



Элементы теории множеств

Понятие множества

- Основу теории математики составляют **понятия и отношения** между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих **аксиом и определений**.
- Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной системой теорем и новых определений, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

Определение

- Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие **множества**.
- Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку:
 - множество учащихся класса,
 - множество букв алфавита,
 - множество натуральных чисел,
 - множество точек на прямой,
 - множество книг на полке и т.д..

Определение

- Предметы, из которых состоит множество, называются его **элементами**
- например, буква К – элемент множества букв русского алфавита.
- Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

- Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы.
- Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:
- $A; \{a, b, c\}; \{*, s, h, g\}; N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа \in (в противном случае используется символ \notin).
- Запись $a \in A$ означает, что a *есть элемент множества* A .
- Аналогично имеем: $\Delta \in \{\Delta, o\}$.
- Запись $4 \notin \{1, 2, 3\}$ означает, что 4 *не принадлежит множеству* $\{1, 2, 3\}$.

- Основными способами задания множества являются:
- 1) перечисление всех его элементов:
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$
- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов).
- Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

- Например, характеристическим свойством **натуральных чисел** является возможность их использования при счете каких-либо предметов.
- Говоря о множестве **четных чисел**, мы указываем характеристическое свойство его элементов:
- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \div 2\}$, т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

Определение 3

- Множества, состоящие из одних и тех же элементов (одинаковыми). Пишут $A=B$.

Определение 4

- Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset .

- Слово «много» и математический термин «множество» имеют различный смысл.
- Множество может состоять из небольшого количества элементов.
- Будем обозначать количество элементов в некотором множестве A через $m(A)$.
- Например, если $A=\{a, b, c\}$, то $m(A)=3$. Если N – множество всех натуральных чисел, то $m(N) = \infty$.

Подмножество. Основные числовые множества

- **Определение 1.**
- Множество B , состоящее из некоторых элементов данного множества A (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества.
- Иначе, если любой элемент множества B принадлежит также множеству A , то множество B называется подмножеством множества A .
- Это записывается так: $B \subset A$ или $A \supset B$. Говорят, что « B – подмножество A » или « B содержится в A » или « A содержит B ».
- Заметим, что $m(B) \leq m(A)$.

- Если в множестве B найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A , то B не является подмножеством множества A : $B \not\subseteq A$.
- Например, отрезок $[a, b]$ не является подмножеством полуинтервала $(a, b]$, т. к. $a \in [a, b]$, но $a \notin (a, b]$.

- Из опр. 1 следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение $A \subset A$.
- Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества.
- Пустое множество не содержит ни одного элемента, а значит в нем нет элемента, не принадлежащего любому другому множеству.

- Знак \subset называется знаком включения.
- Отметим основные свойства отношения включения между множествами:
- 1) $\emptyset \subset A$ для любого множества A ;
- 2) $A \subset A$ для любого множества A (рефлексивность);
- 3) из того, что $B \subset A$ не следует $A \subset B$ (не симметричность);
- 4) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$ (антисимметричность);
- 5) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

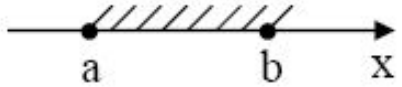
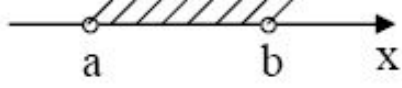
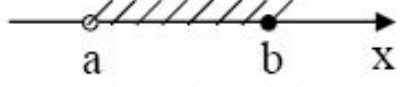
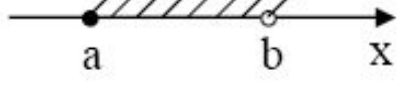
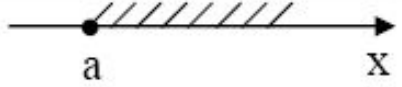
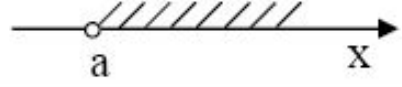
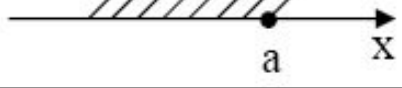
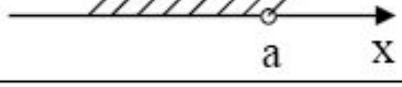
Основные числовые

множества:

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;
- $\mathbf{Q}=\{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
- $\mathbf{R}=(-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа).

- Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).
- *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.

Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

| Название | Неравенство, определяющее множество | Обозначение | Изображение |
|---|-------------------------------------|----------------|---|
| Отрезок от a до b (замкнутый промежуток) | $a \leq x \leq b$ | $[a; b]$ |  |
| Интервал от a до b | $a < x < b$ | $(a; b)$ |  |
| Полуинтервалы от a до b | $a < x \leq b$ | $(a; b]$ |  |
| | $a \leq x < b$ | $[a; b)$ |  |
| Числовой луч от a до $+\infty$ | $a \leq x$ | $[a; +\infty)$ |  |
| Открытый числовой луч от a до $+\infty$ | $a < x$ | $(a; +\infty)$ |  |
| Числовой луч от $-\infty$ до a | $x \leq a$ | $(-\infty; a]$ |  |
| Открытый числовой луч от $-\infty$ до a | $x < a$ | $(-\infty; a)$ |  |

Операции над множествами

- Два множества могут иметь одинаковые элементы,
- из всех элементов двух множеств можно составить одно новое множество,
- также можно рассмотреть отдельно элементы одного множества, которых во втором множестве нет.

- Например, A – множество наклеек (марок), которые есть у Пети, B – множество наклеек, которые собрал Вася.
- Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят;
- коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе;
- множество наклеек Пети, которых нет у Васи.
- Таким образом, мы проделали операции ***пересечения, объединения и разности*** двух множеств.

Определение

- **Пересечением** множеств A и B называется множество C , состоящее из **всех тех и только тех элементов**, которые принадлежат каждому из данных множеств: $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Обозначается $A \cap B$.

Определение

- **Объединением** множеств A и B называется множество C , которое состоит из всех элементов данных множеств A и B и только из них: $C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.
- Обозначается, $A \cup B$.

- Если множества A и B не содержат одинаковых элементов, т.е. не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$), то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (1).
- В противном случае, когда множества имеют $m(A \cap B)$ одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$
 (2).

Определение

- **Разностью** множеств A и B называется множество C , состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B :
 $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.
- Обозначается, $A \setminus B$.
- В случае, когда B является подмножеством A , т.е. $B \subset A$, разность $A \setminus B$ называется **дополнением** множества B до множества A (или относительно множества A).

Определение

- **Универсальным** *множеством* называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.
- Обозначают **U** .
- При работе с числовыми множествами в качестве основного (универсального) множества будем считать множество \mathbb{R} действительных чисел.

Определение

- *Дополнением* множества A называется разность $U \setminus A$.
- Обозначается, A' или \bar{A} и читается «не A » .
- Иначе, дополнением множества A называется множество A' , состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A .

Свойства операции пересечения:

- 1) $A \cap A = A$;
- 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- 3) $A \cap A' = \emptyset$;
- 4) $A \cap U = A$;
- 5) $A \cap B = B \cap A$.

Свойства операции объединения:

- 1) $A \cup A = A$;
- 2) $A \cup \emptyset = A$;
- 3) $A \cup A' = U$;
- 4) $A \cup U = U$;
- 5) $A \cup B = B \cup A$.

Свойства операции разности:

- 1) $A \setminus A = \emptyset$;
- 2) $A \setminus \emptyset = A$;
- 3) $A \setminus A' = A$;
- 4) $A \setminus U = \emptyset$;
- 5) $U \setminus A = A'$;
- 6) $\emptyset \setminus A = \emptyset$;
- 7) $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Справедливы равенства $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (3).

Бесконечные множества.

Взаимно-однозначное соответствие.

Взаимно-однозначным называется такое соответствие между множествами A и B , при котором каждому элементу $a \in A$ отвечает один и только один элемент $b \in B$ и каждому элементу $b \in B$ отвечает один и только один элемент $a \in A$.

Функция, определяющая взаимно-однозначное соответствие называется **биективной функцией** или **биекцией**.

Бесконечные множества.

Эквивалентные множества.

Множества A и B называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если между ними существует биекция (хотя бы одна).

