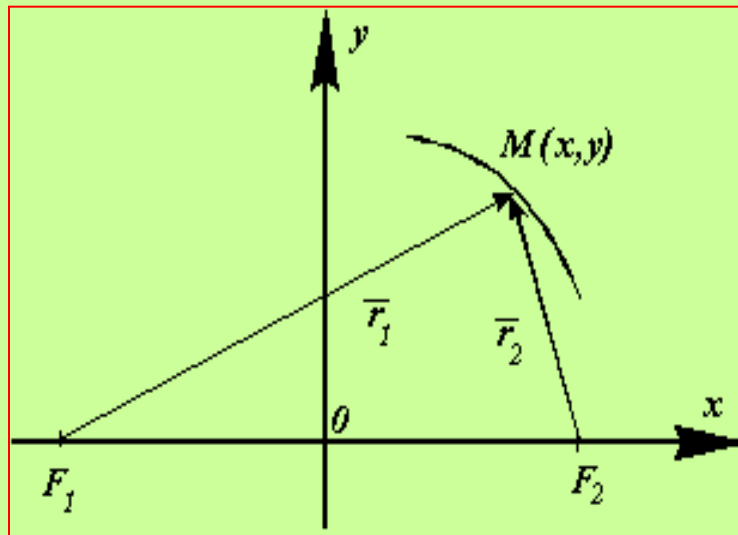
В прямокутній системі координат Oxy через точку $C(a;b)$ позначимо *центр кола*, через $M(x;y)$ – довільну точку площини і через R – *радіус кола*. Точка M лежить на колі тоді і лише тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R, \quad \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.}$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 , які називаються фокусами, є величина стала і більша ніж відстань між фокусами.



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Еліпс

Нехай довжина відрізка F_1F_2 дорівнює $2c$,

тоді $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$; $M(x; y)$ – довільна точка еліпса;

$r_1 = (x + c; y)$ і $r_2 = (x - c; y)$ – фокальні радіуси.

Позначимо суму відстаней від довільної точки $M(x; y)$ еліпса до фокусів – через $2a$.

За означенням еліпса справедливе співвідношення:

$$|r_1| + |r_2| = 2a, \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Еліпс

Після перетворень $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$,
позначивши через $b^2 = a^2 - c^2$, $a > c$, маємо
 $x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Або $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — *канонічне рівняння еліпса*.

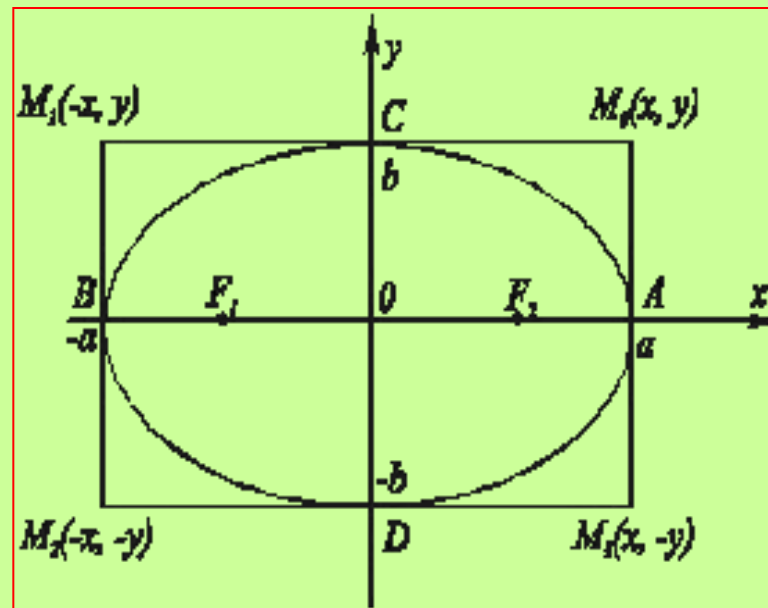
Початок координат *є центром симетрії і називається центром еліпса*.

Точки $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, b)$ і $D(0, -b)$ — вершини еліпса.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Еліпс

Параметри a і b , називаються його півосями.



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Еліпс

Якщо півосі еліпса рівні, тобто $a = b$, $c^2 = a^2 - b^2 = 0$, то еліпс набуває форму кола.

Ексцентриситетом еліпса називають величину $e = c/a$, $e < 1$, так як $a > c$.

