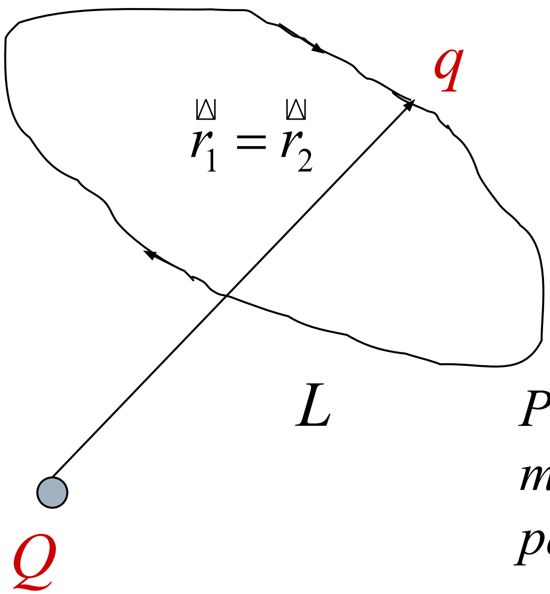
ЭЛЕКТРОСТАТИКА

основные теоремы (в вакууме)

План лекции

1. Теорема о циркуляции	
2. Поток вектора напряженности электростатического поля	
3. Теорема Гаусса	
4. Поле заряженной сферы (металлический шар) Поле равномерно заряженного шара (шар из диэлектрика)	
5. Поле заряженной плоскости (двух плоскостей)	
6. Поле полого цилиндра, заряженной нити	
7. Теорема Остроградского-Гаусса	
8. Дивергенция напряженности электростатического поля	
9. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	
10. Уравнение Пуассона	
11. Ротор векторного поля	
12. Теорема Стокса	
13. Основные теоремы ЭП в вакууме	

1.Теорема о циркуляции



$$если\ \vec{r}_1 = \vec{r}_2,\ то\ \varphi_1 = \varphi_2$$

$$A = \oint_L dA = 0$$

Работа электростатического поля по перемещению точечного заряда вдоль замкнутой траектории равна нулю. (поле потенциально)

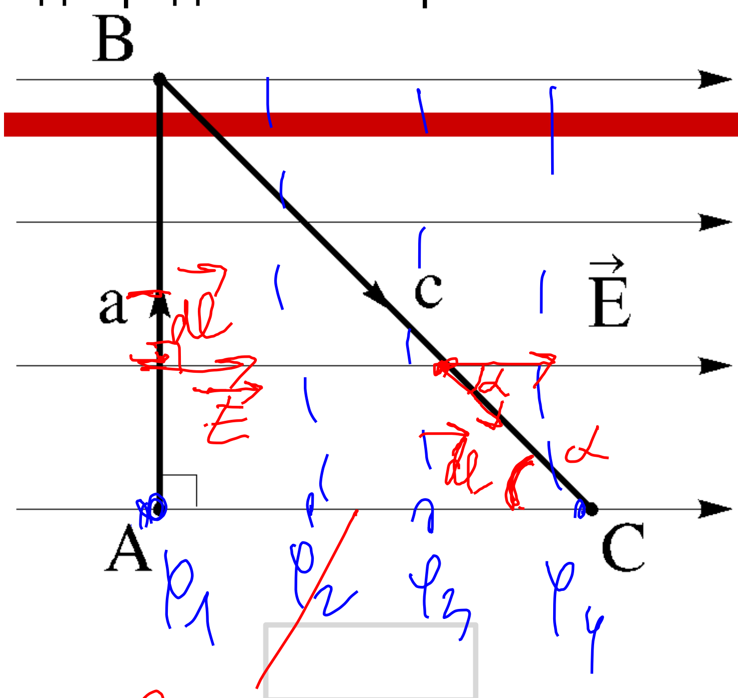
$$q\oint Edr = q\oint_L \vec{E}\overrightarrow{dl} = 0 \qquad q \neq 0 \Longrightarrow \oint_L \vec{E}\overrightarrow{dl} = 0$$

<u>Теорема:</u> *Циркуляция вектора напряженности вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

Пример. Вычислить криволинейный интеграл вектора напряженности электрического поля E по плоскому контуру ABC, расположенному в однородном электрическом поле

матем.

см. рис.



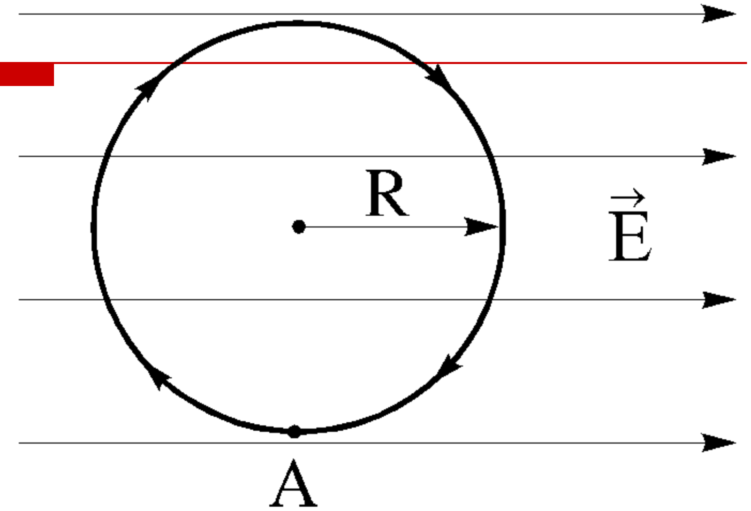
$$\int_{ABC} \vec{E}\,d\vec{l} = \cancel{\int_{AB} \vec{E}\,d\vec{l}} + \int_{BC} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_B^C E\,dl \cdot \cos\alpha =$$

$$= E\cos\alpha \int_B^C dl = E \cdot c\cos\alpha = E \cdot AC\cos\alpha = \boxed{E \cdot b}$$