Эквивалентные множества называют **равномощными**, что обозначается так:

$$|A| = |B|.$$

Эквивалентными друг другу оказываются все конечные множества с одинаковым числом элементов n (мощность каждого из этих множеств равна n).

Бесконечные множества.

Счетные множества

Множество A называется **счетным**, если оно эквивалентно натуральному ряду N ($A \sim N$).

С помощью биекции $\phi = N \rightarrow A$ можно пересчитать все элементы из A , снабдив их индексами. Можно записать, что

$$A = \{a_n\}, n=1,2,\dots,\infty.$$

Бесконечные множества.

Счетные множества

Множество четных натуральных чисел $N_{\text{ч}} = \{2, 4, \dots, m, \dots\}$, всех натуральных чисел $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, целых чисел Z и рациональных чисел Q последовательно вложены: $N_{\text{ч}} \subset N \subset Z \subset Q$.

Хотя для любых двух из этих множеств нет равенства, они эквивалентны друг другу, то есть, имеют одинаковую мощность и являются счетными: $|N_{\text{ч}}| = |N| = |Z| = |Q|$.

Бесконечные множества.

Несчетные, континуальные множества

Существуют бесконечные **несчетные** множества, и их мощность естественно считать большей, чем $|N|$.

Множество точек отрезка $[0, 1] = \{x \in R; 0 \leq x \leq 1\}$ не является счетным (теорема Г. Кантора). Его мощность называется **континуум** и обозначается малой буквой c : $|[0, 1]| = c$.

Множество $[0, 1]$ и любое эквивалентное ему множество называются **континуальными**.

Бесконечные множества.

Континуальные множества

На вещественной оси R континуальными (и значит эквивалентными друг другу и отрезку $[0, 1]$) являются, например, множества:

- $[a, b]$,
- (a, b) , при любом $a < b$;
- $(0, +\infty)$;
- множество $(-\infty, +\infty)$, равное R .

Континуальны также множества точек любого квадрата и круга на плоскости R^2 , параллелепипеда и шара в пространстве R^3 и самого пространства R^3 .

СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Подмножеством множества A называется множество A' все элементы которого принадлежат множеству A

$$A' \subset A$$

Пример: $N \subset R$

2. Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество.
3. Множество всех рациональных чисел *счетно*.
4. *Алфавитом* называется любое непустое множество.

Для каждого множества A существуют множества, элементами которого являются только все его подмножества.

Такое подмножество называют *семейством множеств A* или *булеаном* (обозначается $B(A)$).

Будем называть *вектором (кортежем)* упорядоченный набор элементов и обозначать его \vec{a} , заметим, что в отличие от множества, элементы в векторе могут повторяться. Эти элементы называются *координатами или проекциями*.

Количество элементов в векторе называется его *длиной*, если в векторе 2 элемента, то двойка, если n элементов, то n -ка.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ СТРОИТСЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ АКСИОМ

1. *Аксиома существования:* Существует по крайней мере одно множество.
2. *Аксиома объемности:* Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то они совпадают.
3. *Аксиома объединения:* Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и никакие другие элементы множество не содержит.
4. *Аксиома разности:* Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A , которые не содержатся в множестве B .
5. *Аксиома существования пустого множества:* Существует множество не содержащее ни одного элемента.

Диаграммы Эйлера-Венна

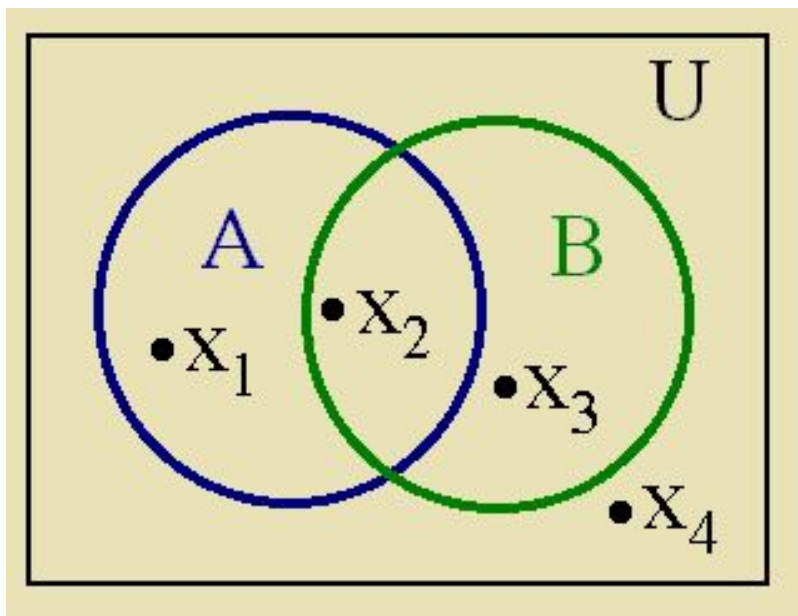
Для наглядного представления множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).