Методом виділення повних квадратів відносно кожної змінної рівняння $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ можна привести до вигляду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

де x_0, y_0 – координати центра еліпса; a і b – півосі.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 , які називаються фокусами, є величина стала і менша ніж відстань між фокусами.

Вводячи аналогічні позначення, як і у випадку еліпса, *виходячи із означення гіперболи* можна записати рівність:

$$\left| |r_1| - |r_2| \right| = 2a,$$

$$\text{або} \quad \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Гіпербола

Після перетворень $\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$,
позначивши через $b^2 = c^2 - a^2$, $c > a$, маємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

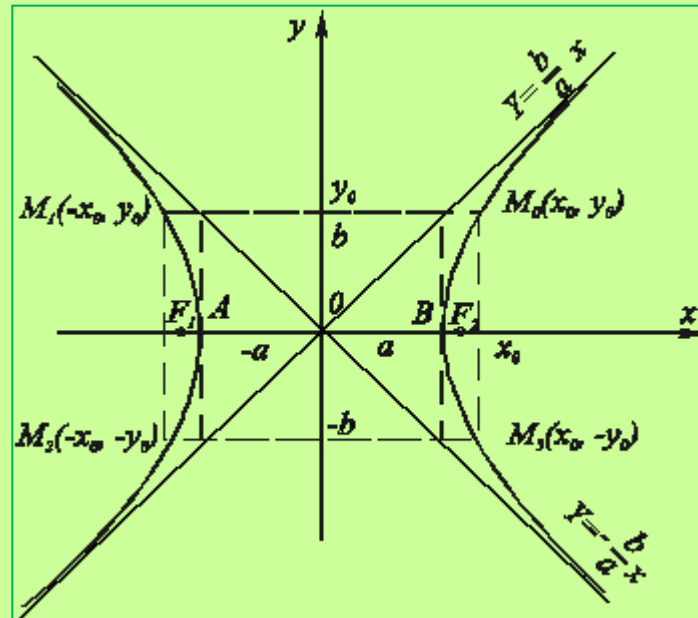
—канонічне рівняння гіперболи, вітки якої
направлені вліво і вправо по осі Ox .

Початок координат є центром симетрії, називається
центром гіперболи.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Гіпербола

Точки $A(-a;0)$ і $B(a;0)$ – вершини гіперболи;
 a – дійсна півось, b – уявна.



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Гіпербола

Ексцентриситет гіперболи $e = c/a$ так, як $c > a$ де c – половина фокусної відстані гіперболи, a – довжина дійсної півосі гіперболи, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Гіперболи, вітки якої направлені *вверх* і *вниз* по осі Oy описуються рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

$a^2 = c^2 - b^2$, b – дійсна півось, а a – уявна,

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи

Прямі $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x$ – *асимптоти гіперболи*.

Якщо центр гіперболи не співпадає із початком координат, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{або } \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1,$$

де x_0, y_0 – *координати центра гіперболи*.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

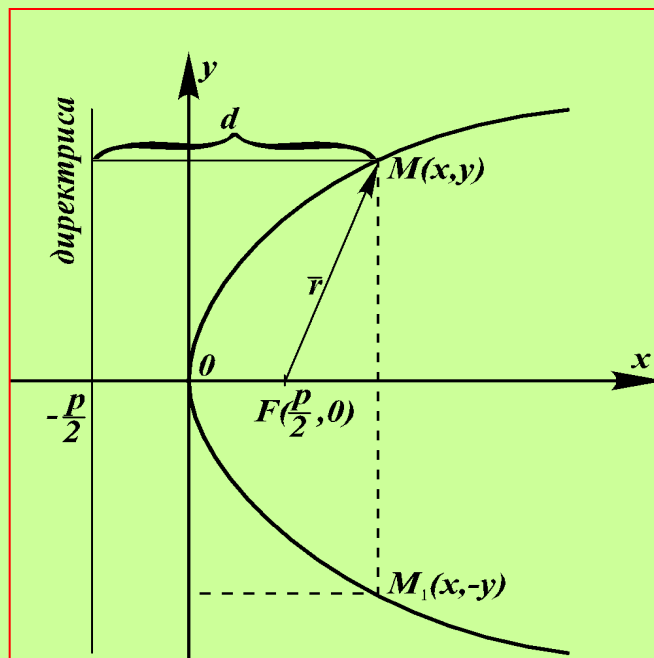
Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F , яка називається фокусом, і від даної прямої l , яка називається директрисою.