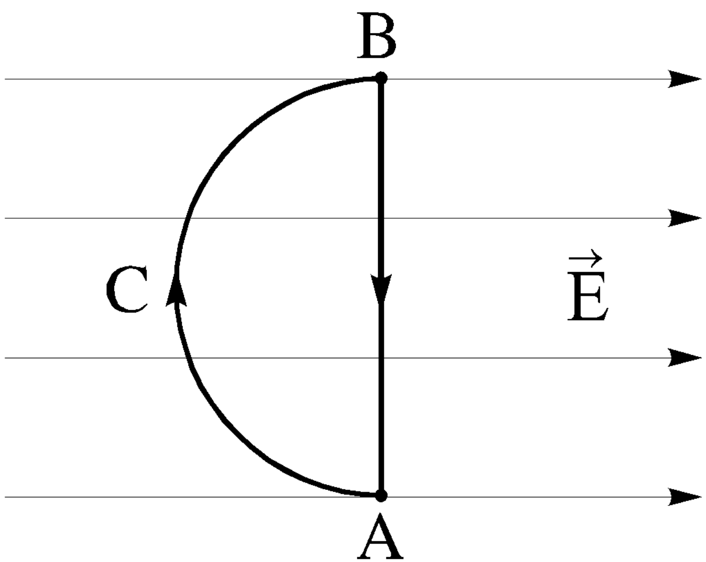
физика

$$\int_{ABC} \vec{E}\,d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_C = E \cdot b \quad (\text{т.к. } \vec{E} \text{ однород.})$$

Пример. Вычислить циркуляцию вектора напряженности электрического поля E по плоскому контуру, расположенному в однородном электрическом поле.

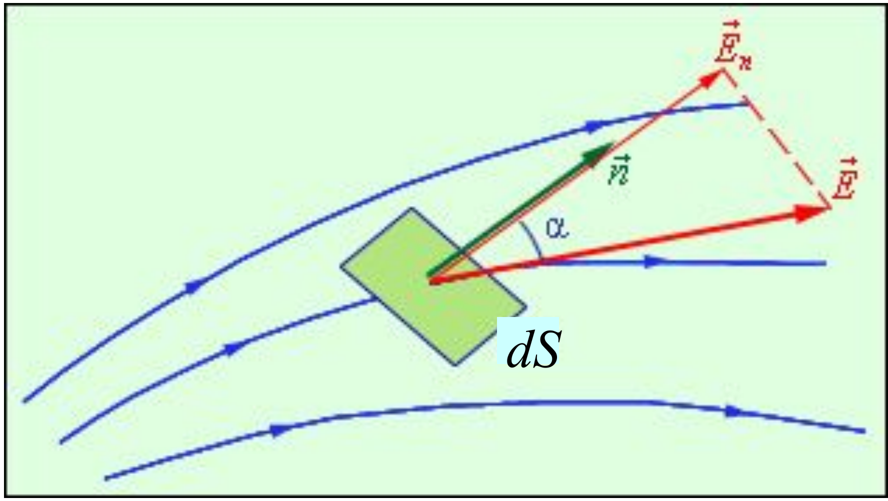


Пример. Вычислить криволинейный интеграл вектора напряженности электрического поля E по плоскому контуру, расположенному в однородном электрическом поле



2. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Поток вектора напряженности поля через элементарную площадку dS определяется выражением



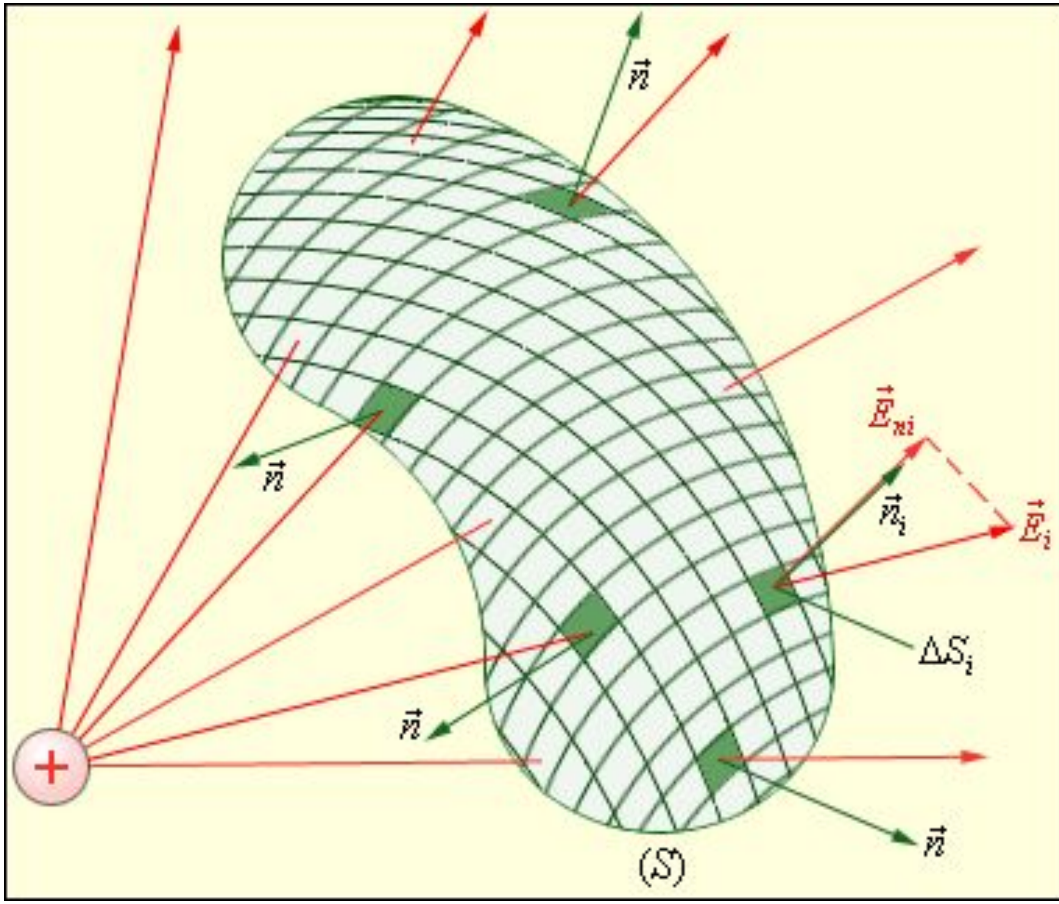
$$d\Phi = \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = EdS\cos\alpha = E_n dS$$

$$где\ \overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$$ - вектор элемента поверхности