При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника.

Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

Диаграммы Венна для двух множеств

Диаграмма Венна для двух множеств **A** и **B** выглядит следующим образом.



$$x_1 \in A, x_1 \notin B$$

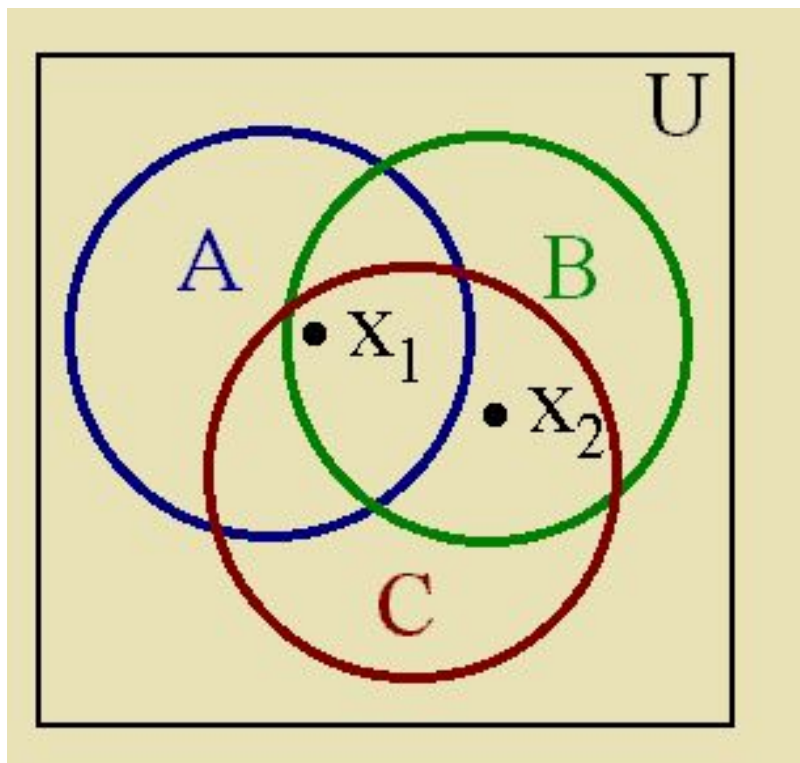
$$x_2 \in A, x_2 \in B$$

$$x_3 \in B, x_3 \notin A$$

$$x_4 \notin A, x_4 \notin B$$

Диаграммы Венна для трех множеств

Диаграмма Венна для трех множеств **A**, **B** и **C** выглядит следующим образом.