Нехай $F(p/2; 0)$, $p > 0$ і назвемо p *параметром* параболи;

$r = (x - p/2; y)$ — *фокальний радіус*, що з'єднує фокус $F(p/2; 0)$ з довільною точкою параболи $M(x; y)$,

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

$|r| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$; відстань від точки M до *директриси* дорівнює $d = p/2 + x$.

Тоді для точок параболи і тільки для них, відповідно до означення цього геометричного місця точок, маємо

$$|r| = d,$$

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = p/2 + x,$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4 ,$$

$$y^2 = 2px.$$

Отримали канонічне рівняння параболи; $x > 0$, точка $O(0; 0)$ – вершина параболи.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

У випадку, *якщо вершина параболи не співпадає із початком координат*, рівняння параболи має вигляд

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$$

– рівняння *параболи* з вершиною в точці $C(x_0; y_0)$, симетричної відносно прямої $y = y_0$ (*вітки параболи вправо або вліво*);

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$$

- рівняння *параболи* з вершиною в точці $C(x_0; y_0)$, симетричної відносно прямої $x = x_0$ (*вітки параболи вгору або вниз*).

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

Приклад. **Встановити** **тип** **кривої**

$25x^2 + 9y^2 + 100x - 18y - 116 = 0$ **та побудувати її.**

Розв'язання.

За умовою $A = 25$, $B = 25$, $AB > 0$, то рівняння описує еліпс. Далі *виділимо повний квадрат відносно змінної x та змінної y :*

$$25(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) - 116 = 0,$$

$$25(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4) + 9(y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1 - 1) - 116 = 0,$$

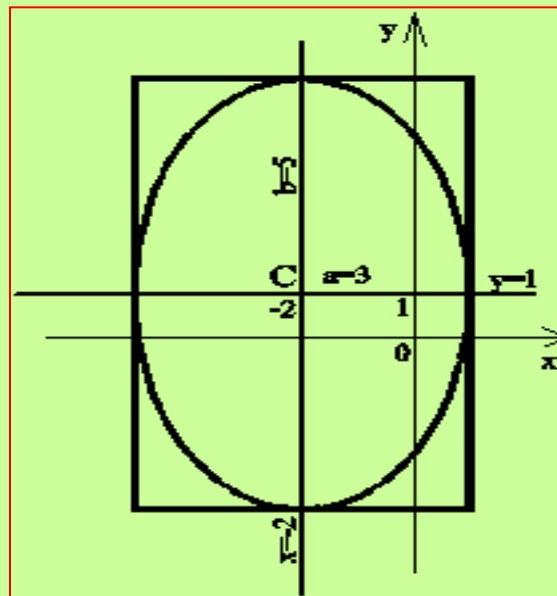
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

$$25(x+2)^2 - 100 + 9(y-1)^2 - 9 - 116 = 0, \quad 25(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 225,$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1.$$

Одержали рівняння еліпса
з центром у точці $C(-2;1)$
та півосями $a=3$ та $b=5$.



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

Приклад. **Встановити** **тип** **кривої**
 $9x^2 - 16y^2 + 36x + 160y - 508 = 0$ **та побудувати її.**

Розв'язання. $A = 9$, $B = -16$, $AB < 0$, тому маємо гіперболу.

