Решение уравнений sinx=a.
Понятие арксинуса числа.

Понятие арксинуса числа а

Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом $\frac{1}{2}$ и записывают

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен а

arcsin **a** = α, если sinα = a и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

arcsin a = α, если sinα = a и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

например

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{так как} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0

arcsin(-a)=-arcsina

АРКСИНУС ЧИСЛА

- **Например**

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2};\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\arcsin 0=0;$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le 0\le\frac{\pi}{2};\sin 0=0.$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3};$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2};\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- **Например**

1. $$3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arcsin\frac{1}{2}=$$

$$=3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{12}\pi$$

2. $$\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\arcsin 1+\sqrt{5}\arcsin 0=$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}+\sqrt{5}\cdot 0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{7}{6}\pi$$

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$ctg\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

вычислить

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

arcsin(-a)=- arcsina

arcsin1-arcsin(-1)=

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Определим, имеют ли смысл выражения:

Выражение имеет смысл, если удовлетворяет условию

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

1)arcsin (√5) - выражение **не имеет** смысла, так как √5 > 1;

2) arcsin (√2/3) - выражение **имеет** смысл, так как – 1 ≤ √2/3 ≤ 1;

3) arcsin (-π/5) - выражение **имеет** смысл, так как – 1 ≤ - π /5 ≤ 1;

4) arcsin (-√3) - выражение **не имеет** смысла, так как -√3 < -1.

При каких значениях **x** имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(x^2-1)$

$-1 \le \mathbf{x^2-1} \le 1$

$0 \le \mathbf{x^2} \le 2$

Ответ:

$\boxed{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]}$

2. $\arcsin(5-2x)$

$-1 \le \mathbf{5-2x} \le 1$

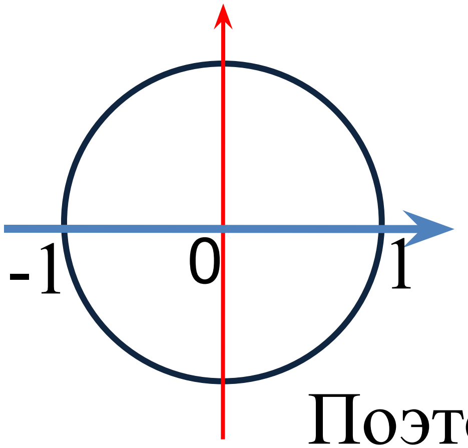
$-6 \le \mathbf{-2x} \le -4$

$2 \le \mathbf{x} \le 3$

Ответ: [2;3]

Решить уравнение $\sin x = a$

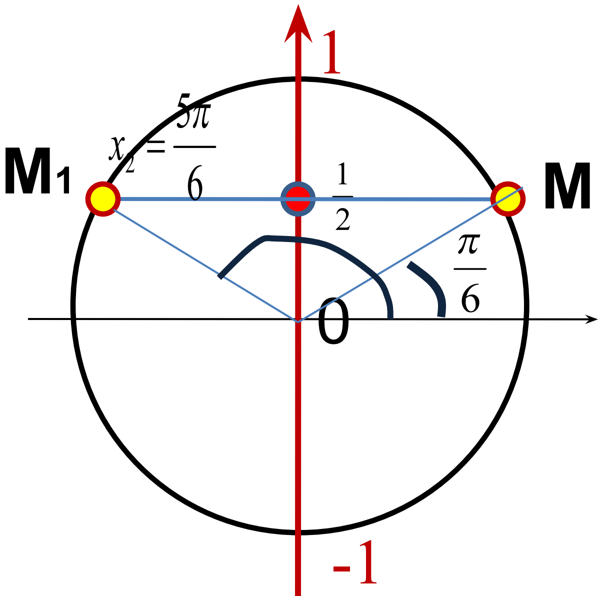
По определению:
синусом углаα называется ордината точки



И значит определения синуса
следует, что $-1 \le \sin x \le 1$

Поэтому, если $\sin x = 2{,}5$, то уравнение
не имеет корней т.к $2{,}5>1$
уравнение $\sin x = -1{,}5$ тоже не имеет корней
т.к $-1{,}5<-1$

Решить уравнение $\sin x = \dfrac{1}{2}$



Ординату, равную $\dfrac{1}{2}$ имеют две точки окружности M и M1, т.к

$$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

То точка M получена поворотом точки P(0;1) на угол равный $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$

а также на углы $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,$

где k=±1,±2….

