



ВИЩА МАТЕМАТИКА

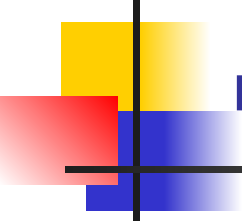
для студентів ОКР “Бакалавр”

Напрямок підготовки:

6.050701 - “Електротехніка та електротехнології”

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики
Шостак Сергій Володимирович

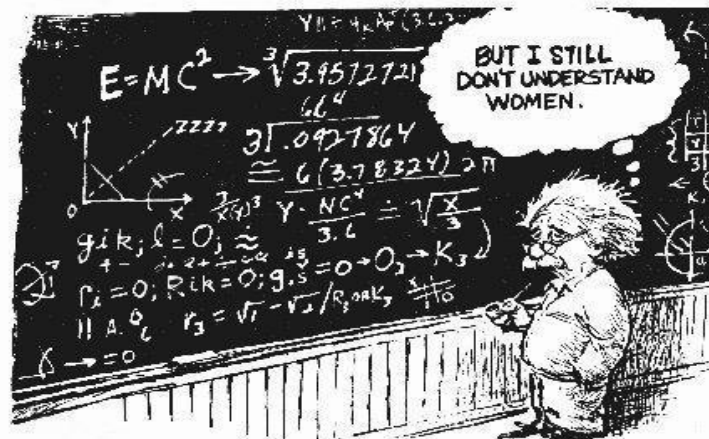


Тема1: Поняття похідної функції, її геометричний та механічний зміст. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.

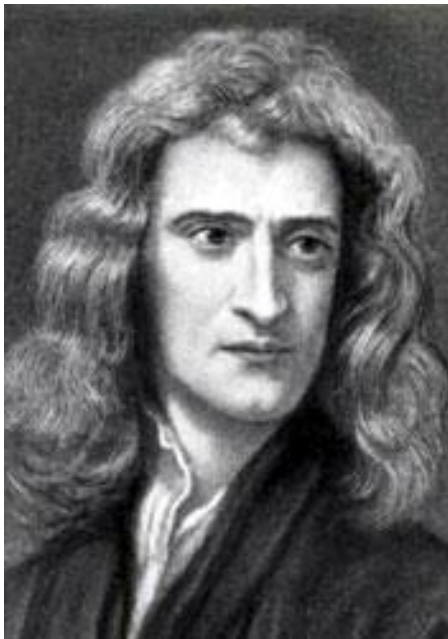
- *1. Означення похідної*
- *2. Геометричний зміст похідної*
- *3. Механічний зміст похідної*
- *4. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції*
- *5. Основні правила диференціювання*
- *6. Похідні від основних елементарних функцій*

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу. Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають **диференціальним численням**.



ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ



І. НЬЮТОН



Г. Лейбніц

ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВЕЛИ ДО ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

ЗАДАЧІ

про миттєву
швидкість

про дотичну
до кривої

Означення похідної

Означення. Похідною функції за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.





Означення похідної (аналітичний вигляд)

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ПОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

$$y', y'_x, f'(x),$$

позначення

Лагранжа

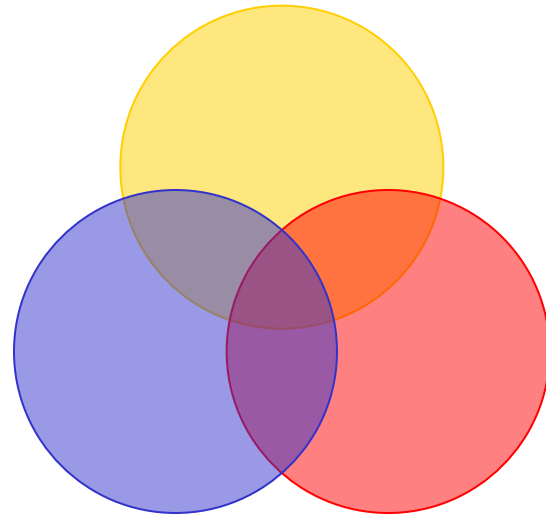
$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