Поток вектора через произвольную поверхность определяется выражением

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha\, dS.$$

Поток вектора есть величина алгебраическая. Знак потока зависит от выбора направления нормали к поверхности.



$$\Phi > 0, если \quad \alpha < 90^\circ$$

$$\Phi < 0, если \quad \alpha > 90^\circ$$

$$\Phi = 0, если \quad \alpha = 90^\circ$$

3. ТЕОРЕМА ГАУССА

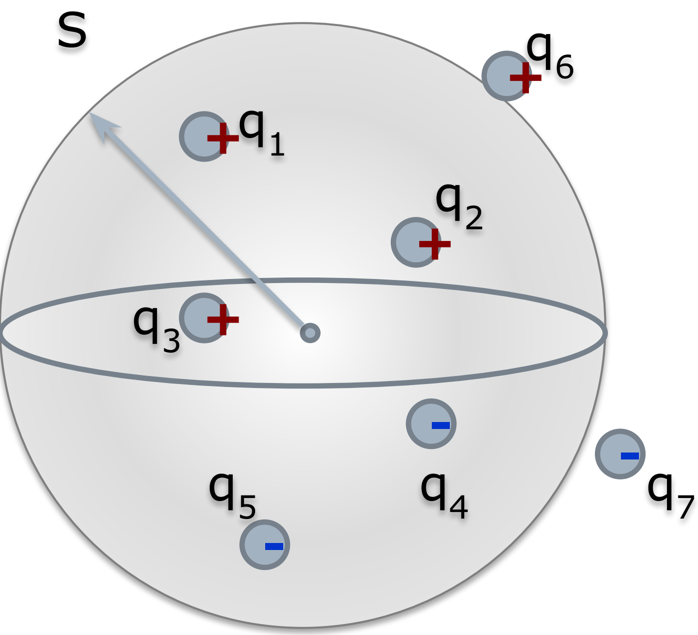
Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь *любую замкнутую* поверхность равен *алгебраической* сумме зарядов, находящихся *внутри* этой поверхности, деленной на ε_0.

$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

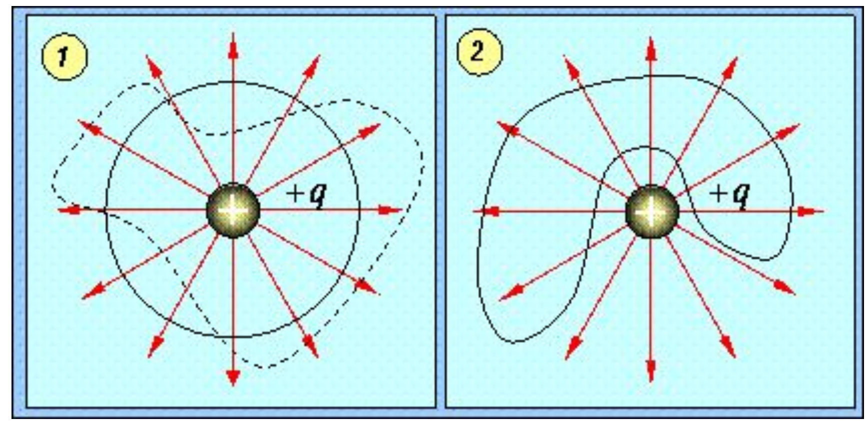
1. Теорема Гаусса устанавливает фундаментальное свойство ЭП – наличие у него источников (+ заряды) (и стоков (- заряды)) линий поля.

2. Теорема Гаусса позволяет вычислять напряженность поля систем дискретно и непрерывно распределенных зарядов, т.е. выступает аналогом закона Кулона и принципа суперпозиции.

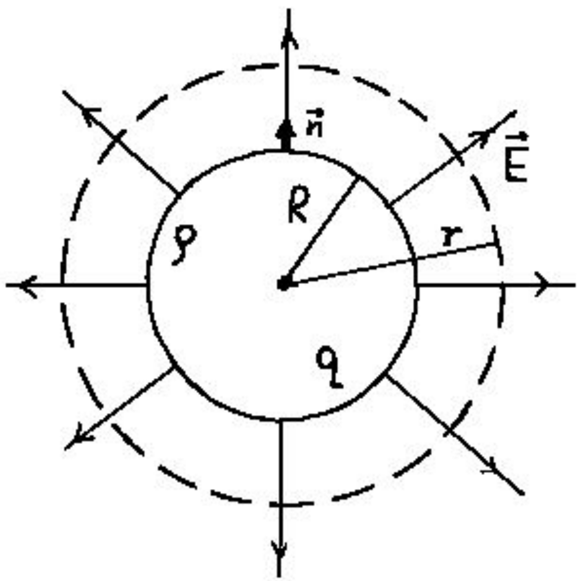
Примеры использования Теоремы Гаусса



$$\Phi_s = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5)$$



Примеры вычислений полей заряженных тел простых симметрий
4. Поле заряженной сферы



$$r \geq R \Rightarrow \quad q(r) = q_0 \Rightarrow \quad \oint_S E_r(r)dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

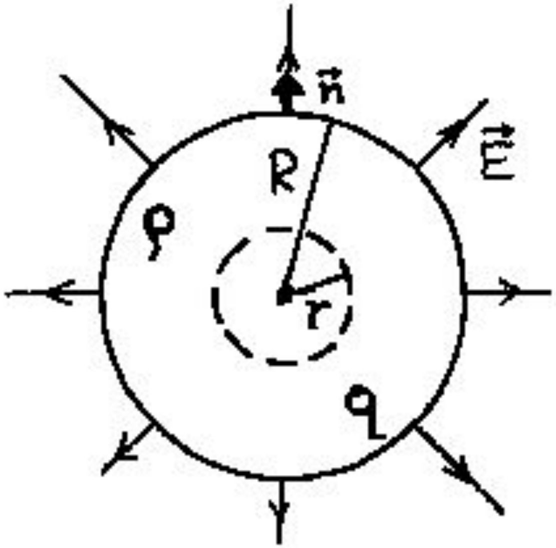
$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}.$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty k\frac{q_0}{r^2}dr; \qquad \varphi(\infty) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi(r) = kq_0\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = kq_0\left(-\frac{1}{r}\right)_r^\infty = \frac{kq_0}{r}.$$

