

Решение уравнений

$$\sin x = a.$$

**Понятие арксинуса
числа.**

Понятие арксинуса числа a

Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом $\frac{1}{2}$ и записывают

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} = \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, синус которого равен a

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

arcsin a = α, если sin α = a и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

например

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{так как} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

АРКСИНУС ЧИСЛА

- **Например**

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \begin{array}{l} \text{т.} \\ \text{к.} \end{array} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}; \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\arcsin 0 = 0; \quad \begin{array}{l} \text{т.} \\ \text{к.} \end{array} \quad -\frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{\pi}{2}; \sin 0 = 0.$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}; \quad \begin{array}{l} \text{т.} \\ \text{к.} \end{array} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

АРКСИНУС ЧИСЛА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Например

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad & 3 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = 3 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \arcsin \frac{1}{2} = \\ & = 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{12} \pi \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.} \quad \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \arcsin 1 + \sqrt{5} \arcsin 0 =$$

$$= -\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sqrt{5} \cdot 0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7}{6} \pi$$

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$



$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\arcsin 1 - \arcsin(-1) =$$



a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Определим, имеют ли смысл выражения:

Выражение имеет смысл, если удовлетворяет условию

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

1) $\arcsin(\sqrt{5})$ - выражение **не имеет** смысла, так как $\sqrt{5} > 1$;

2) $\arcsin(\sqrt{2}/3)$ - выражение **имеет** смысл, так как $-1 \leq \sqrt{2}/3 \leq 1$;

3) $\arcsin(-\pi/5)$ - выражение **имеет** смысл, так как $-1 \leq -\pi/5 \leq 1$;

4) $\arcsin(-\sqrt{3})$ - выражение **не имеет** смысла, так как $-\sqrt{3} < -1$.

При каких значениях X имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(x^2-1)$

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 2$$

Ответ:

$$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

2. $\arcsin(5-2x)$

$$-1 \leq 5 - 2x \leq 1$$

$$-6 \leq -2x \leq -4$$

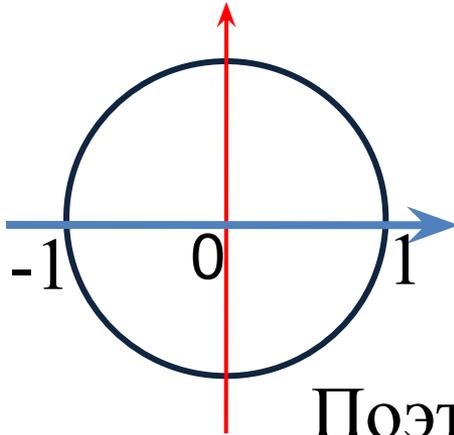
$$2 \leq x \leq 3$$

Ответ: $[2; 3]$

Решить уравнение $\sin x = a$

По определению:

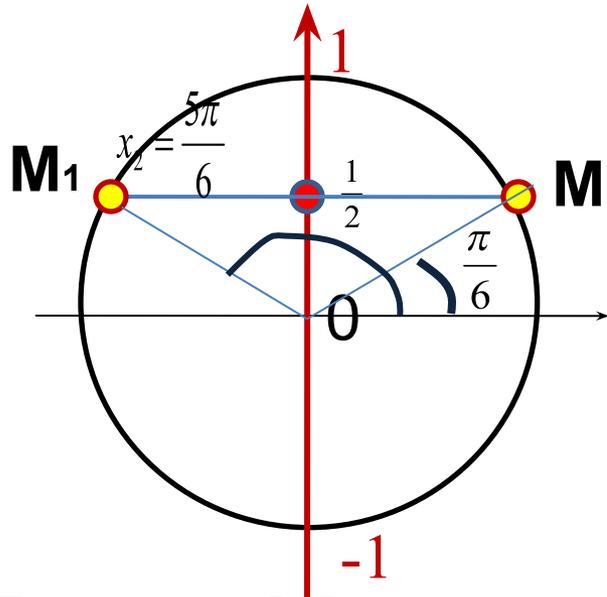
синусом угла α называется **ордината** точки



И значит определения синуса
следует, что $-1 \leq \sin x \leq 1$

Поэтому, если $\sin x = 2,5$, то уравнение
не имеет корней т.к $2,5 > 1$
уравнение $\sin x = -1,5$ тоже не имеет корней
т.к $-1,5 < -1$

Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$



Ординату, равную $\frac{1}{2}$ имеют две точки окружности M и M1, т.к

$$\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

То точка M получена поворотом точки P(0;1)

на угол равный $x_1 = \frac{\pi}{6}$

а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

То точка M1 получена поворотом точки P(0;1)

на угол равный $x_2 = \frac{5\pi}{6}$

а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ								
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Получили , что решением уравнения являются

