

Дискретное вейвлет-  
преобразование.

Двумерное и многомерное вейвлет-  
преобразования.

Вейвлетная очистка от шумов и  
сжатие сигналов

Вейвлеты - это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени.

Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте. Как правило, вейвлет-преобразования (WT) подразделяют на **дискретное** (ДВП, DWT) и **непрерывное** (НВП, SWT).

ДВП используется для преобразований и кодирования сигналов, НВП - для анализа сигналов.

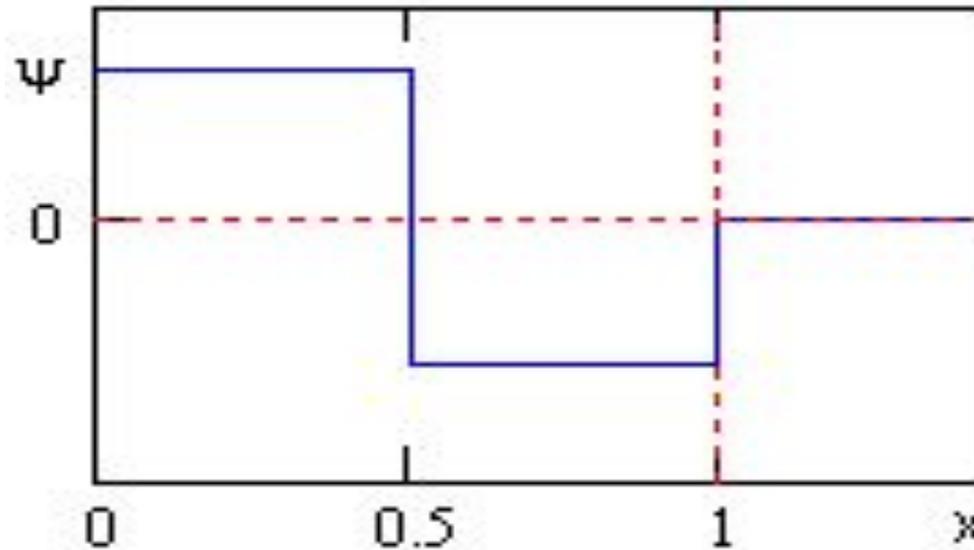
Вейвлет-анализ является разновидностью спектрального анализа, в котором роль простых колебаний играют функции особого рода, называемые вейвлетами.

Базисная функция вейвлет – это некоторое "короткое" колебание, но не только. Понятие частоты спектрального анализа здесь заменено масштабом, и, чтобы перекрыть "короткими волнами" всю временную ось, введен сдвиг функций во времени.

Базис вейвлетов – это функции типа  $\Psi((t-b)/a)$ , где  $b$  - сдвиг,  $a$  – масштаб.

Функция  $\Psi(t)$  должна иметь нулевую площадь и, еще лучше, равными нулю первый, второй и прочие моменты.

- Вейвлет Хаара - это короткое прямоугольное колебание на интервале  $[0,1]$ .



- В 30-е годы физик Пол Леви (Paul Levy), исследуя броуновское движение, обнаружил, что базис Хаара лучше, чем базис Фурье, подходит для изучения деталей броуновского движения.

Аналитика вейвлетных преобразований сигналов определяется математической базой разложения сигналов, которая аналогична преобразованиям Фурье.

Основной отличительной особенностью вейвлет-преобразований является новый базис разложения сигналов - вейвлетные функции.

Свойства вейвлетов принципиально важны как для самой возможности разложения сигналов по единичным вейвлетным функциям, так и для целенаправленных действий над вейвлетными спектрами сигналов, в том числе с последующей реконструкцией сигналов по обработанным вейвлетным спектрам.

- Вейвлеты могут быть ортогональными, полуортогональными, биортогональными.
  - Вейвлетные функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными, с компактной областью определения и не имеющие таковой, а также иметь различную степень гладкости.

*Наибольшее применение находят биортогональные вейвлеты.*

Базисными функциями вейвлет-преобразований могут быть самые различные функции с компактным носителем - модулированные импульсами синусоиды, функции со скачками уровня и т.п. Они обеспечивают хорошее отображение и анализ сигналов с локальными особенностями, в том числе со скачками, разрывами и перепадами значений с большой крутизной.

- Было бы желательно иметь такое вейвлет-преобразование сигналов, которое обеспечивало бы полную информационную эквивалентность вейвлетного спектра сигналов временному представлению и однозначность декомпозиции - реконструкции сигналов.

*Однако это возможно только при использовании ортогональных и биортогональных вейвлетов.*

- Для качественного анализа сигналов и локальных особенностей в сигналах может применяться более обширная номенклатура вейвлетных функций, которые хотя и не обеспечивают реконструкцию сигналов, но позволяют оценить информационное содержание сигналов и динамику изменения этой информации.

## Дискретное вейвлет-преобразование

При обработке данных на ПК может выполняться дискретизированная версия непрерывного вейвлет-преобразования с заданием дискретных значений параметров  $(a, b)$  вейвлетов с произвольным шагом  $\Delta a$  и  $\Delta b$ . В результате получается избыточное количество коэффициентов, намного превосходящее число отсчетов исходного сигнала, которое не требуется для реконструкции сигналов.

- Дискретное вейвлет-преобразование обеспечивает достаточно информации, как для анализа сигнала, так и для его синтеза, являясь вместе с тем экономным по числу операций и по требуемой памяти.

- ДВП оперирует с дискретными значениями параметров  $a$  и  $b$ , которые задаются, как правило, в виде степенных функций:

$$a = a_0^{-m}, \quad b = k \cdot a_0^{-m}, \quad a_0 > 1, \quad m, k \in I,$$

где  $I$  – пространство целых чисел  $\{-\infty, \infty\}$ ,  $m$  – параметр масштаба,  $k$  – параметр сдвига.

Число использованных вейвлетов по масштабному коэффициенту  $m$  задает уровень *декомпозиции* (разложения) сигнала

- • Базис пространства  $L^2(\mathbb{R})$  в дискретном представлении:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), \quad m, k \in I, \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

- Вейвлет-коэффициенты прямого преобразования:

$$C_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt$$

- Значение 'а' может быть произвольным, но обычно принимается равным 2, при этом преобразование называется **диадным вейвлет-преобразованием**.
- Для диадного преобразования разработан быстрый алгоритм вычислений, аналогичный быстрому преобразованию Фурье, что предопределило его широкое использование при анализе массивов цифровых данных.
- Обратное дискретное преобразование для непрерывных сигналов при нормированном ортогональном вейвлетном базисе пространства:

$$s(t) = \sum_m \sum_k C_{mk} \psi_{mk}(t)$$

## Достоинства и недостатки вейвлетных преобразований.

1. Вейвлетные преобразования обладают всеми достоинствами преобразований Фурье.
2. Вейвлетные базисы могут быть хорошо локализованными как по частоте, так и по времени.
3. Вейвлетные базисы, в отличие от преобразования Фурье, имеют много разнообразных базовых функций, свойства которых ориентированы на решение различных задач. Базисные вейвлеты могут реализовываться функциями различной гладкости.
4. Недостатком вейвлетных преобразований является их относительная сложность.
5. Вейвлетные составляющие сигнала в сечениях его спектра не имеют ничего общего с синусоидами, и представлены, как правило, сигналами достаточно сложной и не всегда понятной формы, что может затруднять их наглядное представление и понимание.

# Практическое использование вейвлет-преобразований

Связано, в основном, с **дискретными вейвлетами** как в силу повсеместного использования цифровых методов обработки данных, так и в силу ряда различий дискретного и непрерывного вейвлет-преобразований.

- **Непрерывные вейвлеты** дают несколько более наглядное представление результатов анализа в виде поверхностей вейвлет-коэффициентов по непрерывным переменным.
- Однако базисы на основе непрерывных вейвлетов, как правило, не являются строго ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности. У **дискретных вейвлетов** эти проблемы снимаются, что обеспечивает более точную реконструкцию сигналов.

# Вейвлетные функции

Выбор анализирующего вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала.

- С учетом характерных особенностей различных вейвлетов во временном и в частотном пространстве, можно выявлять в анализируемых сигналах те или иные свойства и особенности, которые незаметны на графиках сигналов, особенно в присутствии шумов.
- Если при этом задача реконструкции сигнала не ставится, то это расширяет семейство используемых регулярных вейвлетных функций, в том числе неортогональных.

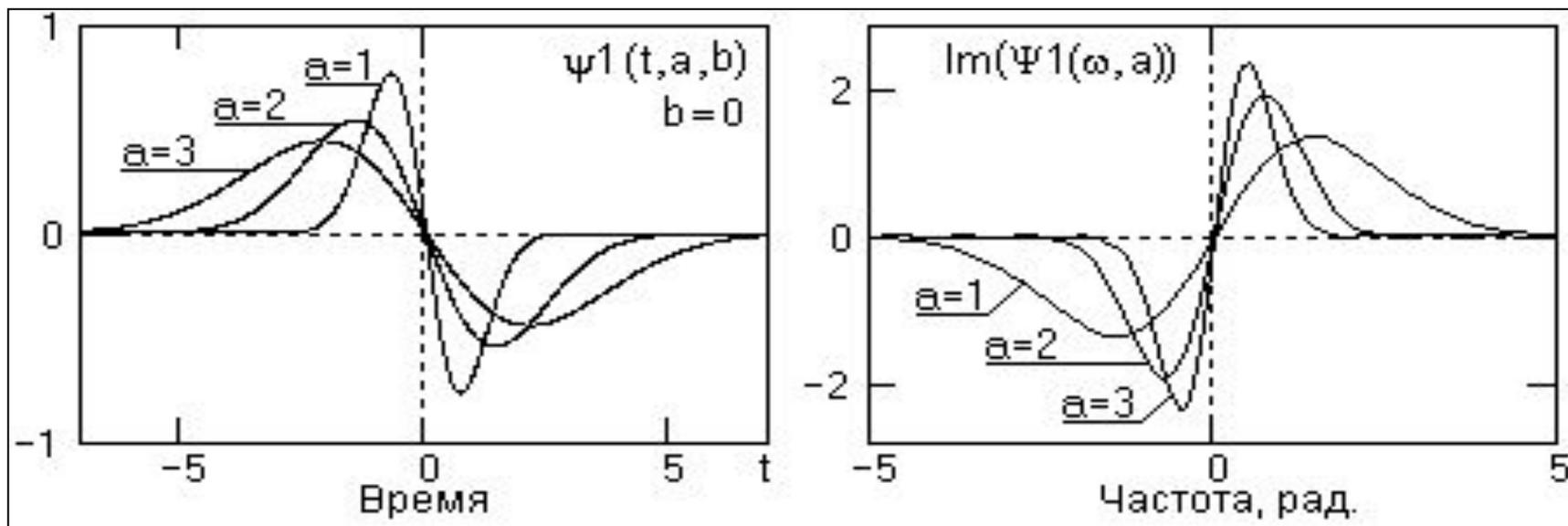
- При анализе сигналов вейвлетами четного типа (симметричными или близкими к симметричным), **гармоническим сигналам** обычно соответствуют **яркие горизонтальные полосы** вейвлетных **пиков** и **впадин** на доминирующих частотах вейвлетов, совпадающих с частотой гармоник сигналов.