$$x_1 \in A, x_1 \in B,$$

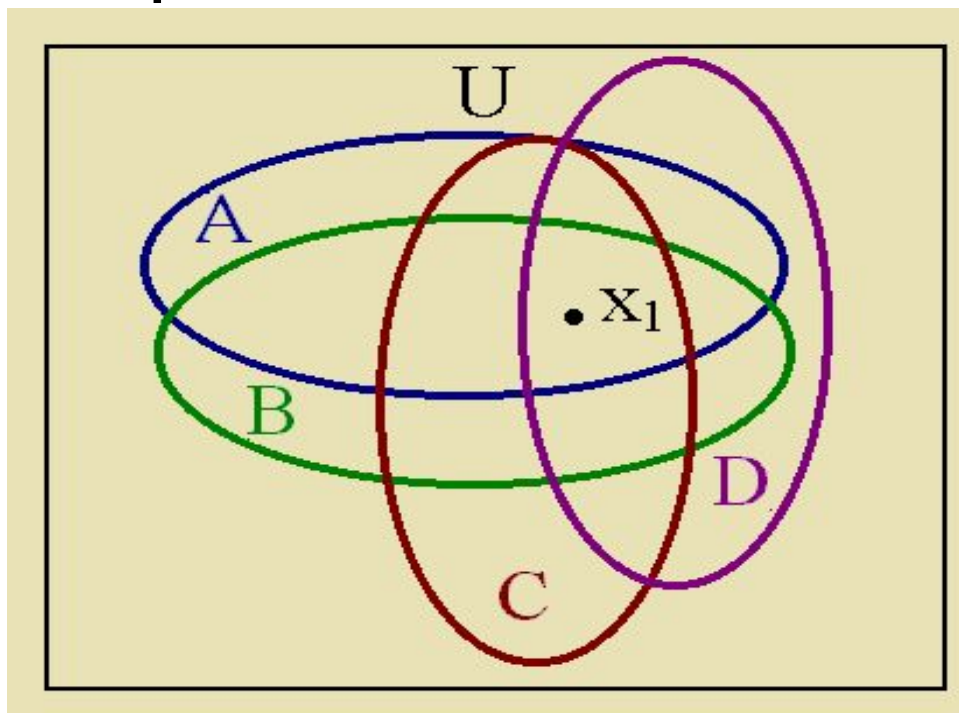
$$x_1 \in C$$

$$x_2 \in B, x_2 \in C,$$

$$x_2 \notin A$$

Диаграммы Венна для четырех множеств

Диаграмму Венна для четырех множеств **A**, **B**, **C** и **D** можно изобразить следующим образом.



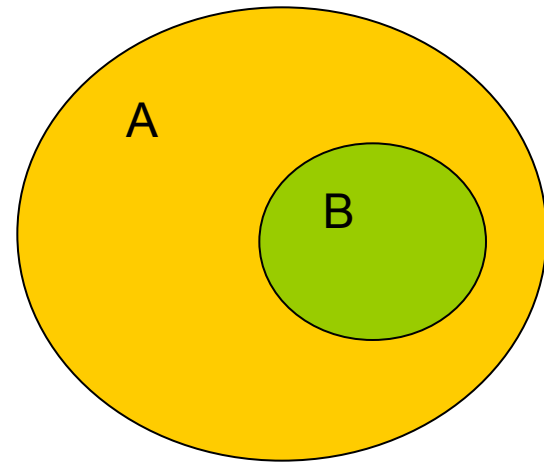
$$x_1 \in A,$$

$$x_1 \in B,$$

$$x_1 \in C,$$

$$x_1 \in D$$

Включение



Множество A входит (включено) в множество B , или A является подмножеством B . $A \subset B$

Если всякий объект, обладающий свойством α , также обладает свойством β , то говорят, β что свойство α включает свойство β , т.е.

β $\alpha \subset \beta$

Строгое и нестрогое включение

Нестрогое включение
обозначается $A \subseteq B$, означает, что A –
подмножество множества B ,
возможно совпадающее с B .

Строгое включение обозначается
 $A \subset B$, и означает, что A –
подмножество множества B , не
совпадающее с B .

$A \subset B$ читается “ A включено в B ”.

Строгое и нестрогое включение. Равенство множеств

Выполнение соотношений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ возможно только при $A = B$. $A = B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Эти соотношения являются признаком равенства множеств через отношение включения.

Иногда в литературе символом \subset обозначают "нестрогое" включение, допускающее и равенство множеств. В этом случае символ \subseteq не используется, а строгое включение записывают двумя соотношениями $A \subset B$, $A \neq B$.

Строгое и нестрогое включение

Пример.

X – множество студентов группы 4141133,

Y – множество отличников в группе 4141133.