То точка M1 получена поворотом точки P(0;1) на угол равный $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$

а также на углы $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,$

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Получили , что решением уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

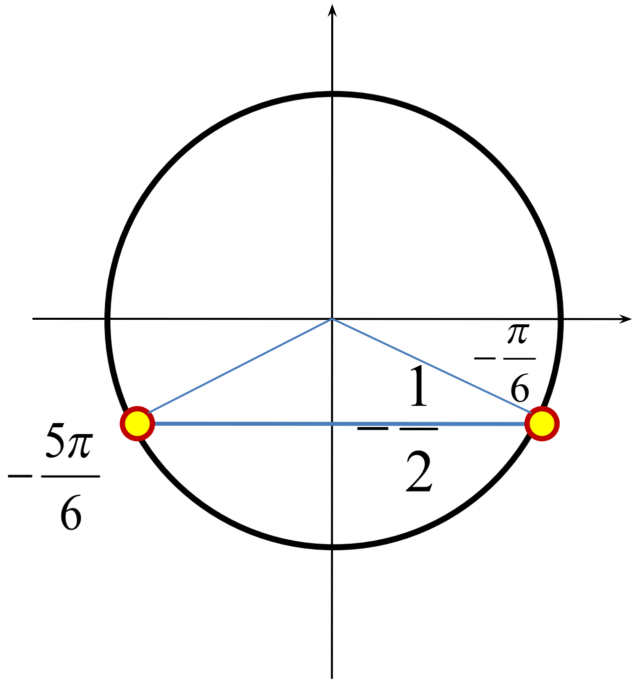
где k=±1,±2….

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

Эти 2 корня можно объединить в одну формулу

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$



значит $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$k \in Z$

Объединим в одну формулу

$$x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,$$

$n \in Z$

Преобразуем ее по свойствам степени в вид

$$x = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,$$

$n \in Z$

Уравнение sinx=a

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$$

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

ВЫВОД

Корни уравнения <u>sin x=a</u> Выражаются общей формулой

<u>Если a > 0, то</u>

$$x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,$$

$$n\in Z$$

<u>Если a< 0,то</u>

$$x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,$$

$$n\in Z$$

Солнышко, запомни

$$\sin x = 5$$

Корней нет

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Решить уравнение

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n,$$

$$n \in Z$$

Решить уравнение $$\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$$

$$\sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in Z$$

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{3} = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in Z$$

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in Z$$

ответ $(-1)^{n+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in Z$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Уравнение sinx=a

$$\left(3\sin x-1\right)\cdot\left(2\sin x+1\right)=0$$

$$3\sin x-1=0;$$

$$\sin x=\frac{1}{3};$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z.$$

$$2\sin x+1=0;$$

$$\sin x=-\frac{1}{2};$$

$$x=(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,$$

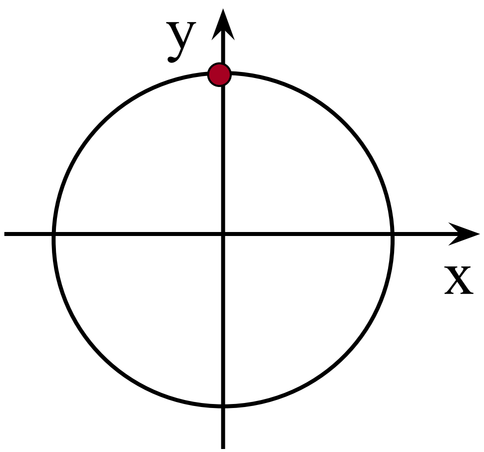
$$n\in Z$$

Ответ: $\left(-1\right)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z.$ $\quad (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\pi n, n\in Z$

Обратите внимание, никаких x в ответе нет, тем более с индексами

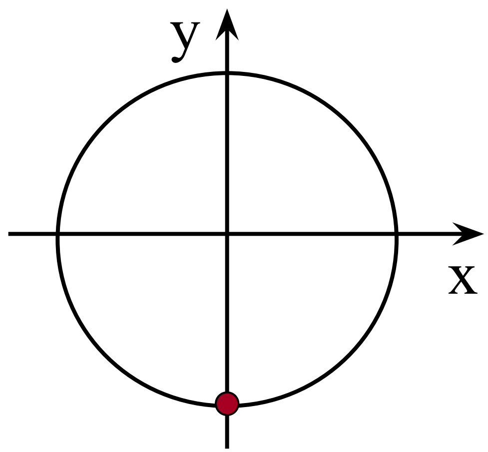
Частные случаи

sin x = 1



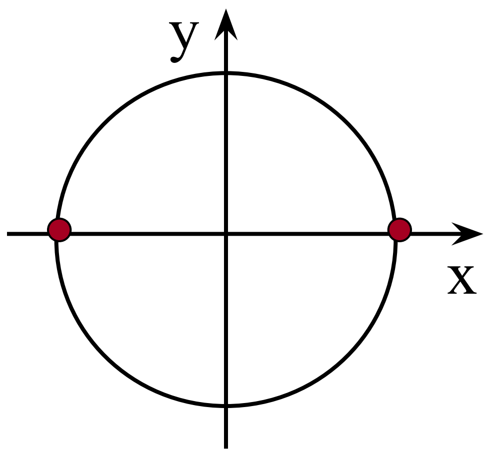
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

sin x = -1



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

sin x = 0



$$x = \pi k, \quad k \in Z$$

Тренируемся решать:

1. $\sin 5x = 1$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k,\ \ k \in Z$$

$$\text{Ответ}: \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k,\ \ k \in Z$$

Тренируемся решать:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$Ответ: \frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$