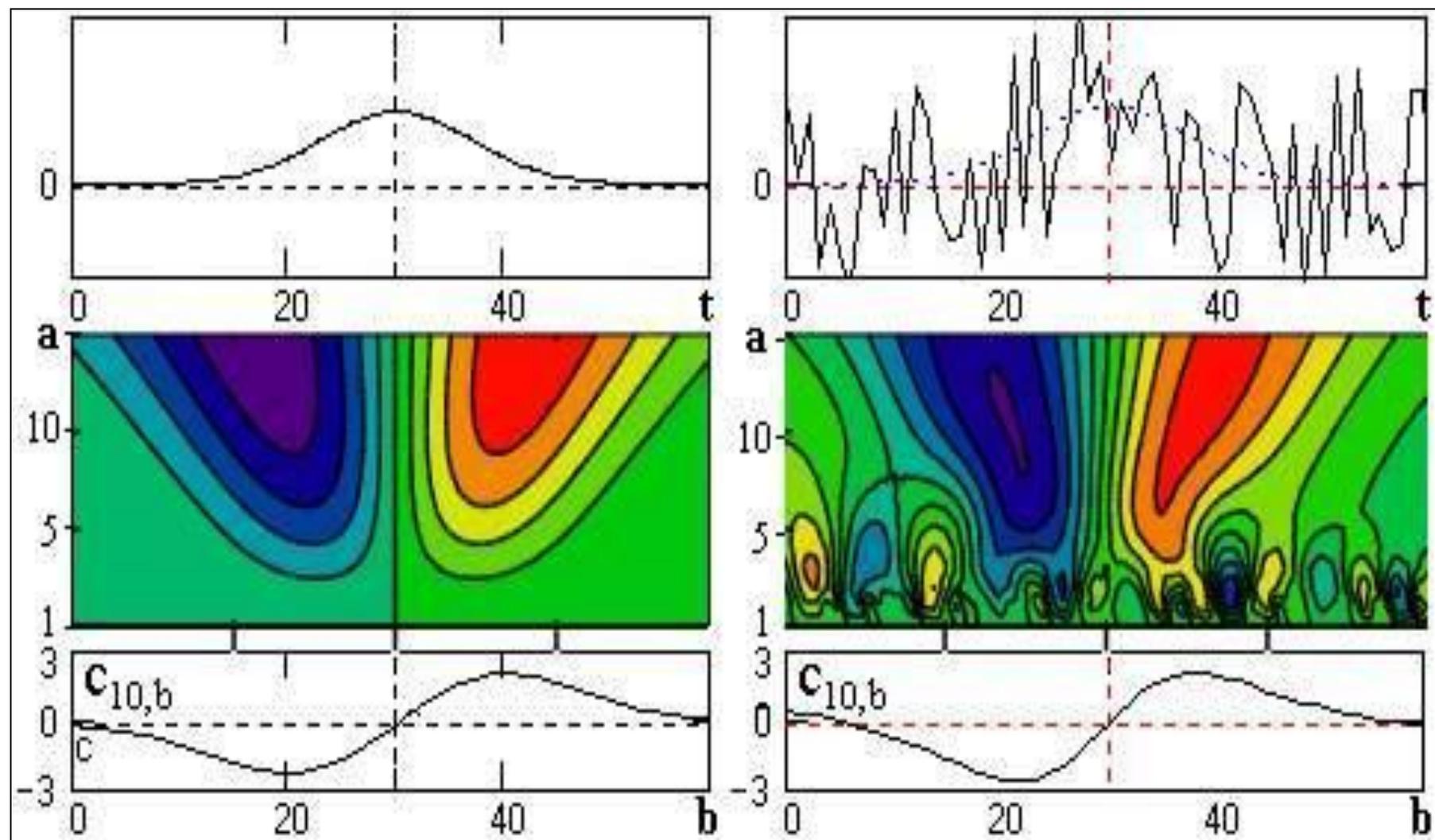
**Нарушения гладкости сигналов** фиксируются **вертикальными полосами**, **пики** в сигналах выделяются **максимумами**, а **впадины** – **минимумами** вейвлетных коэффициентов.

- Вейвлеты нечетного типа более резко реагируют на скачки и быстрые изменения в сигналах, отмечая их максимумами или минимумами в зависимости от знака дифференциалов. Чем резче выражены особенности сигналов, тем сильнее они выделяются на спектрограммах.
- При анализе произвольных сигналов использование разнотипных вейвлетов позволяет повысить достоверность выделения локальных особенностей сигналов.

Для конструирования вейвлетов часто используются производные функции Гаусса, которые имеют наилучшую локализацию как во временной, так и в частотной областях.

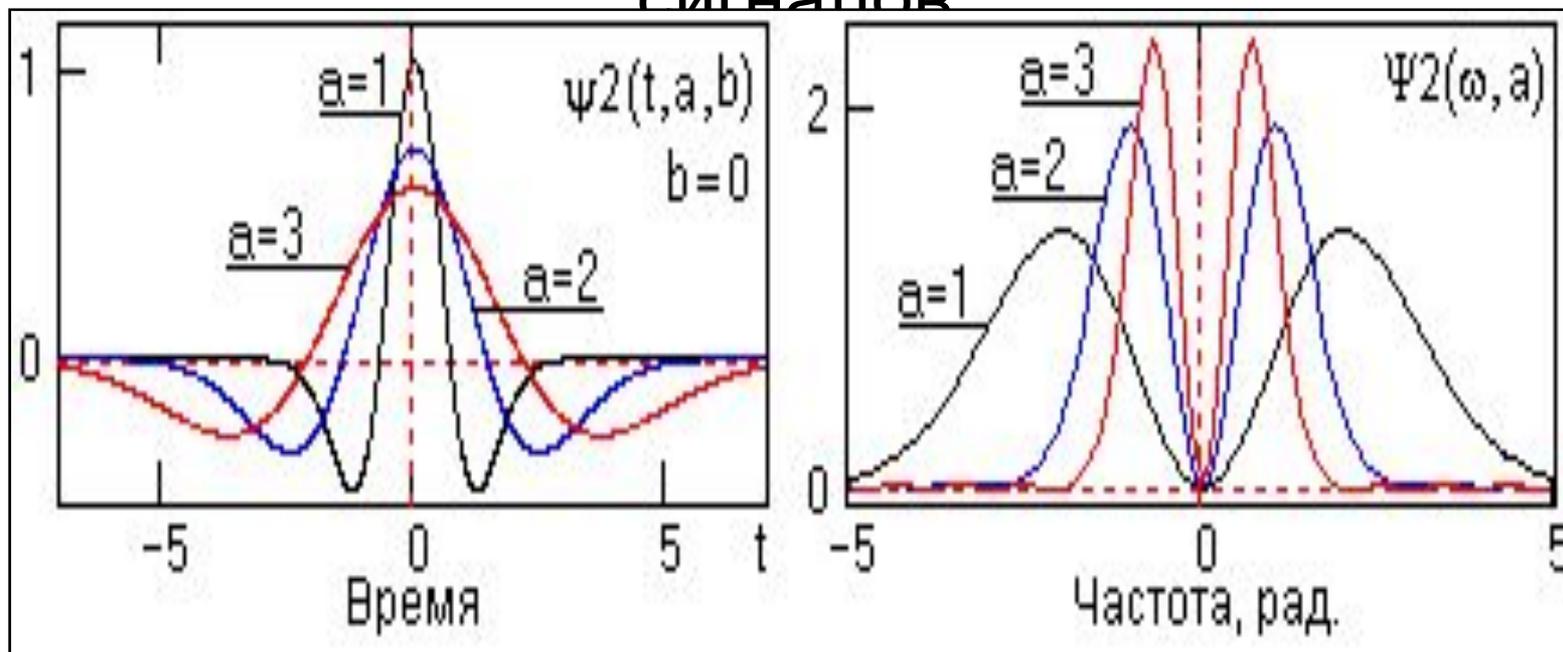
**WAVE-вейвлет** вычисляется по первой производной ( $n=1$ ) функции Гаусса и приведен на рисунке ниже во временной и частотной области для трех значений масштабных коэффициентов 'a'. Форма вейвлета относится к нечетным функциям и, соответственно, спектр вейвлета является МНИМЫМ.