$$\varphi(r) = \frac{kq_0}{r}.$$

ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ

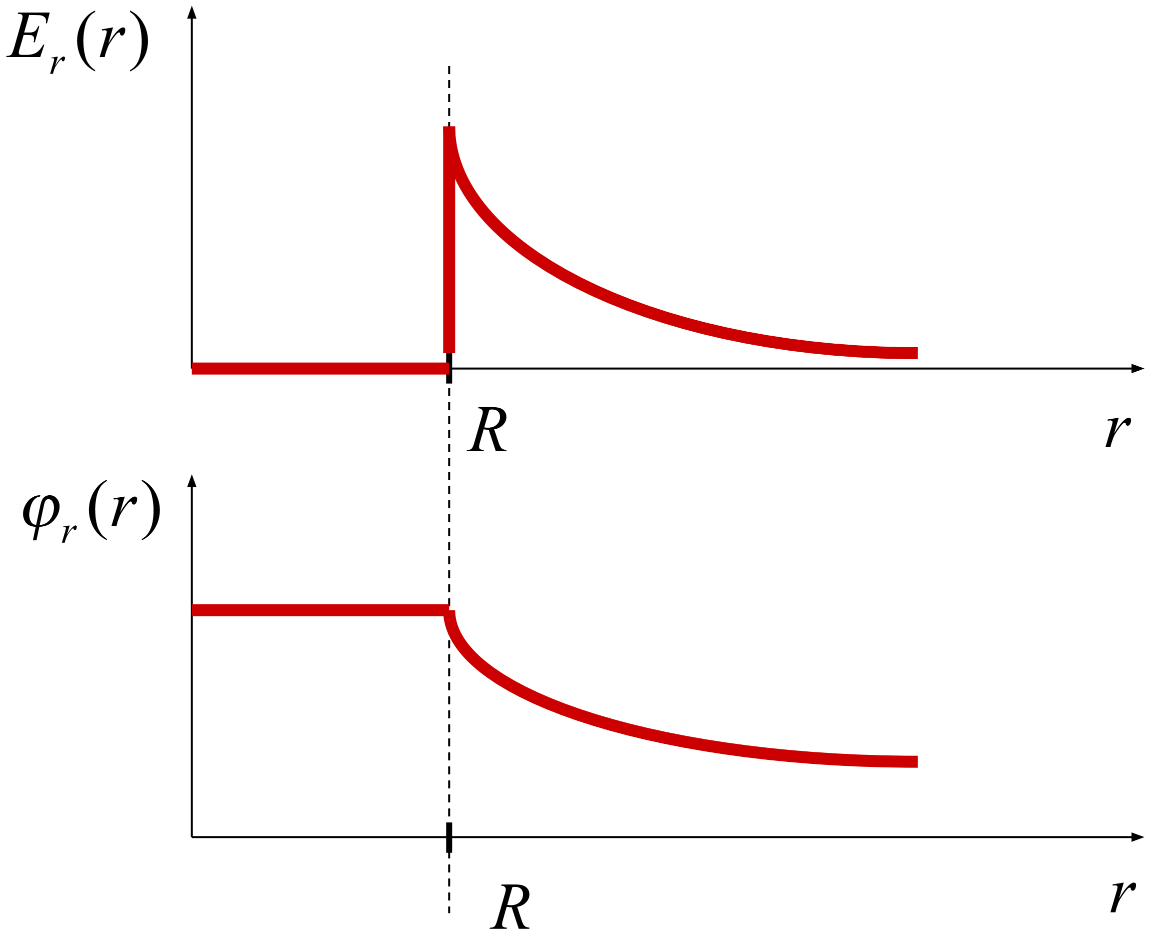


$$r < R \Rightarrow q(r) = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = 0 \Rightarrow \oint_S E_r(r)\,dS = 0$$

$$E_r(r) = const \Rightarrow \quad E_r(r)\oint_S dS = 0 \qquad E_r(r) = 0.$$

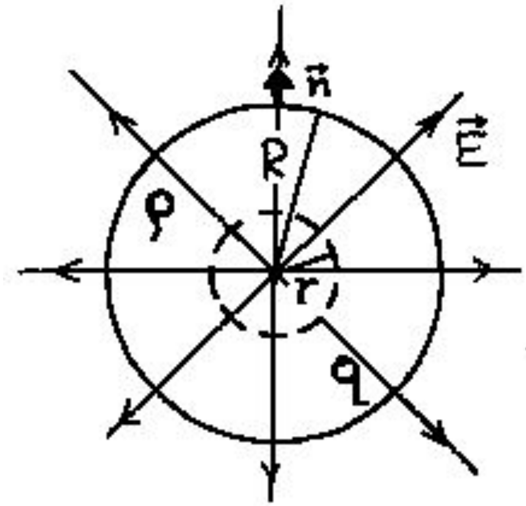
$$\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R E_r(r)\,dr = 0 \Rightarrow \varphi(r) = \varphi(R) = \varphi_0.$$

ГРАФИКИ ПОЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ



4*. ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА (I)

$$r < R \Rightarrow \quad q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3; \quad \rho = \frac{q_0}{V_0} = \frac{3q_0}{4\pi R^3} \Rightarrow$$



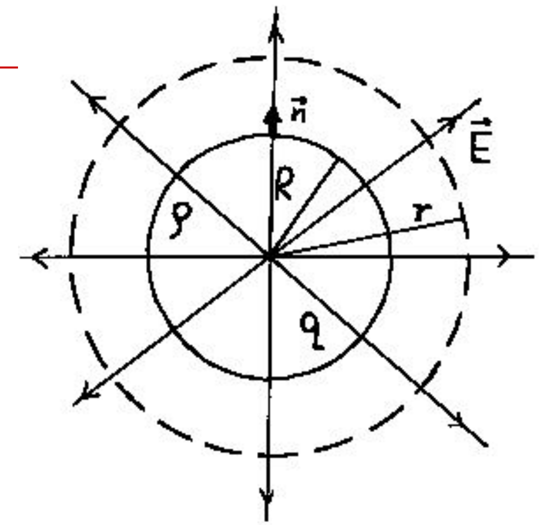
$$q(r) = \frac{3q_0}{4\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = q_0\left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \quad \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0};$$

$$\vec{E}d\vec{S} = E_r(r)dS \Rightarrow \quad \oint E_r(r)dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow$$

$$E_r(r)\oint dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3; \quad \oint dS = 4\pi r^2 \Rightarrow \quad E_r(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 r}{R^3}. \quad \varphi(r) - \varphi(R) = \frac{kq_0}{R^3}\int_r^R r dr = \frac{kq_0}{2R^3}(R^2 - r^2).$$