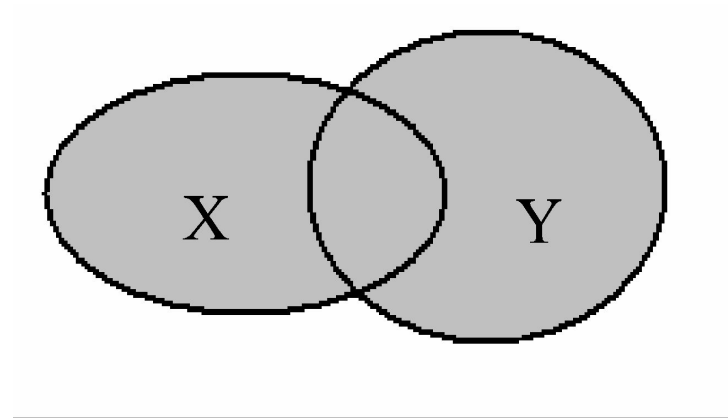
Тогда $Y \subseteq X$,

Z – множество студентов потока 4141123,33,34.

Тогда $X \subset Z$.

Включение X в Z строгое, поскольку кроме учеников класса X , в школе обязательно присутствуют ученики других классов.

Объединение (сумма)



Объединением (суммой) множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X, Y

Сумма

Сумма множеств A и B есть множество C , включающее в себя все элементы множества A и B .

Объект входит во множество $C = A + B = A \cup B$ если он входит во множество A или во множество B .

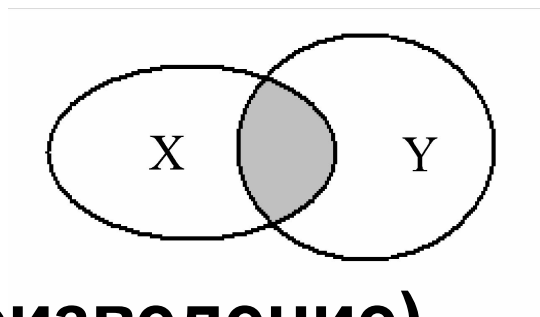
$$C = A \cup B = \{c_i | c_i \in A \text{ или } c_i \in B\}$$

Объединение двух множеств символически записывают как $X \cup Y$. Объединение множеств X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств X_i . Соответствующее обозначение:

$$\bigvee_{i=1}^n X_i$$

Пересечение (произведение)

Пересечением множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат как множеству X , так и множеству Y



Пересечение (произведение)

Пересечением множество A и B называется новое множество C . Элементы множества C принадлежат множеству A (обладают его свойствами) и множеству B (обладают его свойствами). $C = A * B = A \cap B = \{c_i | c_i \in A \text{ и } c_i \in B\}$

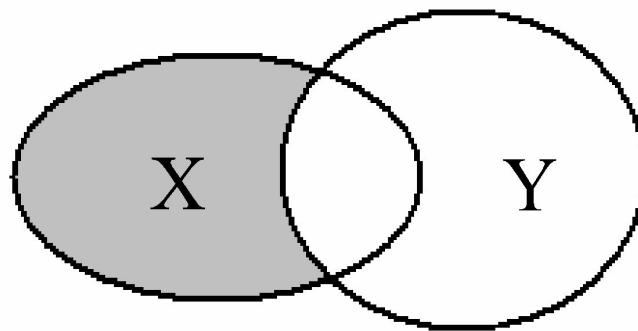
- Пересечение множеств обозначается через $X \cap Y$. Множества X и Y называют **непересекающимися**, если они не имеют общих элементов, т.е. если $X \cap Y = \emptyset$.

- Пересечением множеств X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называется множество элементов, принадлежащих каждому X_i . Оно обозначается как

$$\bigcap_{i=1}^n X_i$$

Разность (вычитание)

- **Разностью** множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y (рис. 5). Разность множеств обозначается через $X \setminus Y$. Очевидно, что
- $X \setminus Y \neq Y \setminus X$.



- Разность множеств A и B есть множество C , элементы которого обладают свойствами множества A и не обладают свойствами множества B или принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B .