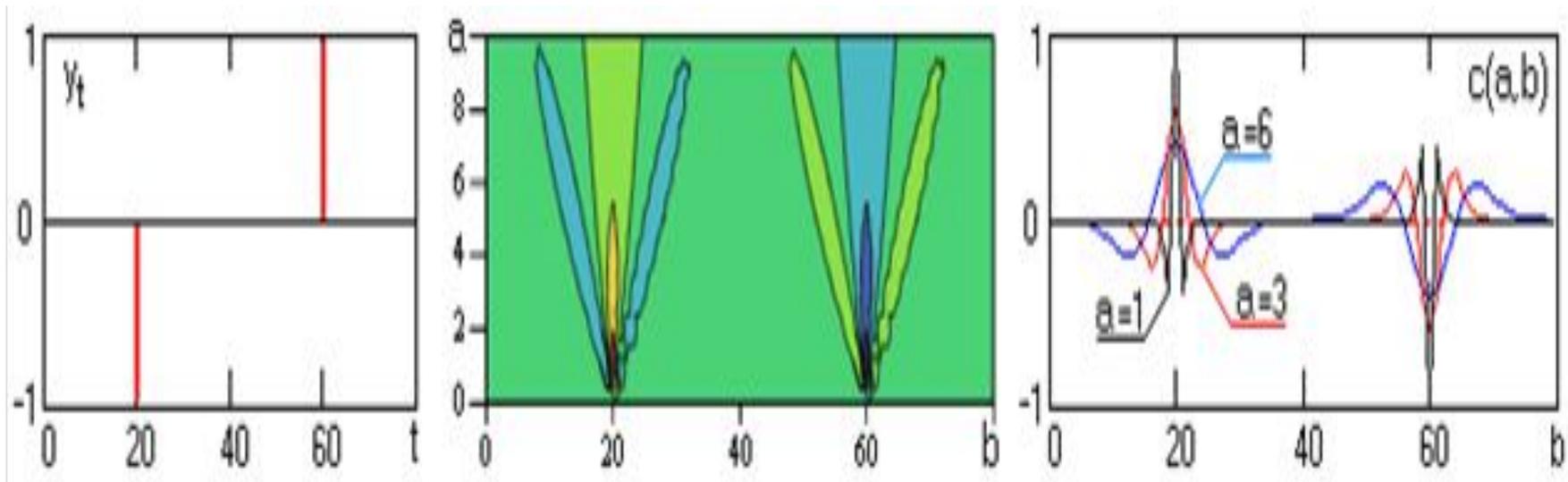




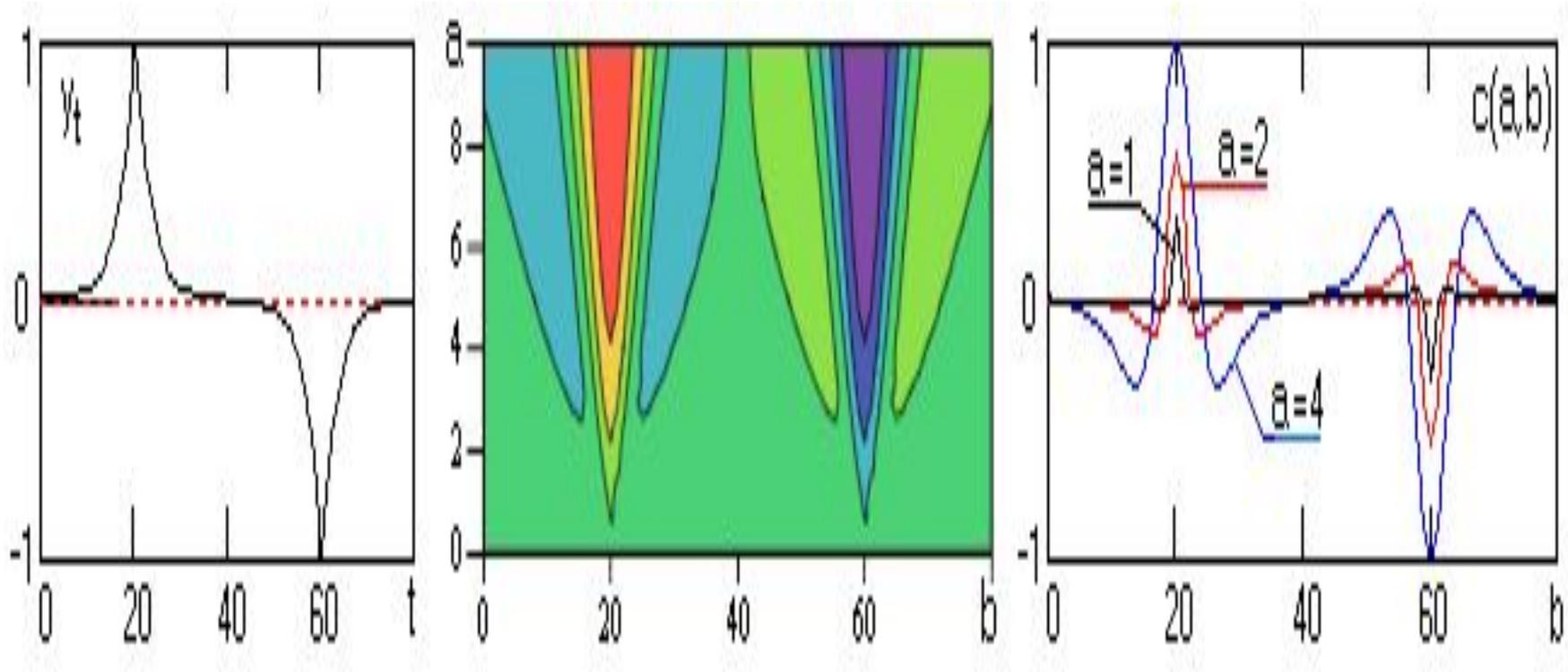
***МНАТ-вейвлет*** (Mexican hat – мексиканская шляпа) вычисляется по второй производной функции Гаусса ( $n=2$ ). Вейвлет симметричен, спектр вейвлета представлен только действительной частью и хорошо локализован по частоте, нулевой и первый моменты вейвлета равны нулю. Применяется для анализа сложных

сигналов





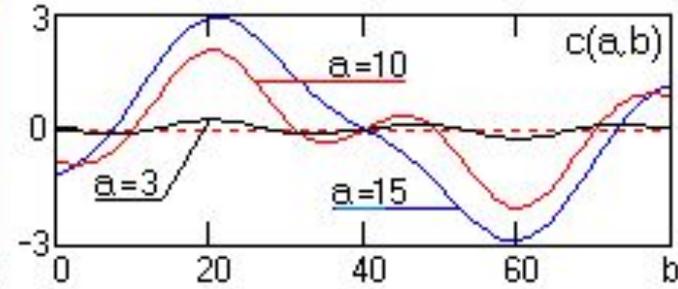
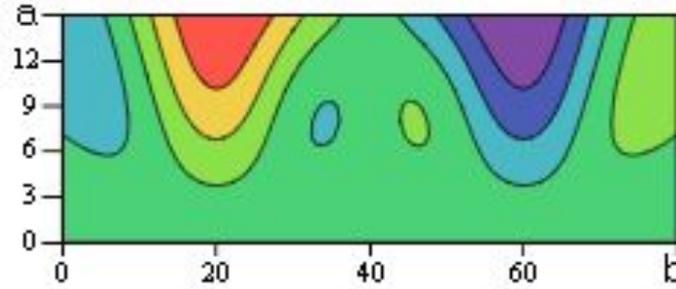
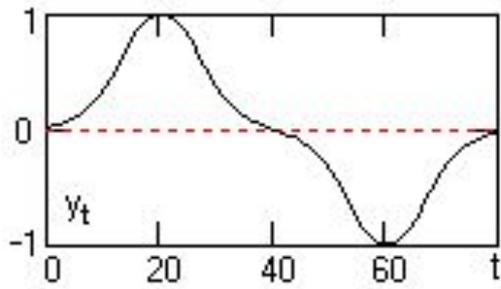
Преобразование импульсов Кронекера вейвлетами  
МНАТ



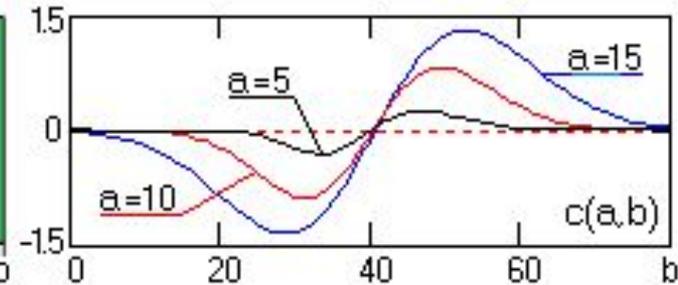
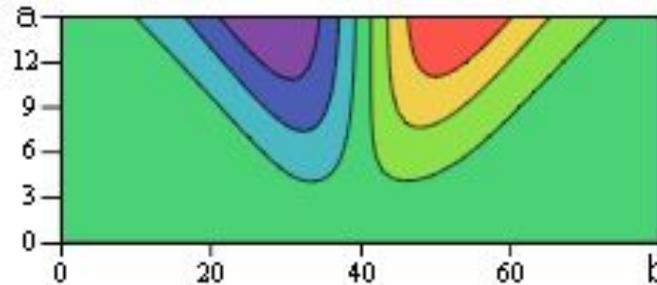
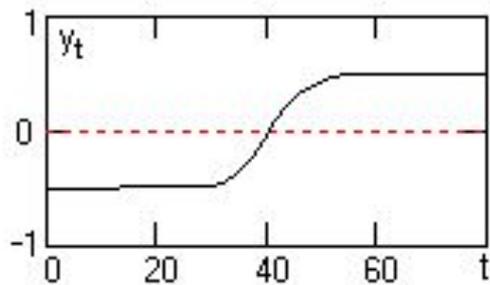
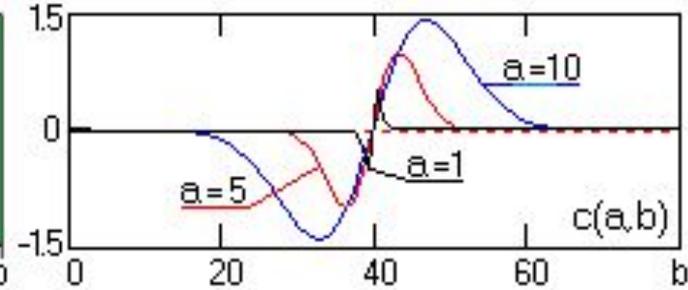
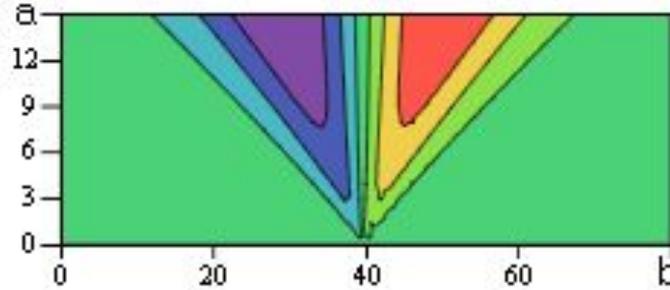
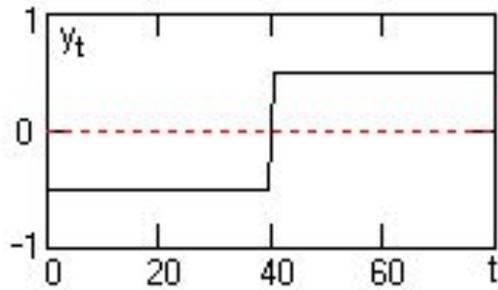
Преобразование функций Лапласа вейвлетами  
МНАТ

$$\psi(t, a, b) = \frac{1.031}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] \right\}$$

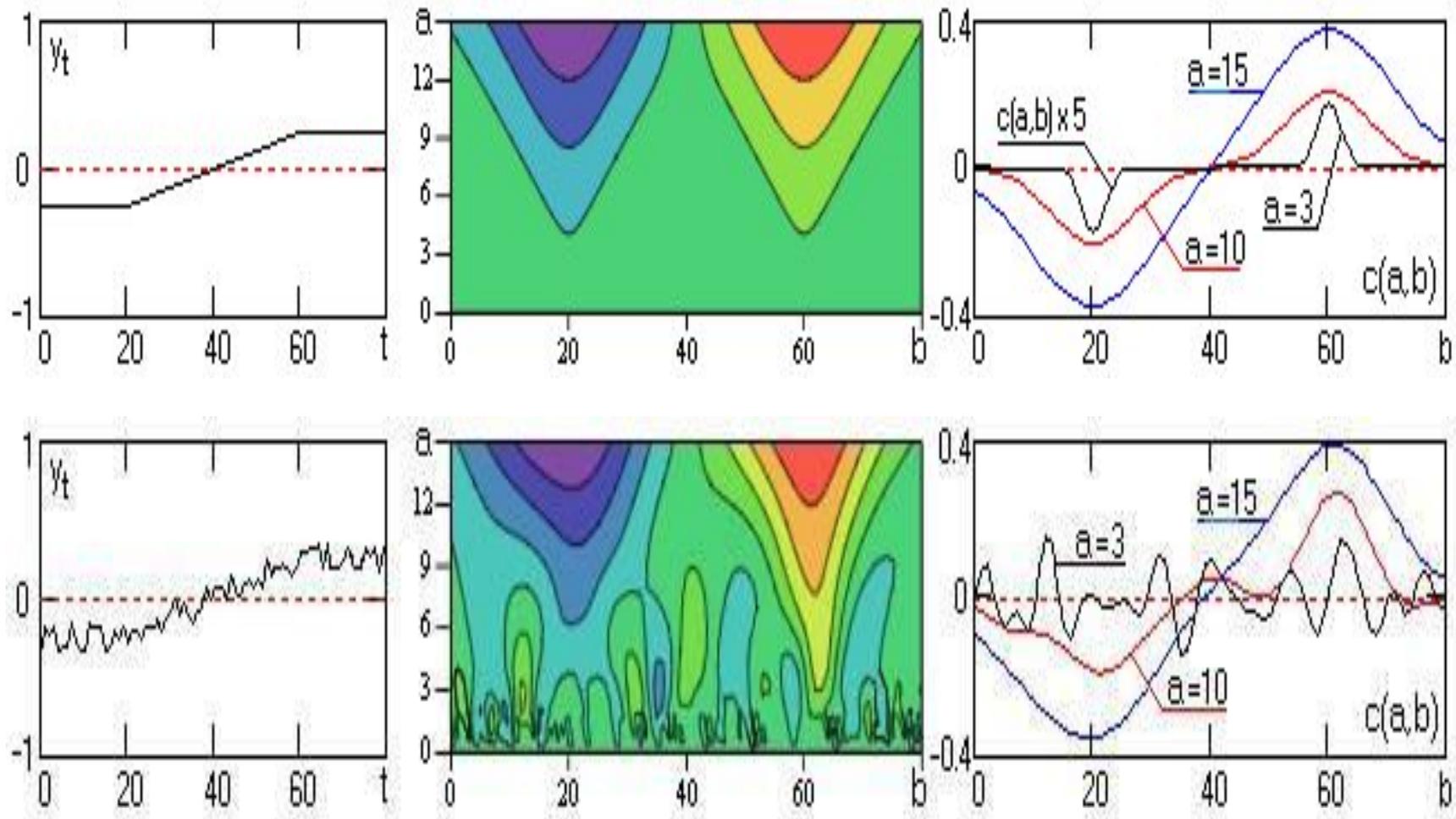
$$c(a, b) = \sum_{t=b-3a}^{b+3a} s(t)\psi(t, a, b)$$