позначення

Лейбніца

ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

**ГЕОМЕТРИ
ЧНИЙ**

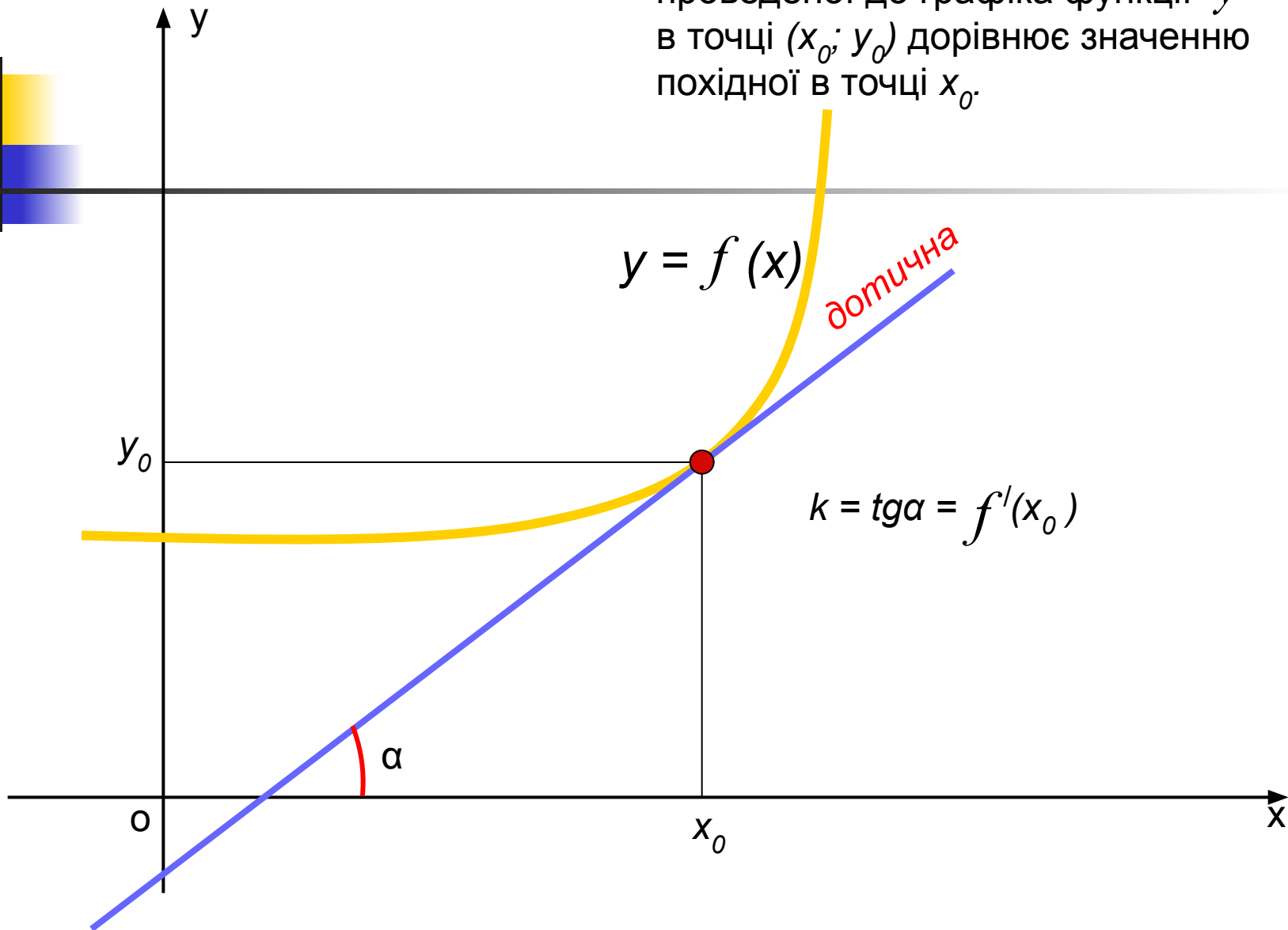