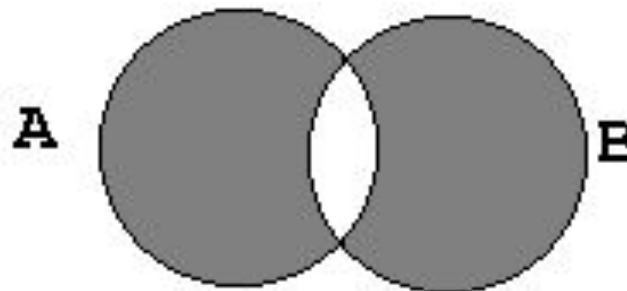
$$C = A \setminus B = \{c_i \mid c_i \in A \text{ и } c_i \notin B\}$$

Симметрическая разность

Симметрической разностью $X \oplus Y$ ($X \Delta Y$) множеств X и Y называется объединение разностей $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$. Эта разность множеств является составной операцией:

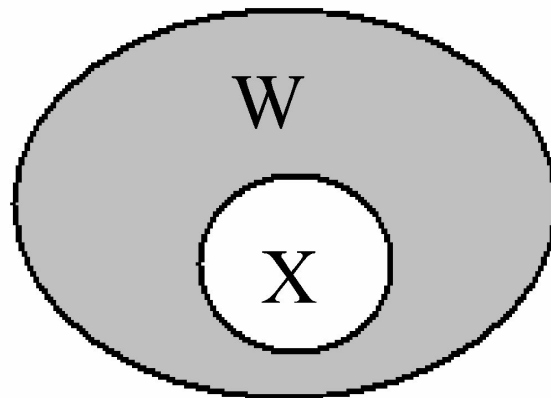
$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Симметрическая разность $A \oplus B$ ($A \Delta B$) есть множество всех элементов, принадлежащих или A , или B (но не обоим вместе), т.е. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



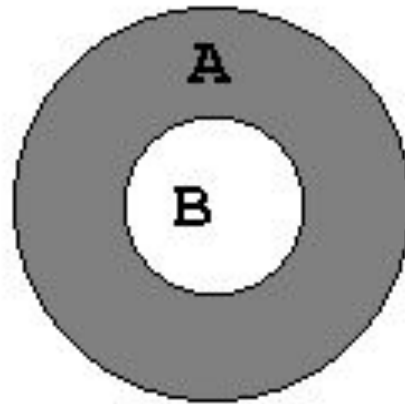
Дополнение

Дополнительным к множеству X по отношению к множеству W , если $X \subset W$, называется множество, состоящее из элементов W , не принадлежащих множеству X . Дополнительное множество обозначается: $Z_w(X)$



Если имеется некоторое универсальное множество (универсум) U и все рассматриваемые множества есть его подмножества, то дополнением называется такое множество, элементы которого не входят в A , но принадлежат U .

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называется **дополнением B до множества A** .



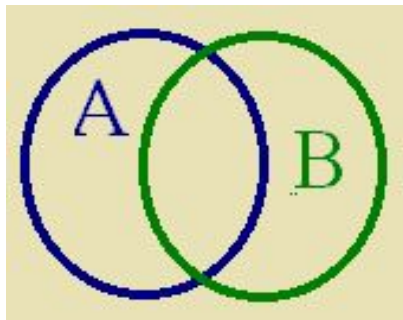
Универсальное множество

Универсальным множеством называется множество I , для которого справедливо соотношение: $X \cap I = X$. Оно означает, что множество I содержит все элементы множества X . Следовательно, любое множество X полностью содержится во множестве I , т.е. является его подмножеством: $X \subset I$. Так, для выше рассмотренного примера универсальным множеством можно считать множество студентов в группе.

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника будут представлять подмножества универсального множества.

Круги Эйлера

Индивидуальные отношения между заданными множествами изображают с помощью **кругов Эйлера**.



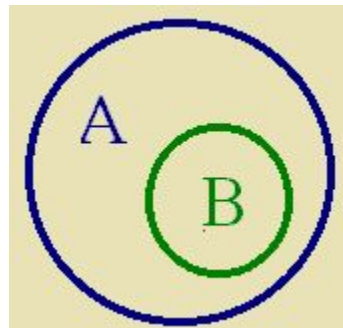
$$A = \{1, 4, 6\};$$

$$B = \{1, 5, 8\};$$

Общий

элемент – 1

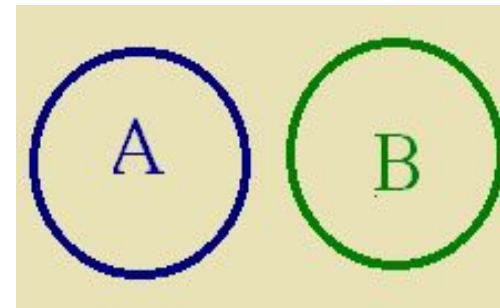
$$A \cap B$$



$$A = \{1, 4, 6\};$$

$$B = \{1, 6\};$$

$$B \subseteq A$$



$$A = \{1, 4, 6\};$$

$$C = \{3, 5, 8\};$$

Нет общих

элементов A и B .