Преобразование функций Гаусса

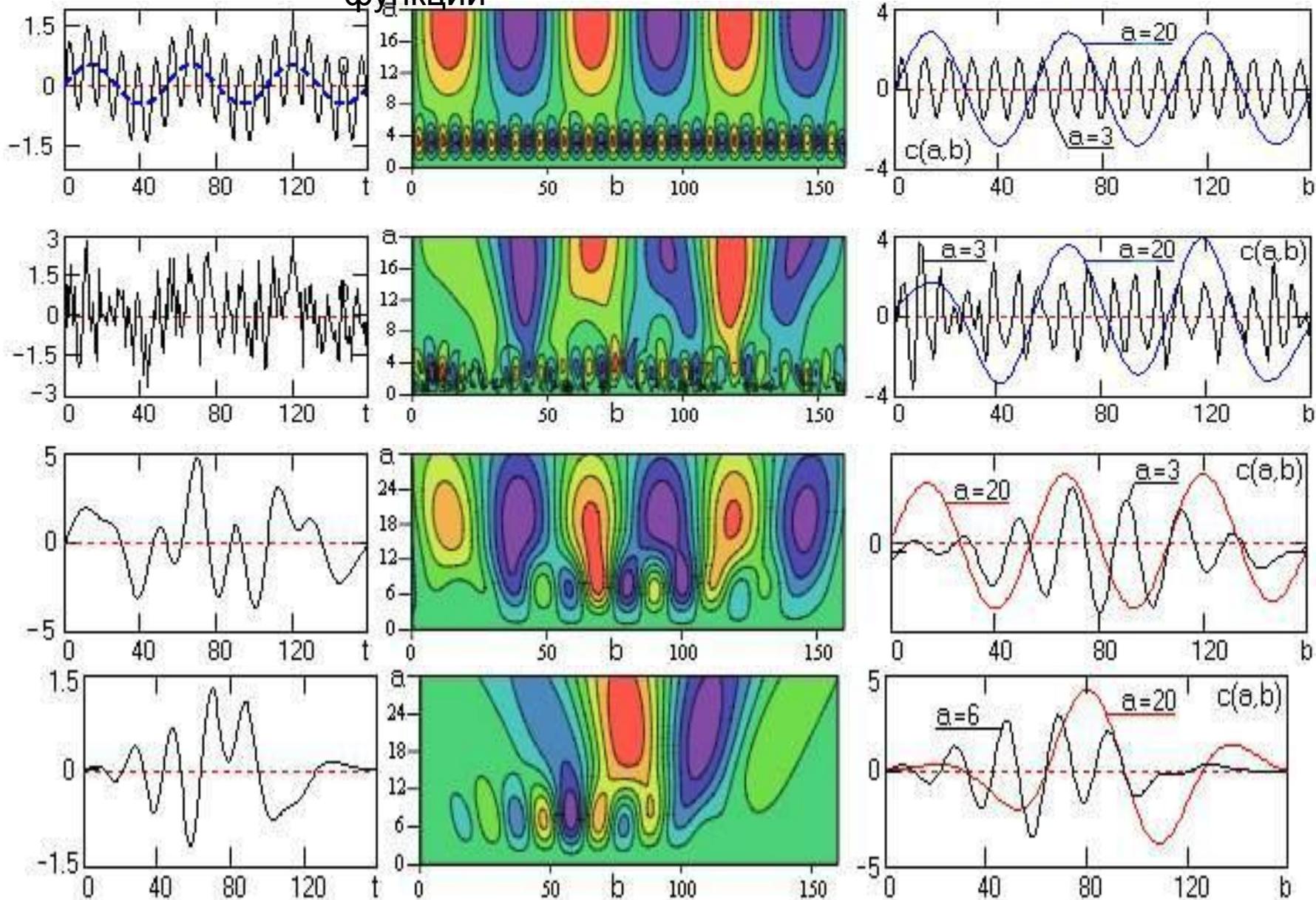


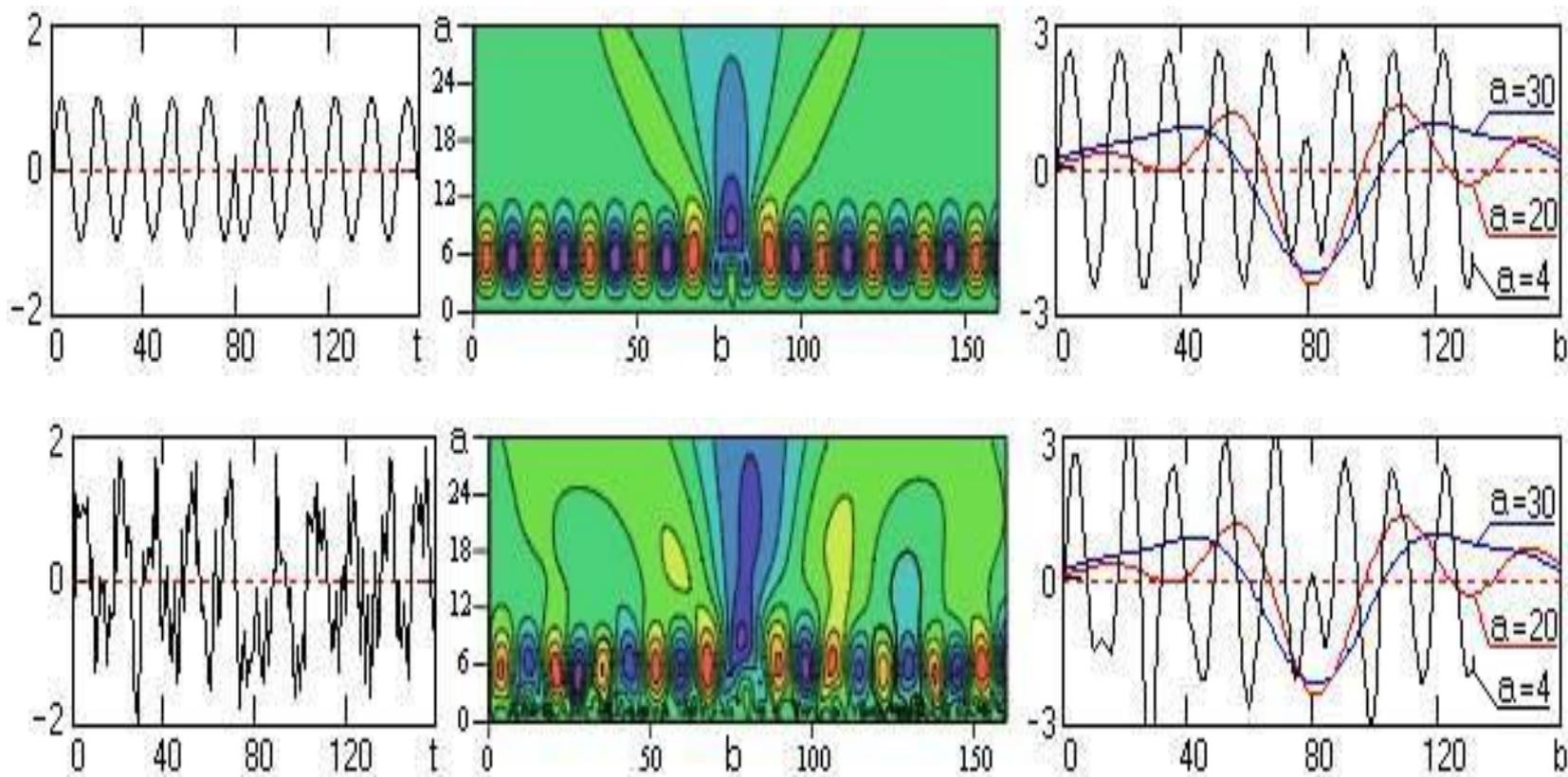
Преобразование перепада постоянного значения функций