**МЕХАНІЧН
ИЙ**

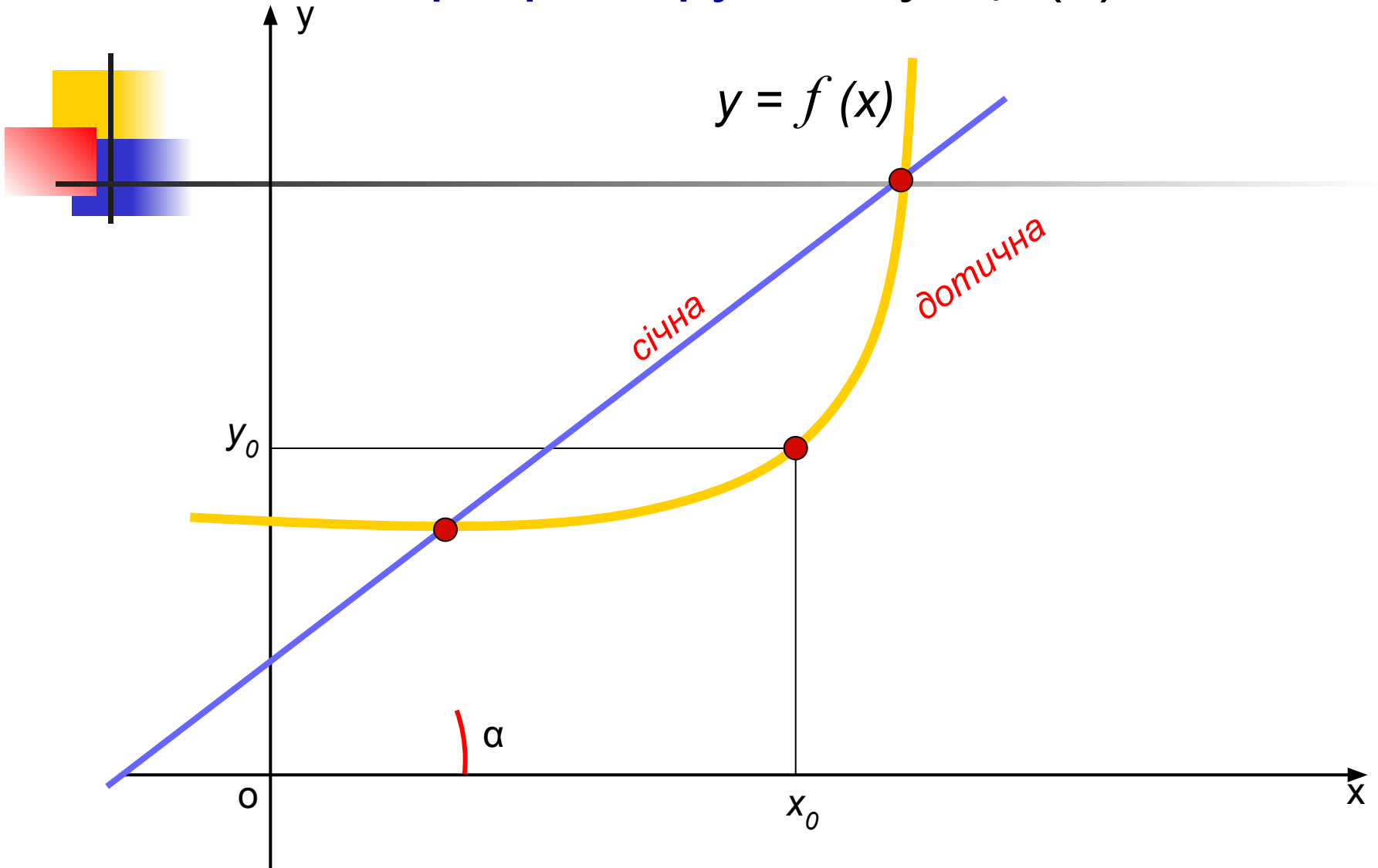
**ЕЛЕКТРИЧ
НИЙ**

Геометричний зміст похідної:

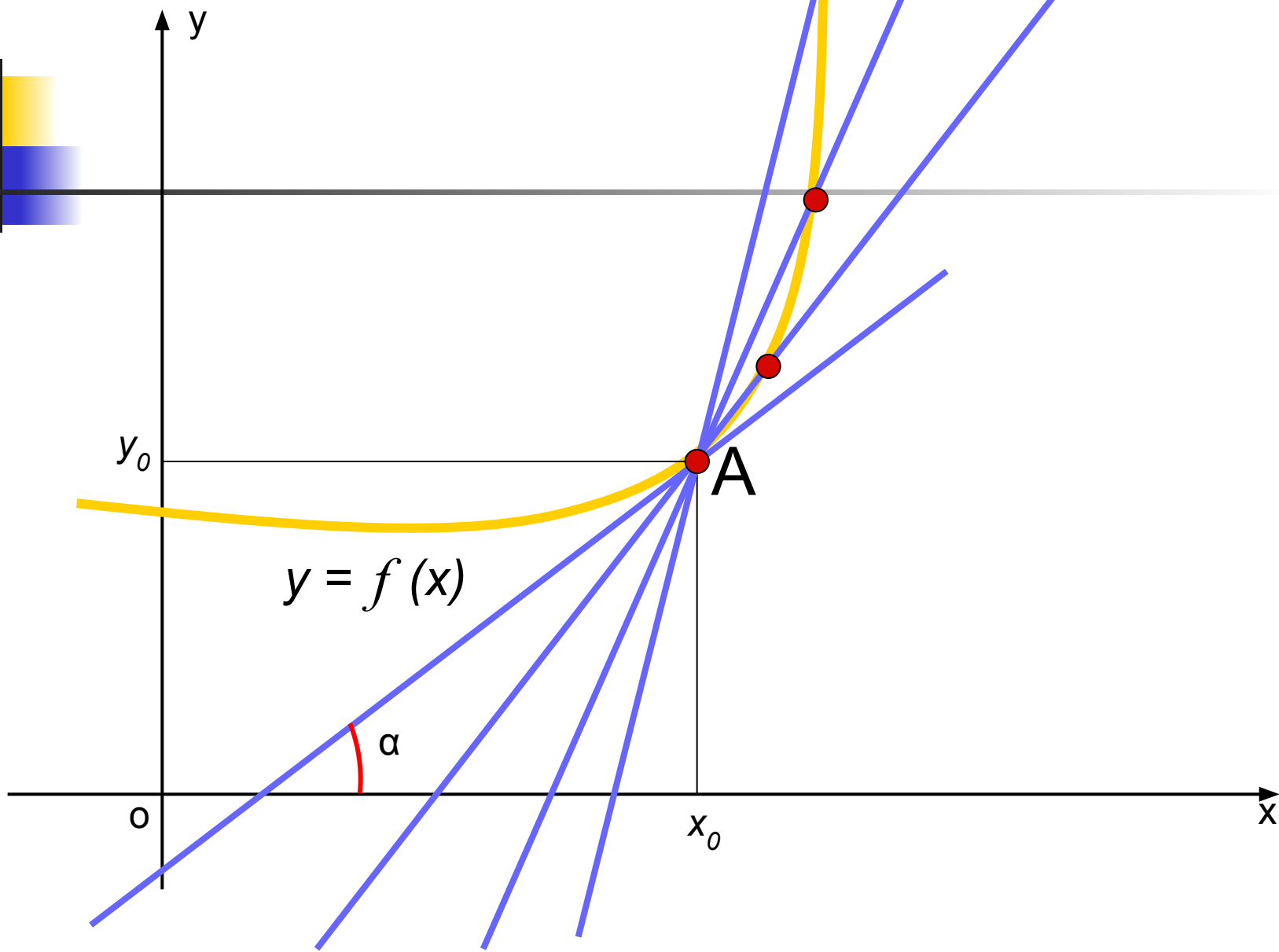
Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0 .