4*. ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА (II)



$$r \ge R \Rightarrow \qquad q(r) = q_0 \Rightarrow \qquad \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_0}{\varepsilon_0};$$

$$\vec{E} d\vec{S} = E_r(r) dS \Rightarrow \qquad E_r(r) \oint dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

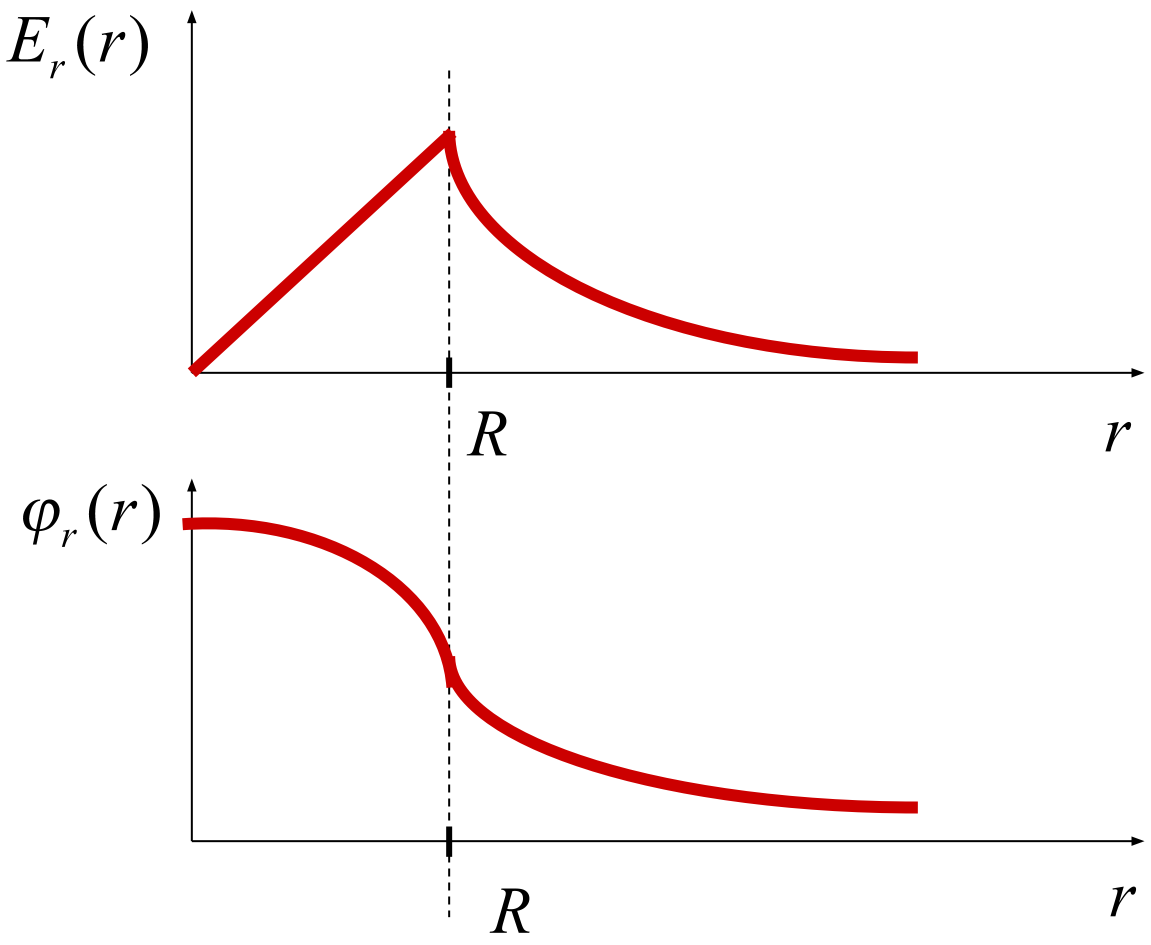
$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{r^2} = k \frac{q_0}{r^2}.$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty E_r(r) dr; \quad \varphi(\infty) = 0 \Rightarrow \quad \varphi(r) = kq_0 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