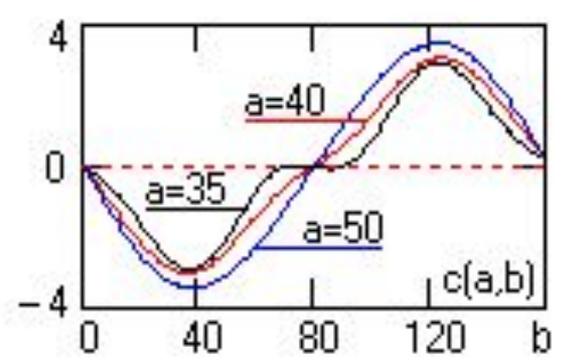
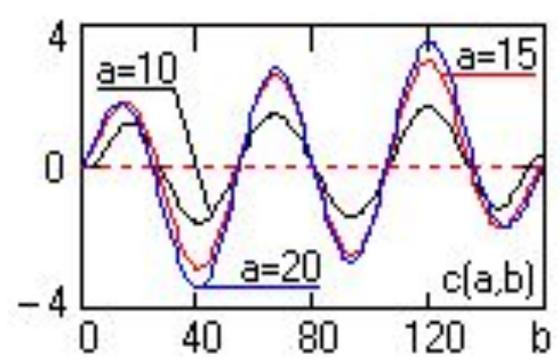
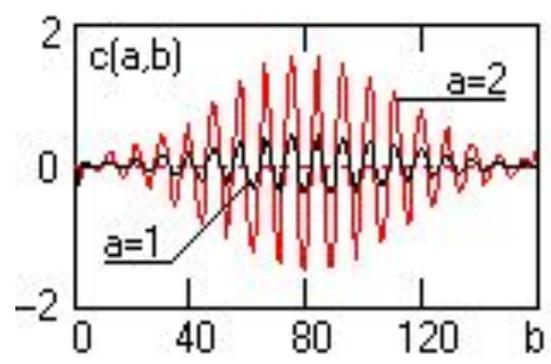
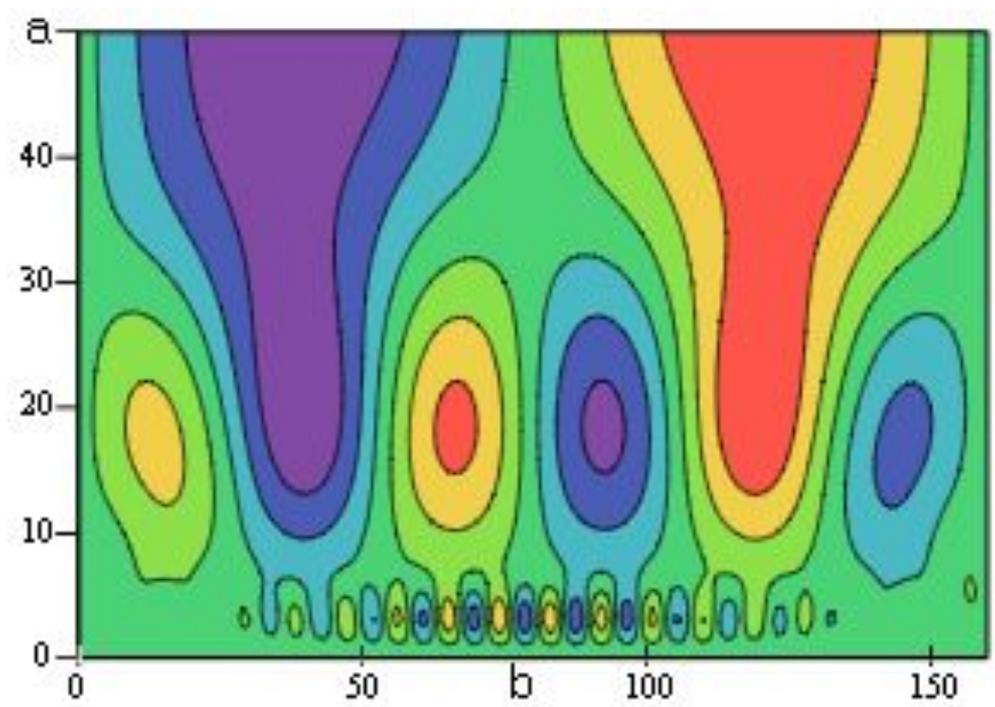
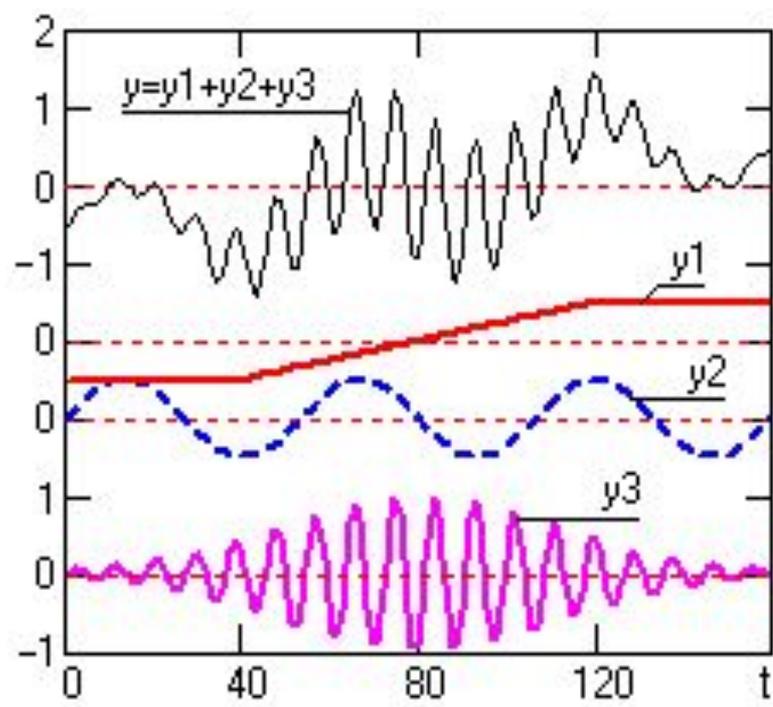
Преобразование изломов функций

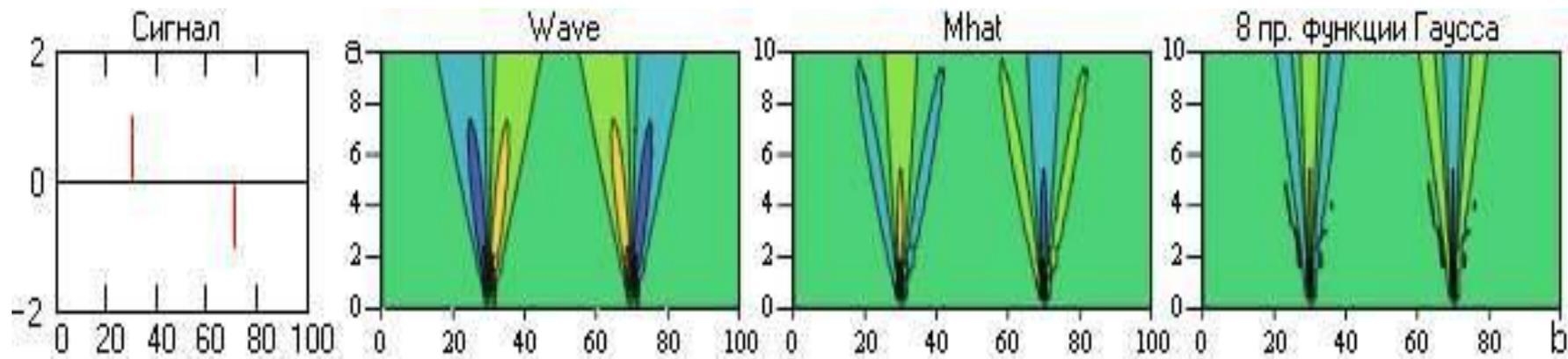
# Преобразование гармонических функций



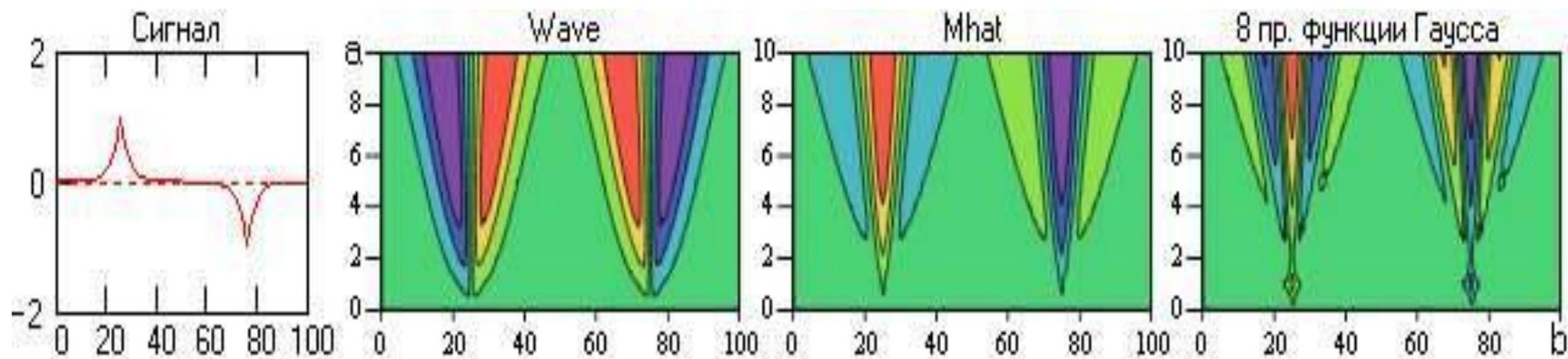


Изменение фазы гармонического сигнала

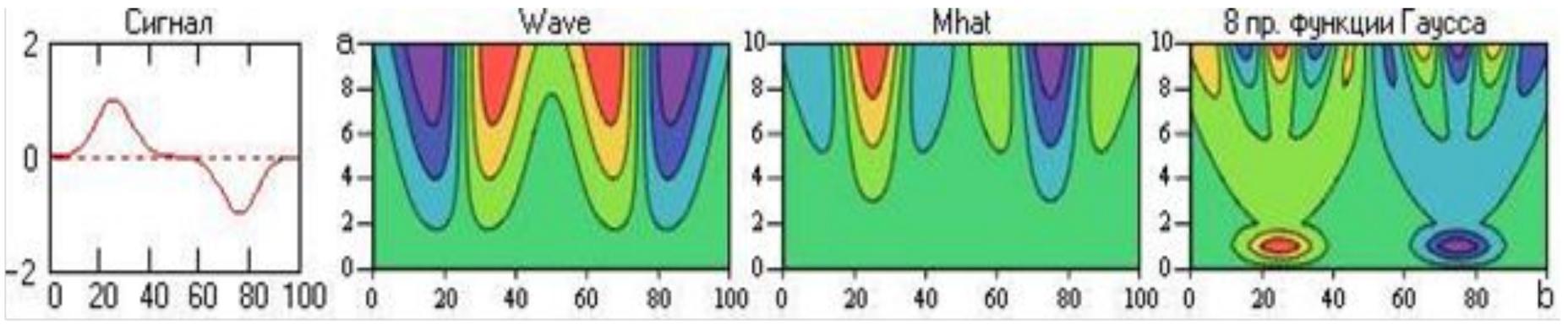




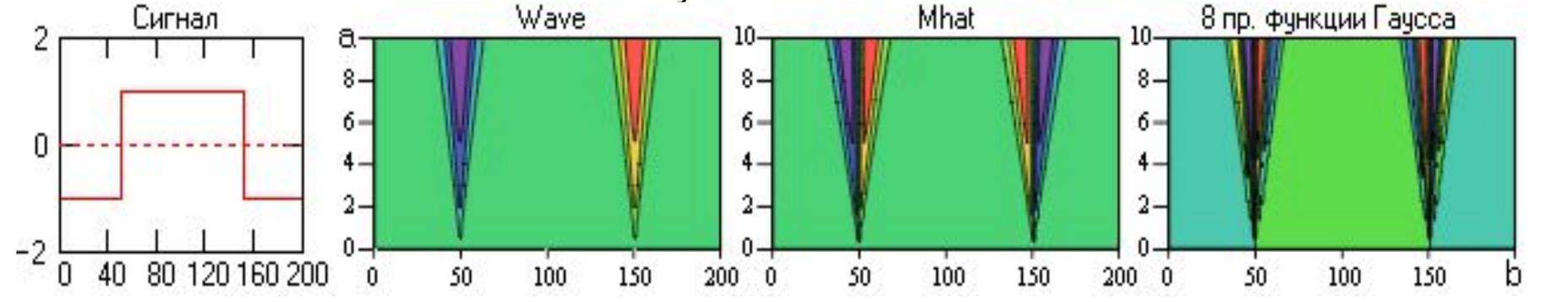
Импульсы  
Кронекера



Пики  
Лапласа



Функции Гаусса



Крутые скачки

# ПРИНЦИП КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

Произвольный информационный сигнал обычно рассматривается в виде суммы разнотипных составляющих: региональной функции тренда, циклических компонент с определенным периодом повторения, локальных особенностей (аномалий) разного порядка и флуктуаций (шумов) вокруг всех вышеперечисленных составляющих сигнала.