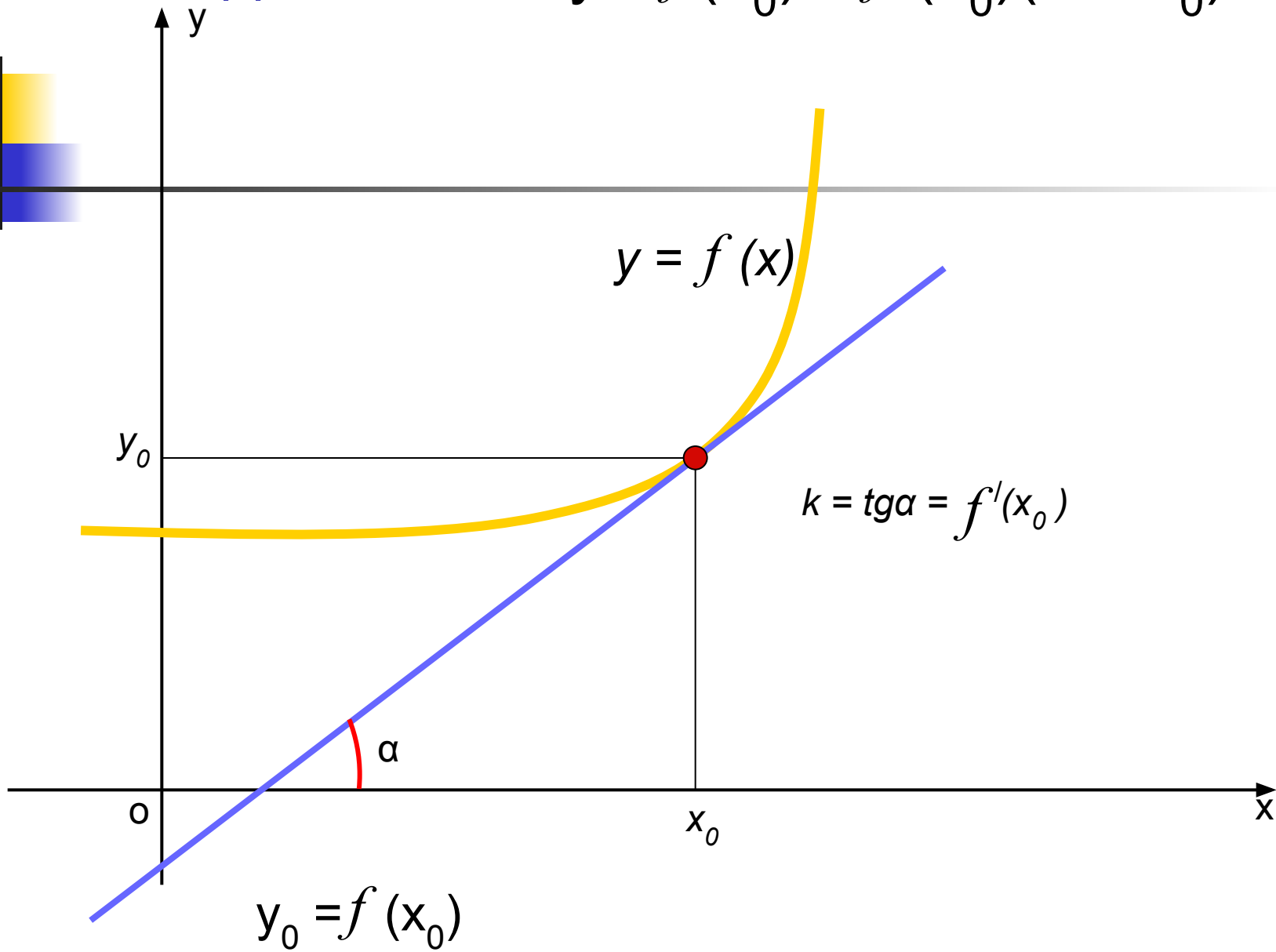
Дотична до графіка функції $y = f(x)$



Дотична до графіка функції $y = f(x)$



Рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.





Механічний зміст похідної:

$$v(t_0) = x'(t_0) \quad a(t_0) = v'(t_0)$$

x_0 – координата точки

$v(t_0)$ – швидкість точки в момент часу t_0

$a(t_0)$ – прискорення точки в момент часу t_0



ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

- Нехай $Q = Q(t)$ - кількість електрики, яка пройшла через поперечний переріз провідника за час t . Сила струму $i(t)$ в момент часу $t \in$ похідна від кількості електрики $Q(t)$ по часу t , тобто

$$i(t) = Q'(t)$$

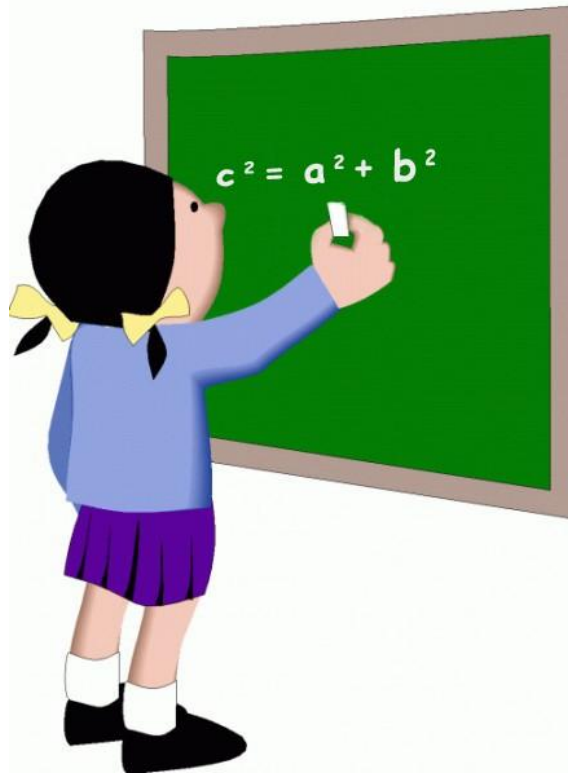
Похідна функцій $y = C$, $y = x$, $y = \sqrt{x}$