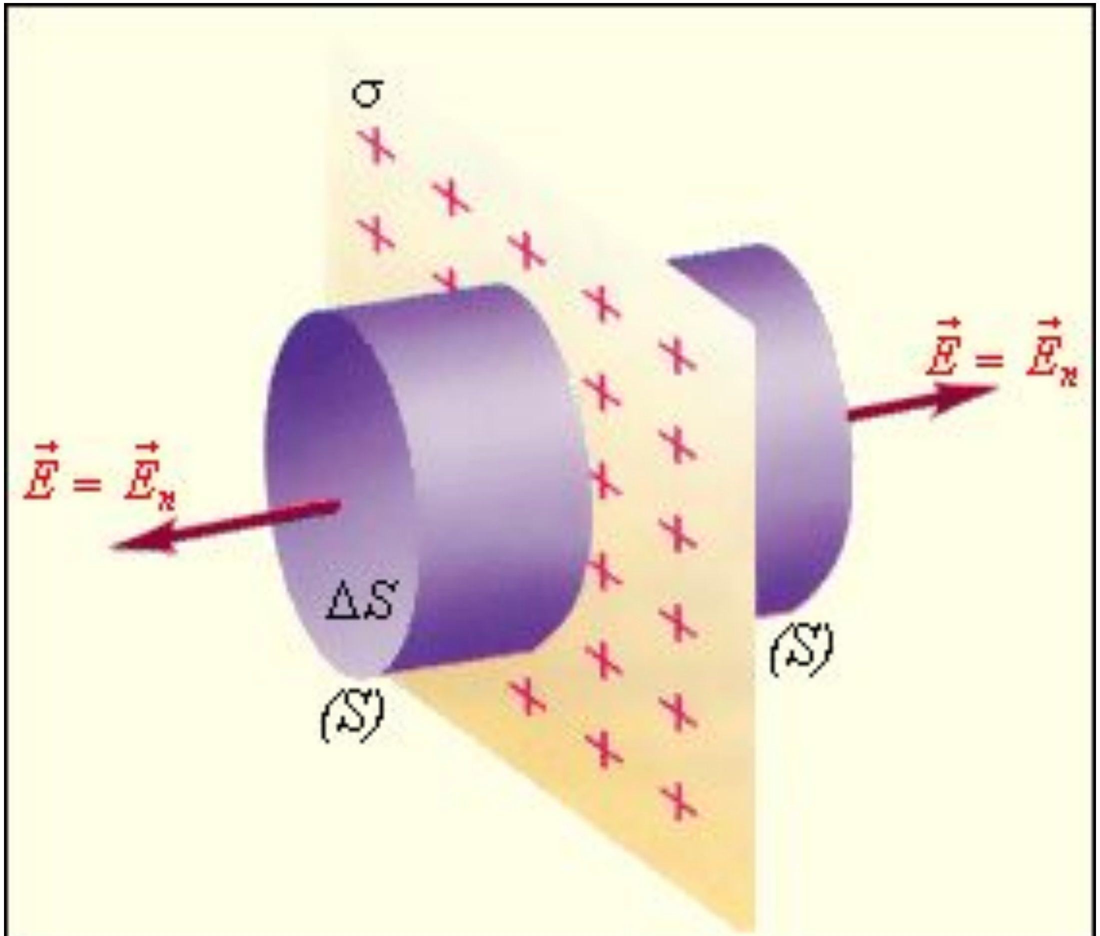
$$\varphi(r) = kq_0 \left(-\frac{1}{r} \right)_r^\infty = \frac{kq_0}{r}. \quad \varphi_0 = \varphi(R) = \frac{kq_0}{R}.$$

$$r < R \Rightarrow \varphi(r) = \varphi(R) + \frac{kq_0}{2R^3}(R^2 - r^2) = \frac{kq_0}{R} + \frac{kq_0}{2R} - \frac{kq_0}{2R^3} r^2. \quad \varphi(0) = \frac{3}{2}\frac{kq_0}{R}.$$

ГРАФИКИ ПОЛЯ равномерно ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА



5. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ



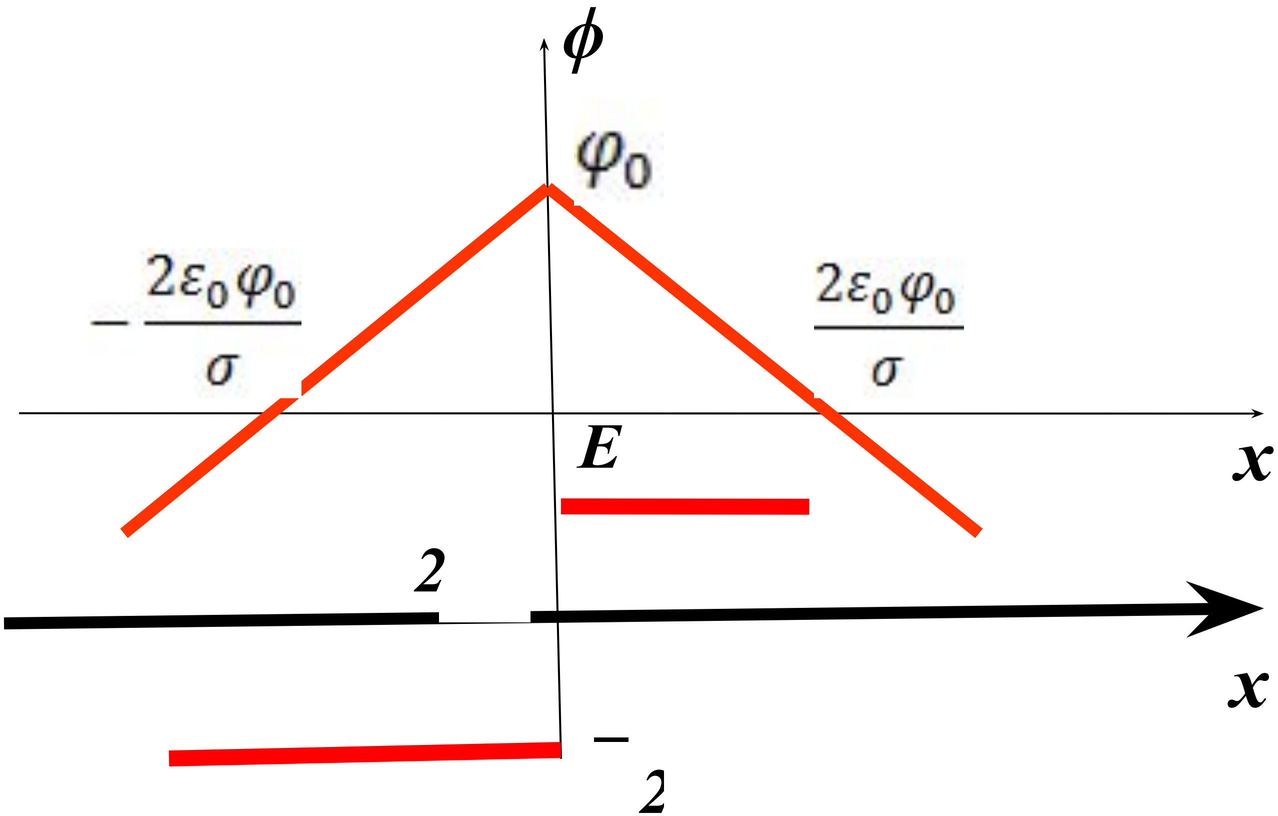
$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = 2E_n \Delta S$$