Инструментом разделения (декомпозиции) сигналов на такие составляющие, анализа их порядка и реконструкции сигналов из определенных составляющих (или с исключением определенных составляющих, например шумов или малозначимых деталей) является кратномасштабный (многомасштабный) анализ (КМА).

КМА позволяет получить хорошее разрешение по времени (плохое по частоте) на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте (плохое по времени) на низких частотах.

Этот подход становится эффективным, если сигнал имеет короткие высокочастотные компоненты и протяженные низкочастотные компоненты.

*Именно такие сигналы и встречаются чаще всего.*

Идея кратномасштабного анализа заключается в том, что разложение сигнала производится по ортогональному базису, образованному сдвигами и кратномасштабными копиями вейвлетной функции. Свертка сигнала с вейвлетами позволяет выделить характерные особенности сигнала в области локализации этих вейвлетов, причем, чем больший масштаб имеет вейвлет, тем более широкая область сигнала будет оказывать влияние на результат свертки.

Понятие кратномасштабного анализа (Multiresolution analyses) является фундаментальным в теории вейвлетов.

Для кратномасштабного анализа разработан быстрый каскадный алгоритм вычислений, подобный быстрому преобразованию Фурье.

Под кратномасштабным анализом понимается описание пространства  $L^2(\mathbb{R})$  через иерархические вложенные подпространства  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , которые не пересекаются и объединение которых в пределе дает  $L^2(\mathbb{R})$ .

Система подпространств должна удовлетворять следующим условиям:

1. Условие вложенности:  $V_m \subset V_{m+1}$ .
2. Условие полноты и плотности разбиения:  
$$V_m = L^2(\mathbb{R}).$$
3. Для пространства  $V_0$  существует  $\phi$ -функция  $\phi(t) \in V_0$ , целочисленные сдвиги которой по аргументу образуют ортонормированный базис пространства  $V_0$ :

$$\phi_{0,k} = \phi(t-k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*Функция  $\phi(t)$  называется скейлинг-функцией (scaling function) или масштабирующей функцией*

Если подпространство  $V_0$  имеет ортонормированный базис  $\phi_{0,k}$ , то и все остальные подпространства также имеют ортонормированные базисы, которые образуются масштабным преобразованием базиса  $\phi_{0,k}$ :

$$\Phi_{m,k}(\mathbf{t}) = a^{m/2} \Phi(a^m \mathbf{t} - \mathbf{k}), \quad (*)$$

$m, k$  – целые числа

Стандартное значение параметра ' $a$ ' в кратномасштабном анализе равно 2.

Кратность КМА, равную 2, в принципе, можно заменить любым целым числом, большим 1, но использование двоичной кратности оптимально и позволяет использовать *быстрое вейвлет-преобразование*.

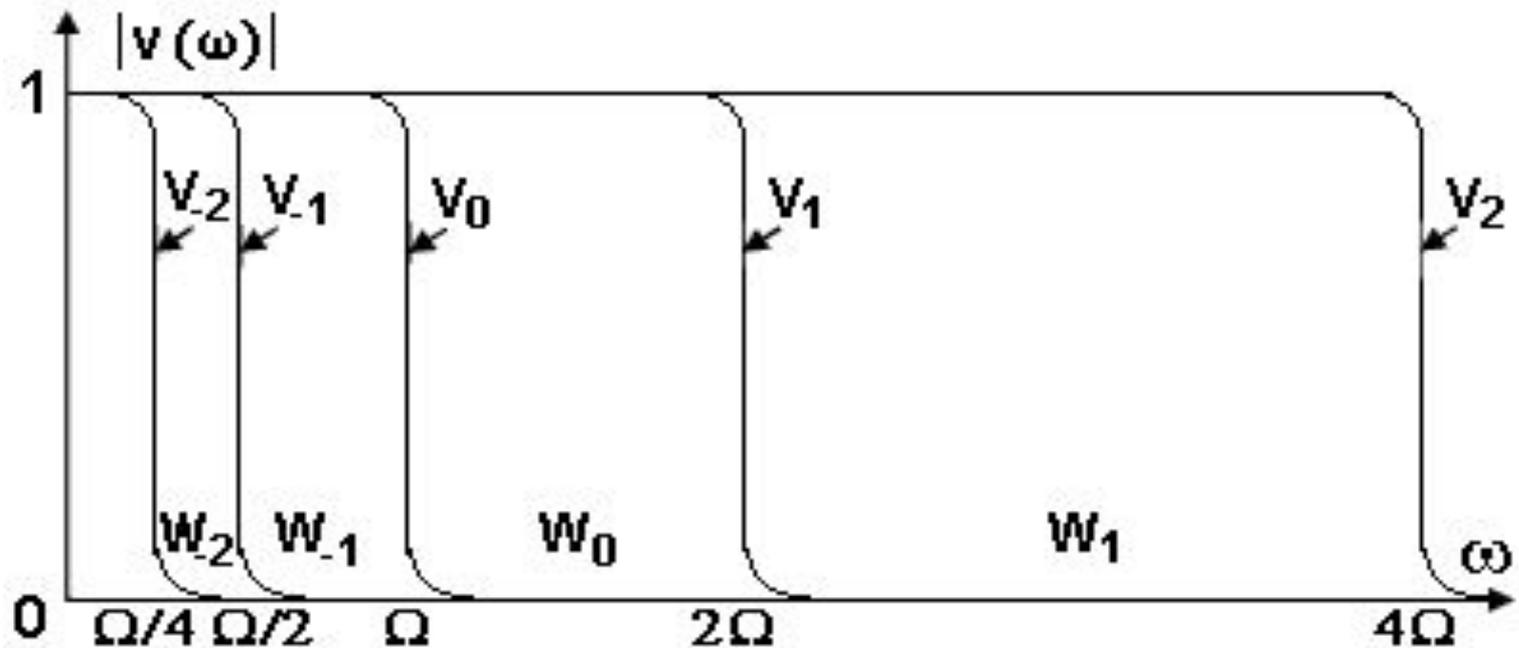
Выбор функции  $\phi_0$  также произволен, но желательно стремиться к тому, чтобы спектр функций подпространства  $V_0$  был сконцентрирован в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

- Если сигнал  $v(t)$  принадлежит пространству  $V_m$ , то одновременно он входит и в пространство  $V_{m+1}$ , и вместе с ним в этом пространстве находится и сигнал  $v(2t)$ .
- Переменная  $m$  называется масштабным коэффициентом, или уровнем анализа. Если значение  $m$  мало, то функция  $v_m(t)$  есть грубая аппроксимация  $s(t)$ , в которой отсутствуют детали.

**При увеличении значений  $m$  точность аппроксимации повышается.**

Перевод сигнала из пространства  $V_{m+1}$  с более высоким разрешением в пространство  $V_m$  представляет собой нормированную децимацию сигнала - двукратное прореживание с соответствующим уменьшением в 2 раза числа отсчетов сигнала.

Это эквивалентно низкочастотной фильтрации сигналов  $v_{m+1}(k) \in V_{m+1}$  оператором с частотой среза, равной половине частоты Найквиста сигналов  $v_{m+1}(k)$ , с автоматическим сокращением (за счет прореживания) главного частотного диапазона децимированного сигнала  $v_m(k)$  в 2 раза.



Здесь приведено отображение такой операции в частотной области представления пространств  $V_m(\omega)$ , которое имеет физический смысл разделения спектров сигналов (и самих сигналов при их восстановлении из спектров) на низкочастотную  $V_{m-1}(\omega)$  и высокочастотную  $W_{m-1}$  части.

Подпространства  $W_m$  называются *детализирующими* в том смысле, что именно они содержат ту дополнительную информацию (не пересекающуюся с пространством  $V_m$ ), необходимую для повышения уровня разрешения сигнала с  $V_m$  на  $V_{m+1}$  при его восстановлении. При этом подпространства  $W_m$  являются ортогональными к  $V_m$ .

# Биортогональные вейвлеты

Для обеспечения симметрии при точной реконструкции сигналов применяются биортогональные вейвлеты. Для вейвлетов  $\psi_{m,k}(t)$  с базисом Риса можно определить дуальный вейвлет  $\psi_{m,k}^\#(t)$ , который образует биортогональную пару с вейвлетом  $\psi_{m,k}(t)$ , удовлетворяющую требованию ортогональности их скалярного произведения:

$$\langle \psi_{m,k}(t), \psi_{m,k}^\#(t) \rangle = d_{m,k}.$$

При использовании биортогональной пары декомпозиция сигналов может производиться вейвлетом  $\psi_{m,k}(t)$ , а реконструкция - парным вейвлетом  $\psi_{m,k}^\#(t)$ , или наоборот. Разложение функций с биортогональными вейвлетами может производиться в двух эквивалентных формах:

$$s(t) = \langle s(t), \psi_{m,k}^\#(t) \rangle \psi_{m,k}.$$

$$s(t) = \langle s(t), \psi_{m,k}(t) \rangle \psi_{m,k}^\#.$$

- Свойства регулярности биортогональных вейвлетов могут заметно отличаться. Если один из них обладает гладкостью порядка  $n$ , то дуальный ему вейвлет может иметь, по крайней мере,  $n$  нулевых моментов.

***Большое число нулевых моментов дает хорошие результаты при сжатии информации, а большая степень гладкости вейвлета обеспечивает более точную реконструкцию сигналов.***

При этом оба вейвлета можно выполнить симметричными.

# Многомерные вейвлет-преобразования

Многомерные вейвлет-преобразования являются расширением одномерных преобразований. Вейвлетными функциями такого преобразования являются тензорные произведения одномерных функций по размерности преобразования.

- Двумерные вейвлеты определяются функциями двух переменных  $(x, y)$  в двумерном пространстве  $V(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , при этом параметры  $a$  и  $b$  могут быть индивидуальными для каждой переменной. В общей форме для двумерного непрерывного вейвлета:

$$\Psi_{a_1, b_1; a_2, b_2}(x, y) = (a_1 \cdot a_2)^{-1/2} \Psi_0[(x - b_1)/a_1, (y - b_2)/a_2].$$

# ВЕЙВЛЕТЫ В МАТЛАВ. ГРУБЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ

К так называемым грубым (crude) вейвлетам относятся симметричные вейвлеты Морле (morl) и вейвлеты на основе производных функции Гаусса (gaus). Среди гауссовских вейвлетов распространено использование вейвлета по второй производной (mexh).