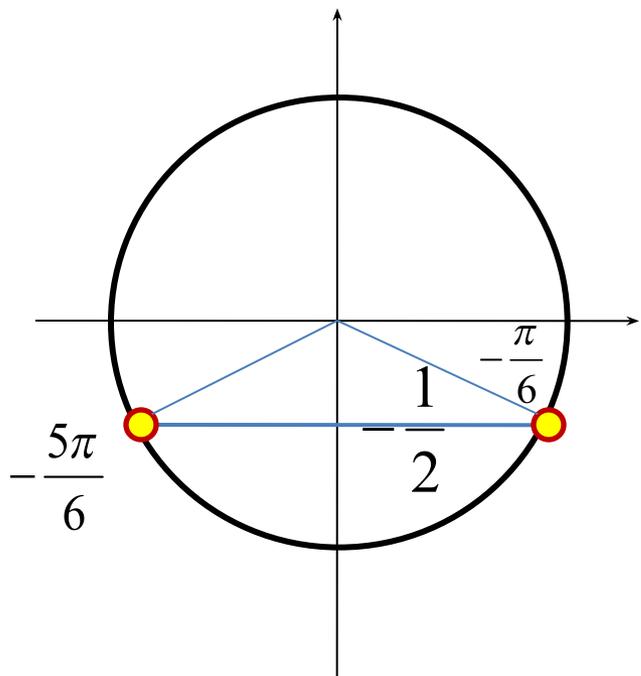
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

Эти 2 корня можно объединить в одну формулу

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

значит $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Объединим в одну формулу

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Преобразуем ее по свойствам
степени в вид

$$x = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right) + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Уравнение $\sin x = a$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

ВЫВОД

Корни уравнения $\sin x = a$
Выражаются общей формулой

Если $a > 0$, то

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi n,$$

$$n \in Z$$

Если $a < 0$, то

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi n,$$

$$n \in Z$$

СОЛНЫШКО, ЗАПОМНИ

$$\sin x = 5$$

Корней нет

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Решить уравнение

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Решить уравнение $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$

$$\sin \left(\frac{x}{3} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{x}{3} \right) = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\left(\frac{x}{3} \right) = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^{n+1} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ОТВЕТ $(-1)^{n+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$

**ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ**

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Уравнение $\sin x = a$

$$(3 \sin x - 1) \cdot (2 \sin x + 1) = 0$$

$$3 \sin x - 1 = 0;$$

$$\sin x = \frac{1}{3};$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

$$2 \sin x + 1 = 0;$$

$$\sin x = -\frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right) + \pi n,$$

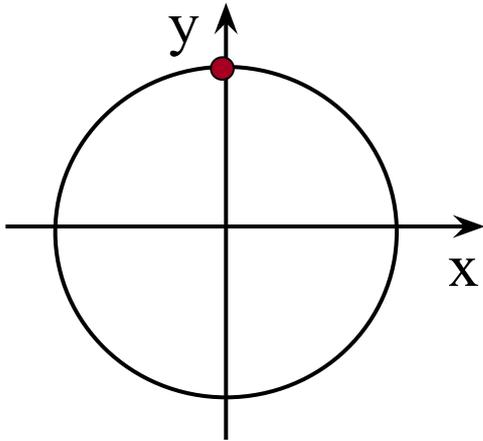
$$n \in Z$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$ $(-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right) + \pi n, n \in Z$

Обратите внимание,
никаких x в ответе нет,
тем более с индексами

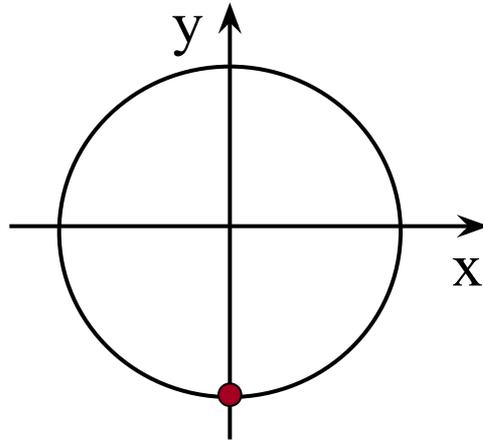
Частные случаи

$$\sin x = 1$$



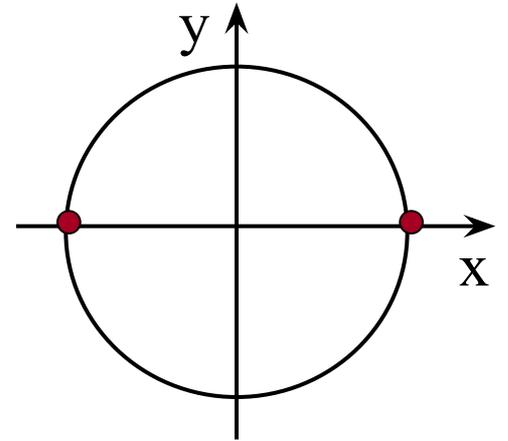
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$



$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Тренируемся решать:

1. $\sin 5x = 1$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Тренируемся решать:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ} : \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$