$$y = C(\text{const})$$

$$y' = 0$$

$$y = x$$

$$y' = 1$$



$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Похідна степеневі функції



$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

Похідна показникової функції



$$y = a^x$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

Похідна логарифмічних функцій

$$y = \log_a x$$

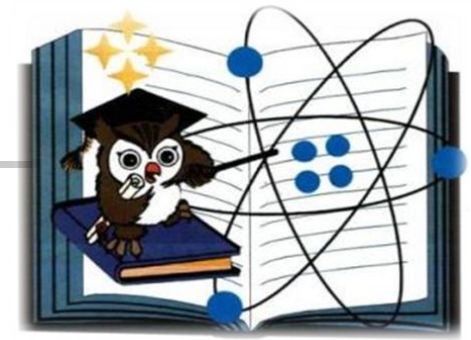
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$



Похідна тригонометричних функцій



$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

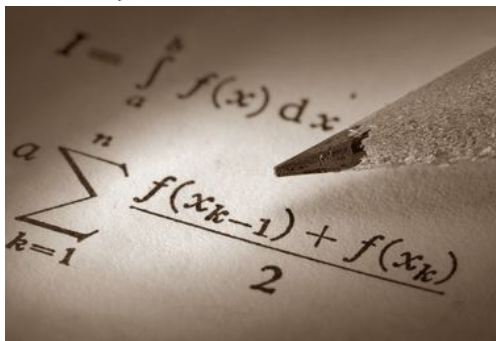
$$y' = -\sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



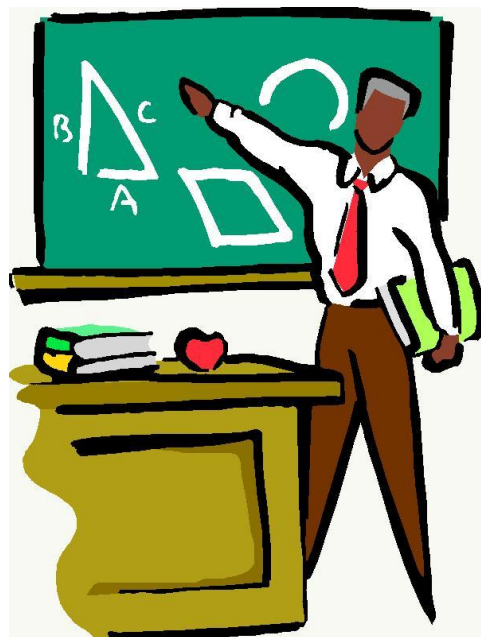
Похідні від обернених тригонометричних функцій

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



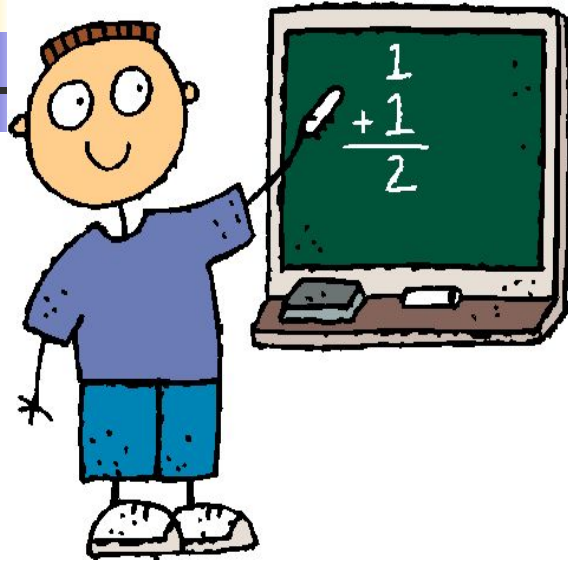
$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідна складеної функції



$$y = f(\varphi(x))$$

$$y' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'_x$$

Приклад:

$$y = \sin \sqrt{\ln 8^x}$$

$$y' = \cos \sqrt{\ln 8^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln 8^x}} \cdot \frac{1}{8^x} \cdot 8^x \ln 8$$