У всех вейвлетов данной группы отсутствует  $\phi$ -функция (масштабирующая),  $\psi$ -функция (вейвлет) не имеет компактного носителя и задается явно в аналитической форме, анализ не является ортогональным, возможность реконструкции сигналов не гарантируется.

# ГРУБЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ

- Применяются при выполнении непрерывной декомпозиции сигналов. Вычисляются в  $N$  точках регулярной сетки  $X$  для интервала  $[sb,ub]$  следующими функциями:

- $[psi,X] = \mathbf{morlet}(sb,ub,N),$

- $[psi,X] = \mathbf{mexihat}(sb,ub,N),$

- $[psi,X] = \mathbf{gauswavf}(sb,ub,N,P),$

где  $P$  – номер производной функции Гаусса.

- Вейвлет Морле вычисляется по формуле:

$$\psi(x) = \exp[-x^2/2) \cdot \cos(5x)].$$

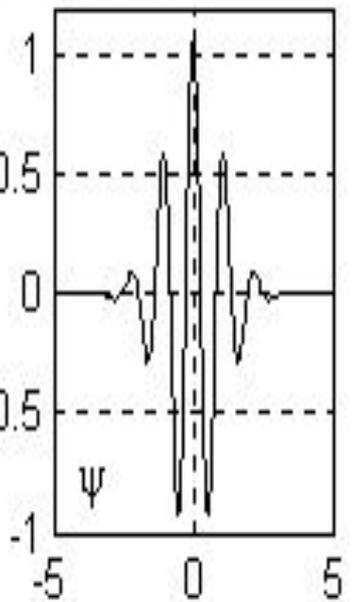
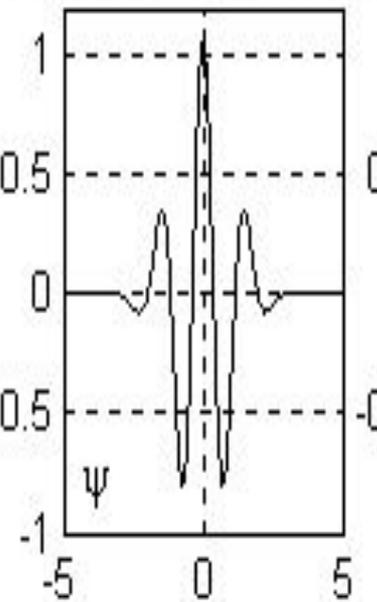
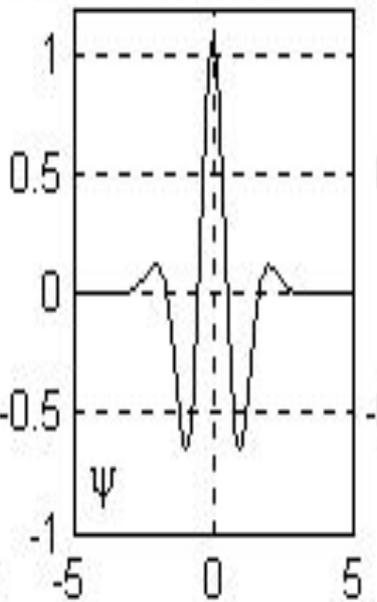
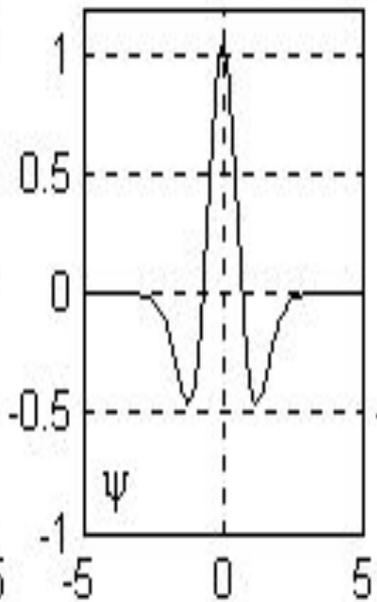
- Формула вейвлета 'mexh':

$$\psi(x) = (1/\sqrt{3}) \pi^{-0.25} (1-x^2) \exp(-x^2/2).$$

Morlet



Вейвлеты по 2-, 4-, 8- и 16-той производной функции Гаусса

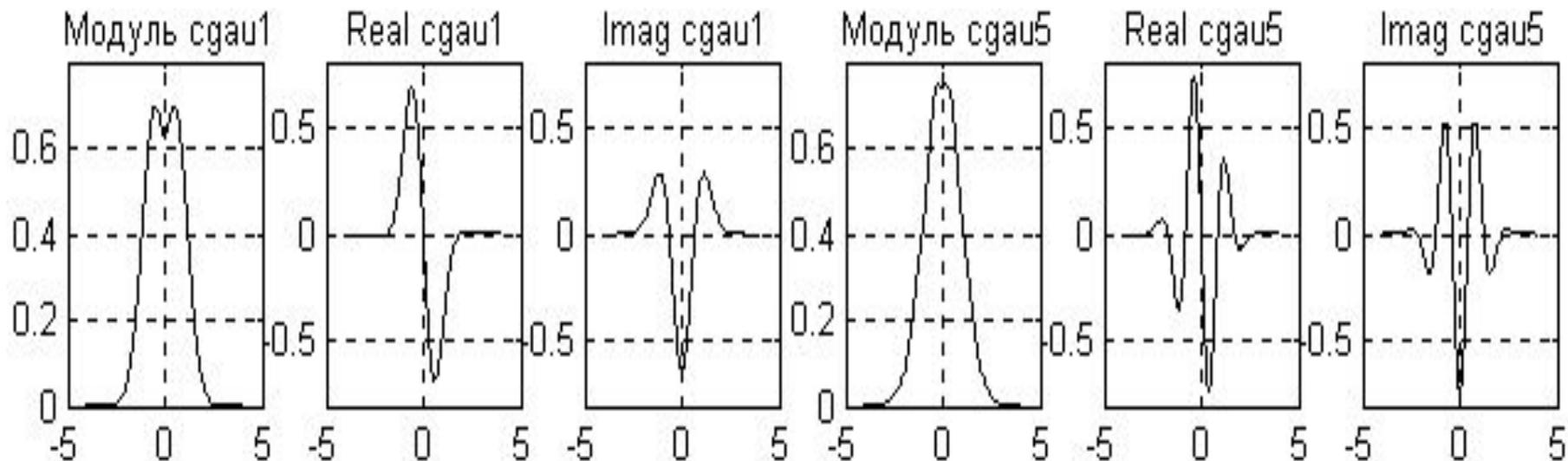


Средняя частота вейвлета 'mexh' – 0.25 Гц. Частота гауссовских вейвлетов повышается по мере роста номера производной, из которой он образован. Для функции 16-той производной средняя частота примерно равна частоте вейвлета 'morl', которая составляет 0.8125 Гц.

# КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ

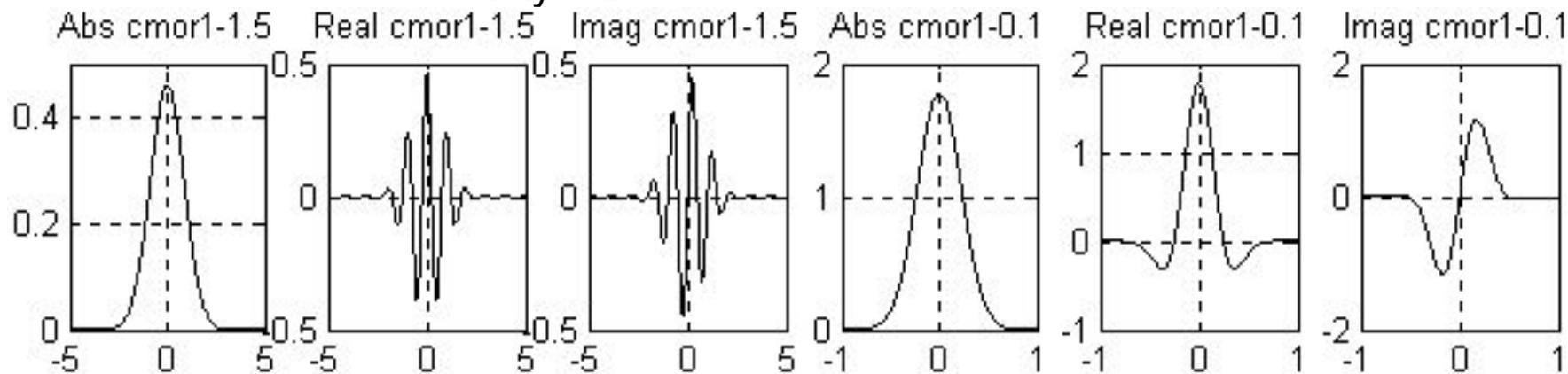
К комплексным вейвлетам относятся семейства вейвлетов Гаусса (cgauN), Морле (cmorFb-Fc), Шеннона (shanFb-Fc), и частотные B-сплайновые вейвлеты (fbspM-Fb-Fc). Phi-функции у них отсутствуют, psi-функции не имеют компактного носителя, анализ не ортогональный и свойства реконструкции сигналов не гарантируются.

Используются для комплексной декомпозиции сигналов.



Комплексные вейвлеты

Гаусса



Комплексные вейвлеты

Морле

# ВЕЙВЛЕТНАЯ ОЧИСТКА ОТ ШУМОВ И СЖАТИЕ СИГНАЛОВ

Типовой метод подавления шумов – удаление высокочастотных составляющих из спектра сигнала.

Применительно к вейвлетным разложениям это может быть реализовано непосредственно удалением детализирующих коэффициентов высокочастотных уровней. И вейвлеты имеют в этом отношении весьма широкие возможности, что позволяет создавать адаптивные системы очистки сигналов от шумов в зависимости от их особенностей.

Шумовые компоненты, и особенно большие случайные выбросы значений сигналов, можно рассматривать в виде множеств локальных особенностей сигналов.

Задавая некоторый порог для их уровня и срезая по нему детализирующие коэффициенты, можно не только уменьшать уровень шумов, но и устанавливать пороговые ограничения на нескольких уровнях разложения с учетом конкретных характеристик шумов и сигналов для различных типов вейвлетов.