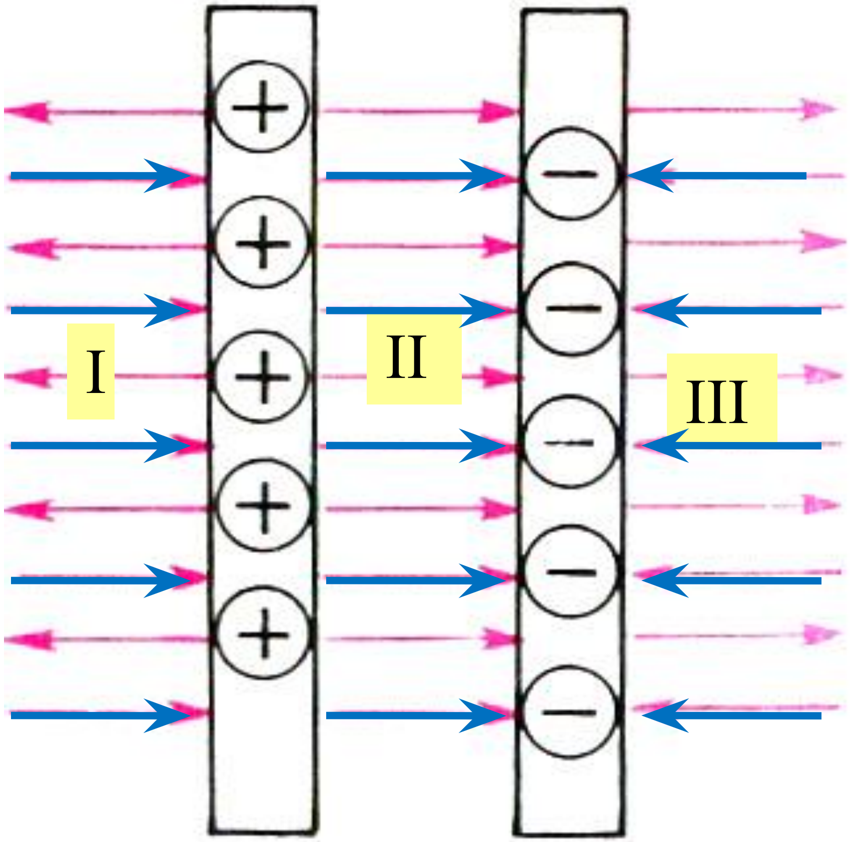
$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi k\sigma.$$

Разность потенциалов в поле равномерно заряженной бесконечно протяженной плоскости

Поскольку поле однородно и направлено параллельно оси OX, то потенциал поля зависит только от координаты *X*



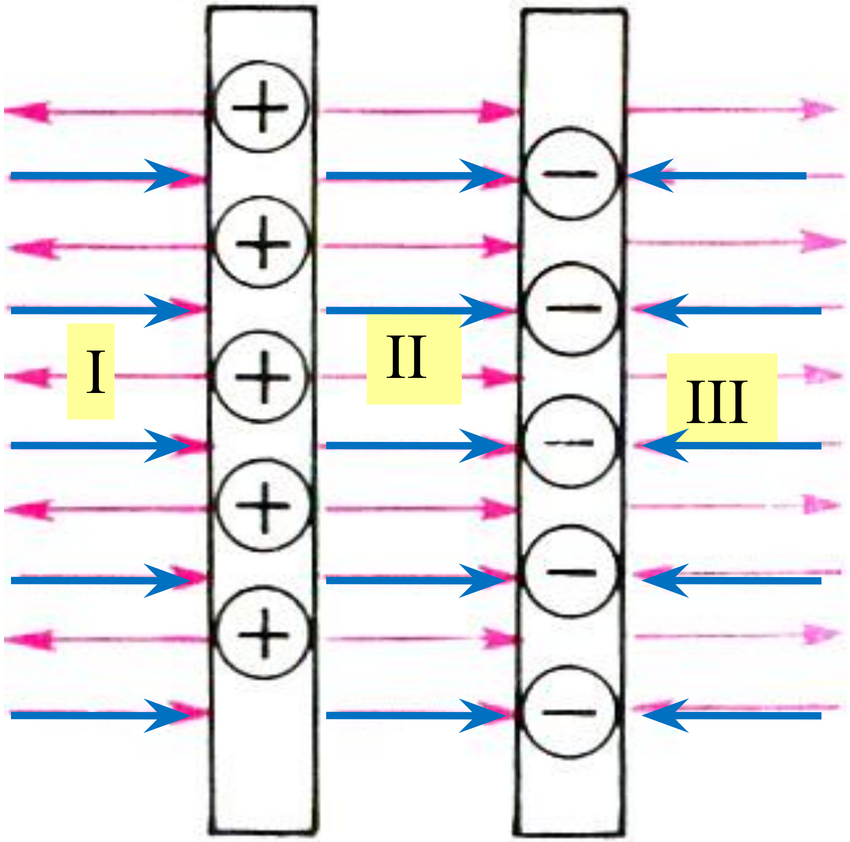
Две параллельные бесконечно протяженные плоскости, заряженные равномерно (поверхностные плотности σ_1 и $-\sigma_2$).



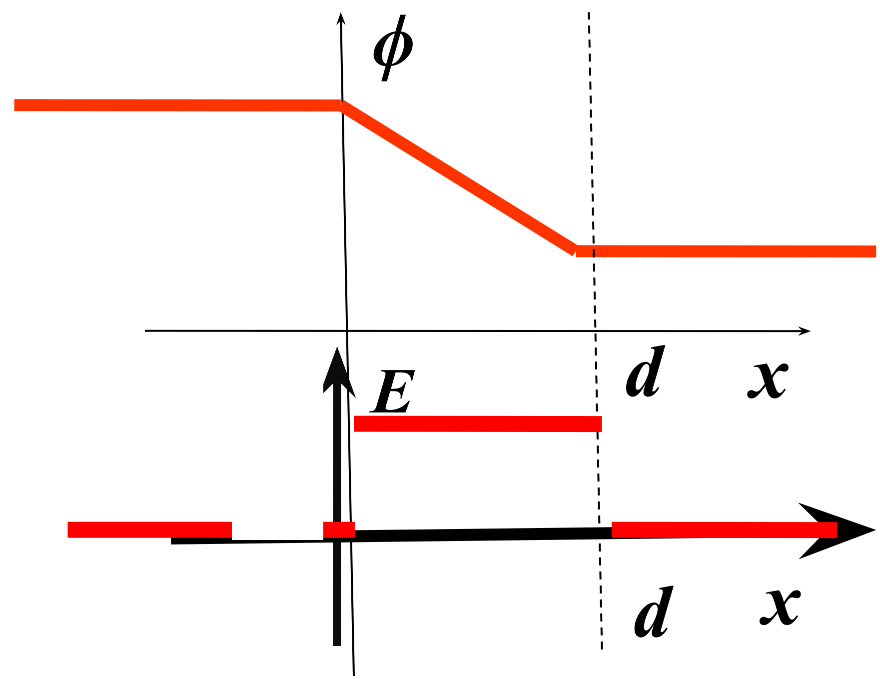
I III

II

Две параллельные бесконечно протяженные плоскости, заряженные равномерно (поверхностные плотности σ и -σ).