Виділимо повний квадрат

$$9(x^2 + 4x + 4 - 4) - 16(y^2 - 10y + 25 - 25) - 508 = 0,$$

$$9(x + 2)^2 - 36 - 16(y - 5)^2 + 400 - 508 = 0,$$

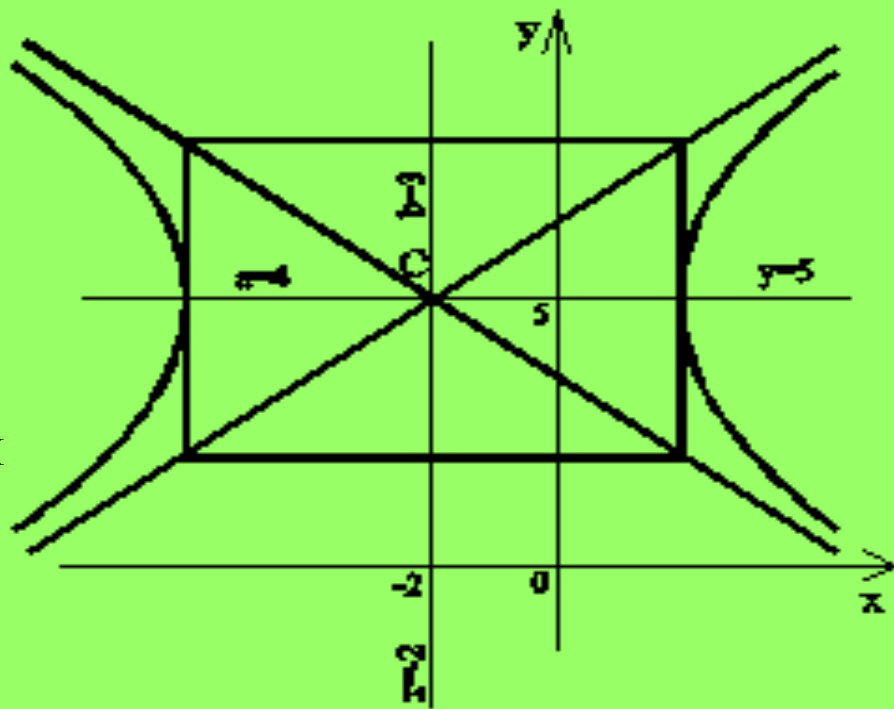
$$9(x + 2)^2 - 16(y - 5)^2 = 144,$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$

Маємо рівняння гіперболи
з центром у точці $C(-2;5)$
та півосями $a=4$ та $b=3$.



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

Приклад. Встановити тип кривої $y^2 + 10y - 4x + 9 = 0$ та побудувати її.

Розв'язання.

Відносно змінної y виділимо *повний квадрат*:

$$y^2 + 10y + 25 - 25 - 4x + 9 = 0,$$

$$(y + 5)^2 = 4x + 16, \quad \boxed{(y + 5)^2 = 4(x + 4)}.$$

Одержали рівняння параболи з вершиною у точці $C(-4; -5)$.

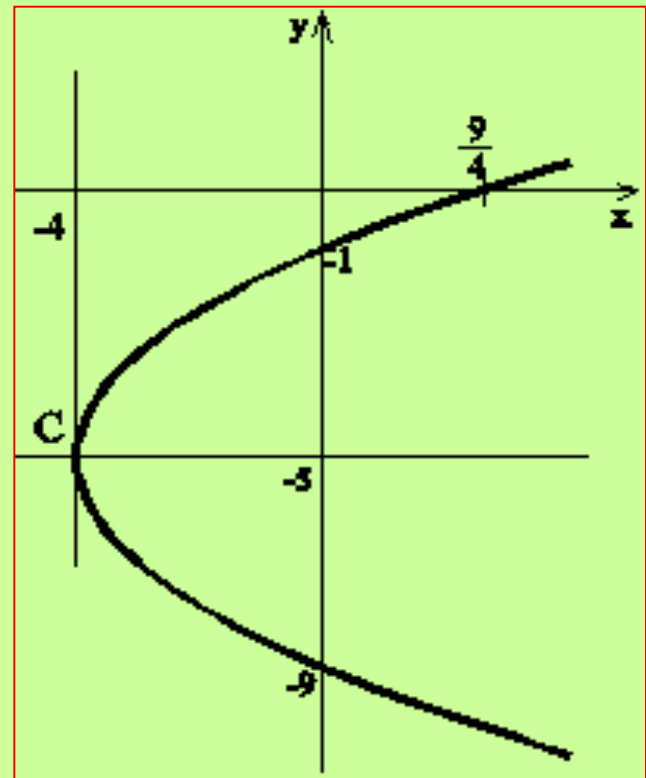
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5. Приклади розв'язання типових завдань

Знайдемо точки перетину
параболою координатних осей:

$$Ox: y = 0, -4x + 9 = 0, x = \frac{9}{4};$$

$$Oy: x = 0, y^2 + 10y + 9 = 0, \\ x_1 = -1, x_2 = -9.$$



КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6. Запитання для самоконтролю

1. Що називається колом? Вивести рівняння кола.
2. Що називається еліпсом? Вивести канонічне рівняння еліпса.
3. Що називається гіперболою? Вивести канонічне рівняння гіперболи.
4. Дослідити форму гіперболи, заданої канонічним рівнянням, і побудувати її.
5. Що називається фокальним радіусом, ексцентриситетом еліпса, гіперболи?
6. Що називається параболою? Вивести канонічне рівняння параболи і дослідити її форму.