□ Операция сжатия сигналов с удалением малозначимых значений вейвлет-коэффициентов также выполняется на основе определенных пороговых ограничений их значений, и во многом практически тождественна операциям удаления шумов

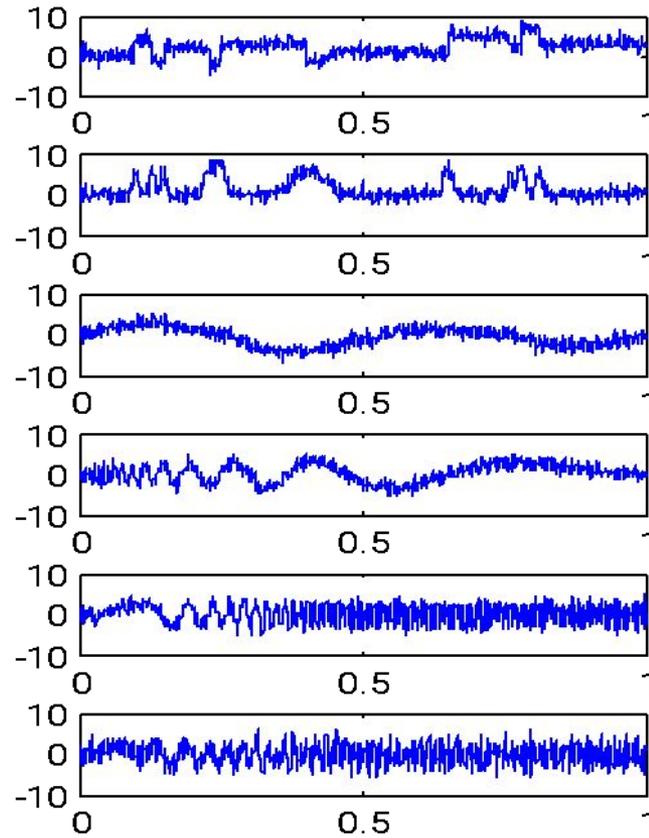
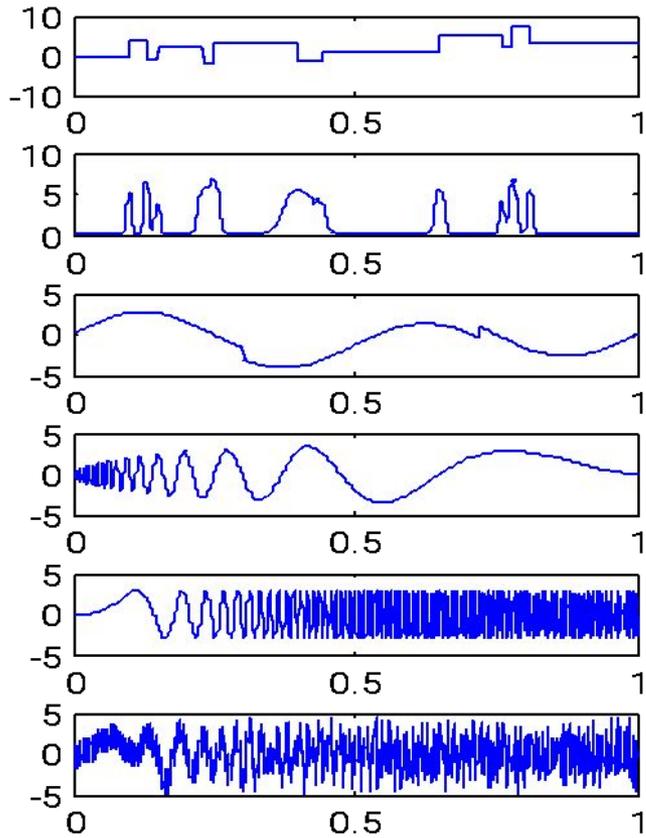
# Очистка от шумов и сжатие в MATLAB

При очистке сигналов от шумов и сжатии используется быстрое вейвлет-преобразование (БВП). При этом всегда следует учитывать, что если полный размер сигнала составляет  $M$ -отсчетов, а максимальный уровень разложения равен  $N$ , то для обеспечения нормальной работы БВП отношение  $M/2^N$  должно быть целым числом, что обеспечивает целое число коэффициентов на последнем уровне разложения. Если это условие не выполняется, рекомендуется дополнять массив отсчетов нулевыми или любыми другими значениями.

Изучение технологий и методик очистки сигналов от шумов и сжатия сигналов удобно проводить на тестовых сигналах, которые генерируются функциями:

- – вектор-сигнал функции FUN (с номерами от 1 до 6)  $X = \text{wnoise}(\text{FUN}, N)$  на  $2^N$  сетке в интервале  $[0,1]$ .
- $[X, XN] = \text{wnoise}(\text{FUN}, N, \text{SQRT})$  – то же, со средним квадратическим отклонением  $\text{std}(X) = \text{SQRT}$ . Вектор  $XN$  является суммой вектора  $X$  и белого шума Гаусса  $(0,1)$ .
- $[X, XN] = \text{wnoise}(\text{FUN}, N, \text{SQRT}, \text{INIT})$  – то же, с заданием начального числа  $\text{INIT}$  для генерации псевдослучайных чисел.

$\text{INIT}$  обеспечивает повторение одной и той же последовательности случайных чисел при моделировании и отладке программ.



```

n=10; ind=linspace(0,1,2^n);
for i=1:6
    [x, xn]=wnoise(i, n, 2);
    subplot(6,2,2*i-1); plot(ind, x);
    subplot(6,2,2*i); plot(ind, xn);
end

```

Модель зашумленного сигнала обычно принимается аддитивной:

$$s(n) = f(n) + k \cdot e(n)$$

с равномерным шагом по аргументу  $n$ ,  
где  $f(n)$  – полезная информационная составляющая,  $e(n)$  – шумовой сигнал, например, белый шум определенного уровня со средним нулевым значением.

Процедура удаления шума выполняется с использованием ортогональных вейвлетов и включает в себя следующие операции:

- **Вейвлет-разложение сигнала**  $s(n)$  до уровня  $N$ . Значение уровня  $N$  определяется частотным спектром информационной части  $f(n)$  сигнала, которую желательно оставлять в рядах аппроксимационных коэффициентов. Тип и порядок вейвлета может существенно влиять на качество очистки сигнала от шума в зависимости как от формы сигналов  $f(n)$ , так и от корреляционных характеристик шумов.

- **Задание типа и пороговых уровней** очистки по известным априорным данным о характере шумов или по определенным критериям шумов во входном сигнале. Пороговые уровни очистки могут быть гибкими (в зависимости от номера уровня разложения) или жесткими (глобальными).

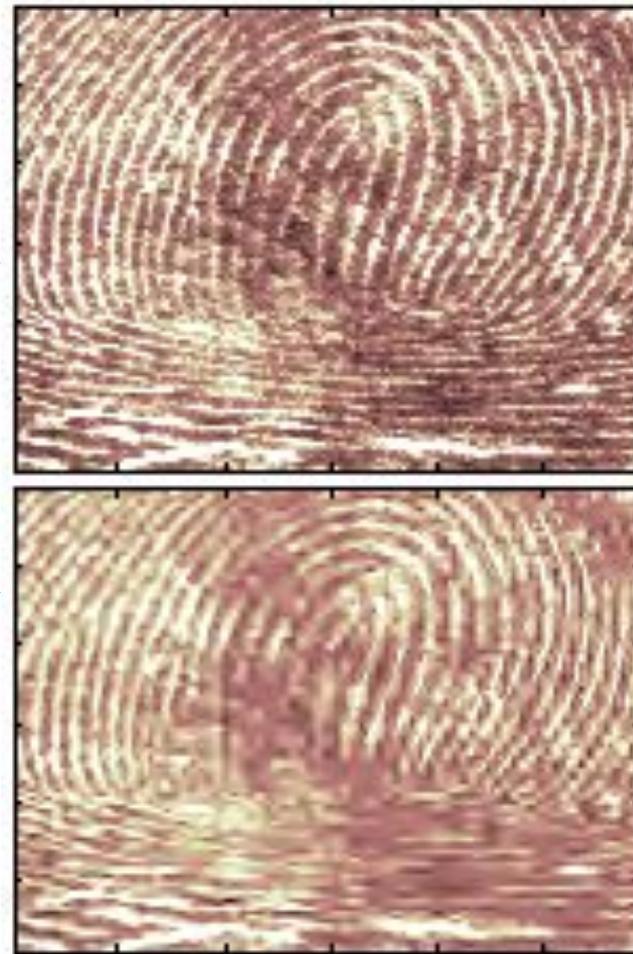
- **Модификация коэффициентов детализации** вейвлет-разложения в соответствии с установленными условиями очистки.

- **Восстановление сигнала** на основе коэффициентов аппроксимации и модифицированных детализационных коэффициентов.

Сжатие изображений в настоящее время широко применяется при хранении огромных объемов технической информации.

- На рисунке приведена фотография отпечатка пальца. Отпечаток пальца внизу сжат в десятки раз, но разрешающая способность по основным линиям дактилоскопии при этом практически не изменилась.

Удаление шумов и сжатие сигналов может производиться в одномерном варианте, а также с использованием пакетных функций очистки и сжатия.



# Применение вейвлет-преобразований

- **Обработка экспериментальных данных.** Поскольку вейвлеты появились именно как механизм обработки экспериментальных данных, их применение для решения подобных задач представляется весьма привлекательным до сих пор. Кроме того, вейвлеты хорошо подходят для анализа нестационарных сигналов, возникающих в медицине, анализе фондовых рынков и других областях.
- **Обработка изображений.** Наше зрение устроено так, что мы сосредотачиваем свое внимание на существенных деталях изображения, отсекая ненужное. Используя вейвлет-преобразование, мы можем сгладить или выделить некоторые детали изображения, увеличить или уменьшить его, выделить важные детали и даже повысить его качество!

**Сжатие данных.** Особенностью ортогонального многомасштабного анализа является то, что для достаточно гладких данных полученные в результате преобразования детали в основном близки по величине к нулю и, следовательно, очень хорошо сжимаются обычными статистическими методами.

Огромным достоинством вейвлет-преобразования является то, что оно не вносит дополнительной избыточности в исходные данные, и сигнал может быть полностью восстановлен с использованием тех же самых фильтров. Кроме того, отделение в результате преобразования деталей от основного сигнала позволяет очень просто реализовать сжатие с потерями – достаточно просто отбросить детали на тех масштабах, где они несущественны!

Достаточно сказать, что изображение, обработанное вейвлетами, можно сжать в 3-10 раз без существенных потерь информации (а с допустимыми потерями – до 300 раз!).

# **Вейвлеты для нейросетевых и других механизмов анализа данных**

Большие трудности при обучении нейросетей (или настройке других механизмов анализа данных) создает сильная зашумленность данных или наличие большого числа "особых случаев" (случайные выбросы, пропуски, нелинейные искажения и т.п.). Такие помехи способны скрывать характерные особенности данных или выдавать себя за них и могут сильно ухудшить результаты обучения. Поэтому рекомендуется очистить данные, прежде чем анализировать их.

Благодаря наличию быстрых и эффективных алгоритмов реализации, вейвлеты представляются весьма удобным и перспективным механизмом очистки и предварительной обработки данных для использования их в статистических и бизнес-приложениях, системах искусственного интеллекта...

# **Системы передачи данных и цифровой обработки сигналов**

Благодаря высокой эффективности алгоритмов и устойчивости к воздействию помех, вейвлет-преобразование является мощным инструментом в тех областях, где традиционно использовались другие методы анализа данных, например, преобразование Фурье. Возможность применения уже существующих методов обработки результатов преобразования, а также характерные особенности поведения вейвлет-преобразования в частотно-временной области позволяют существенно расширить и дополнить возможности подобных систем.

Подробно эти вопросы освещены в курсе лекций

*Давыдов А.В. «Цифровая обработка сигналов.  
Вейвлет-анализ»*

А также в книге:

*Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка  
сигналов и изображений. Специальный справочник. –  
СПб.: Питер, 2002, 608 с.*