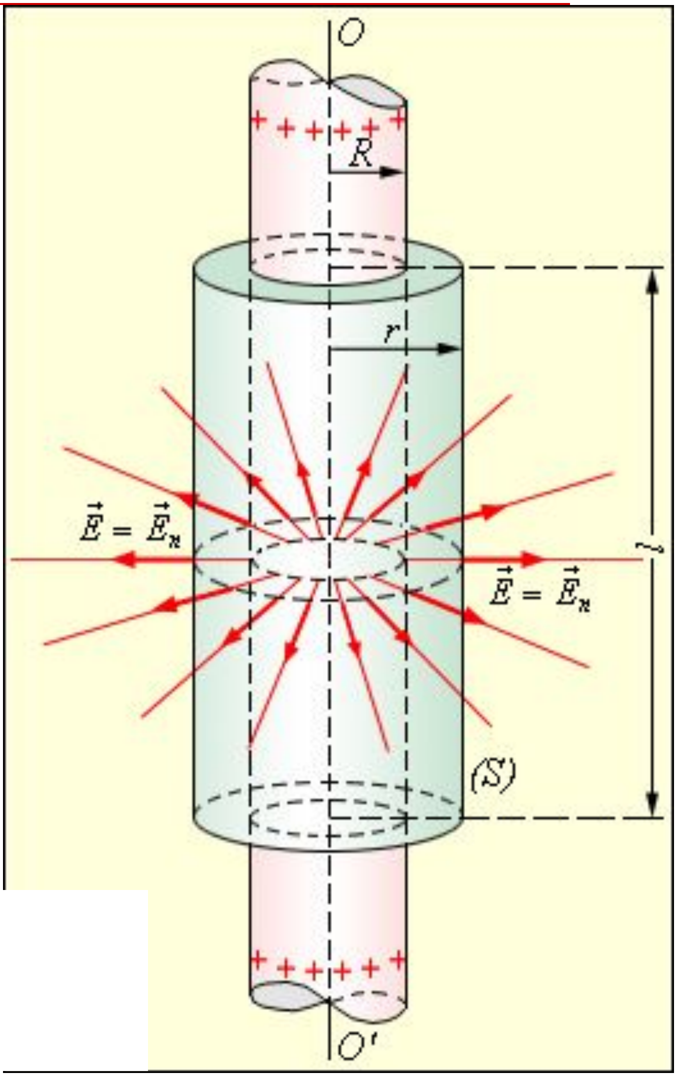


$$E = 0$$



6. ПОЛЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной плотностью заряда:



6^+. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ НИТИ

7. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО - ГАУССА

Поток некоторого вектора через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого же вектора по объему, ограниченному рассматриваемой поверхностью

Михаил Васильевич Остроградский
1801 – 1862
русский математик

Карл Фридрих Гаусс
1777 – 1855
немецкий математик

8. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Дивергенцией (divergentia – расхождение) векторного поля называется величина, численно равная плотности точек (т.е. количеству точек в единице объема), в которых начинаются либо оканчиваются силовые линии поля. Определение дивергенции имеет вид:

9. ТЕОРЕМА ГАУССА
в дифференциальной форме

$$\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

используем Т О-Г

или

10. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

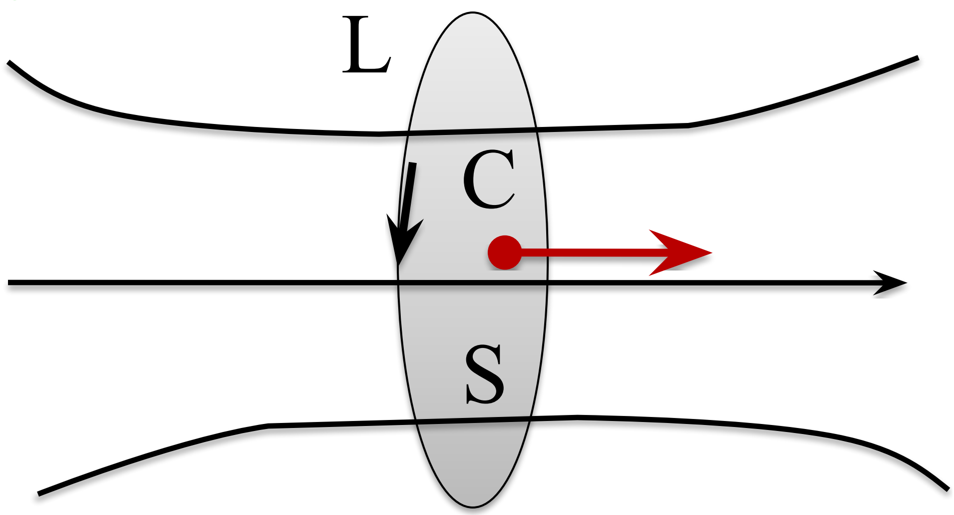
Симеон Дени Пуассон
1781 – 1840
французский математик

оператор
Лапласа.

11. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ротором (или вихрем) векторного поля называется вектор, проекция которого на направление положительной нормали к плоскости контура *L* определяется

и направленный вдоль этой нормали. Положительное направление связано с направлением обхода контура при вычислении Ц правилом правого винта .



12. ТЕОРЕМА СТОКСА. РОТОР НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Теорема Стокса. Циркуляция любого вектора по произвольному контуру равна потоку ротора этого же вектора через произвольную

поверхность, ограниченную данным контуром

Теорема о Ц в диф. форме

13. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЭП В ВАКУУМЕ

	ТЕОРЕМА ГАУССА	**ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ**
ИФ		
ДФ		