Формула похідної суми

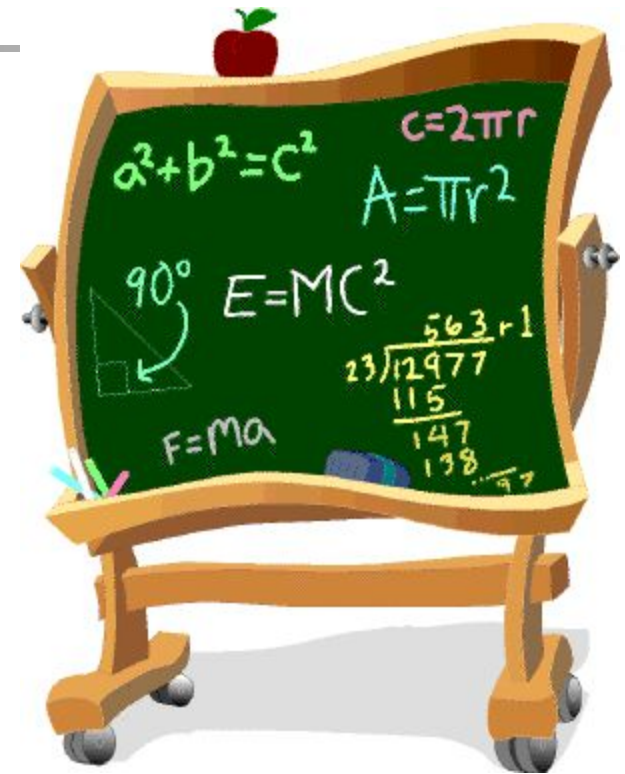
$$y = u + v$$

$$y' = u' + v'$$

Приклад:

$$y = 4x^6 + x^7 + 3x$$

$$y' = 24x^5 + 7x^6 + 3$$



Формула похідної добутку

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Приклад:

$$y = \cos x \cdot \log_9 x$$

$$y' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$$



Формула похідної частки

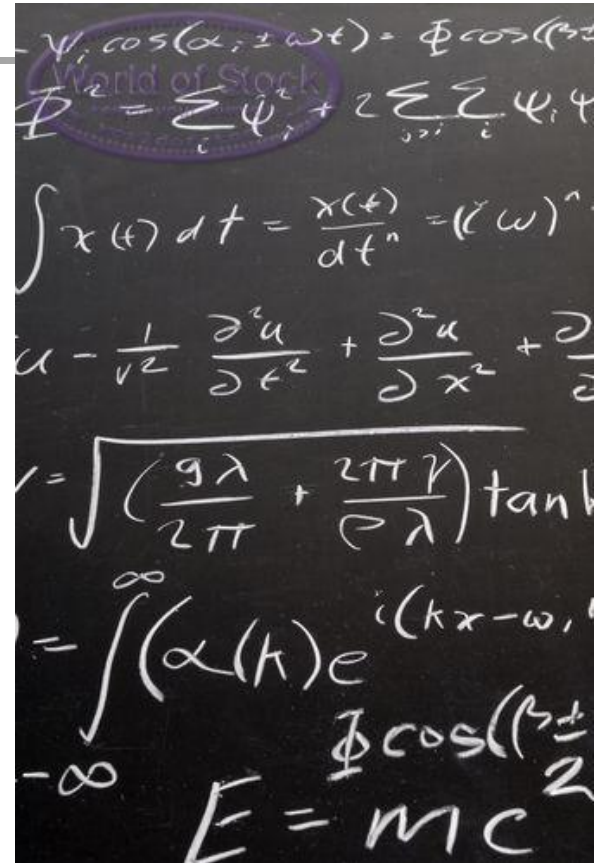
$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Приклад:

$$y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$





Контрольні запитання

1. Означення похідної.
2. Алгоритм знаходження похідної за означенням.
3. Фізичний зміст похідної.
4. Геометричний зміст похідної.
5. Електричний зміст похідної.
6. Похідна суми.
7. Похідна добутку.
8. Похідна частки.
9. Похідна складеної функції.
10. Похідна функції $y = e^x$
11. Похідна функції $y = a^x$
12. Похідна логарифмічної функції.
13. Похідна степеневі функції.
14. Похідні тригонометричних функцій.
15. Похідні обернених тригонометричних функцій.