$$A \neq B$$

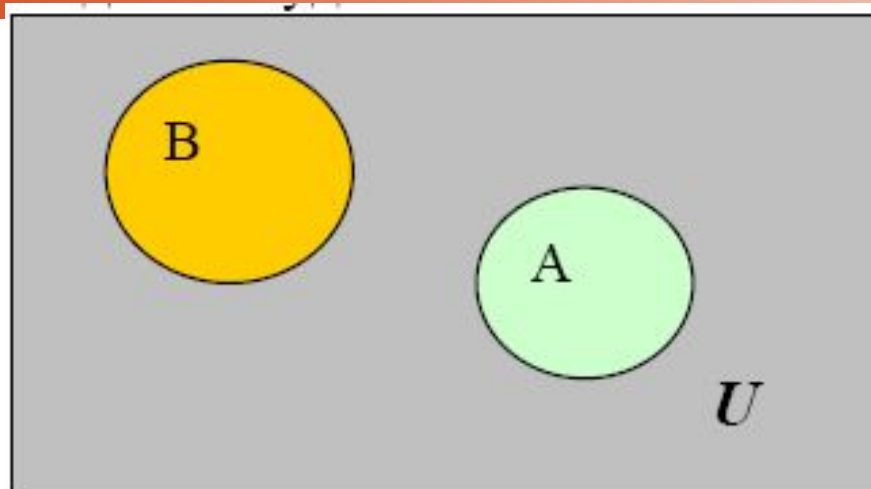


Рис. 1

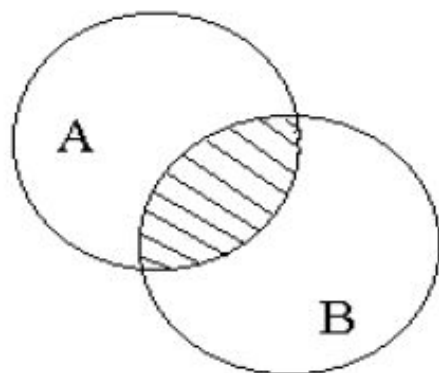


Рис.2 Пересечение множеств

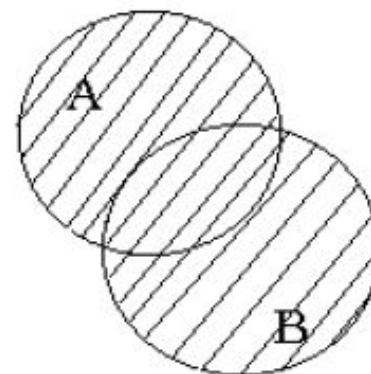


Рис.3 Объединение множеств

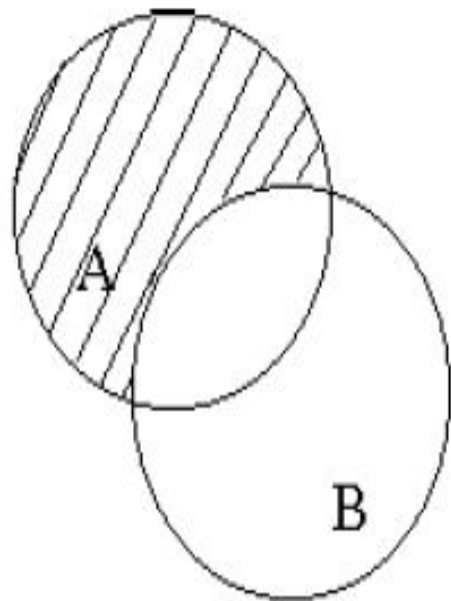


Рис.4 Разность множеств $A \setminus B$

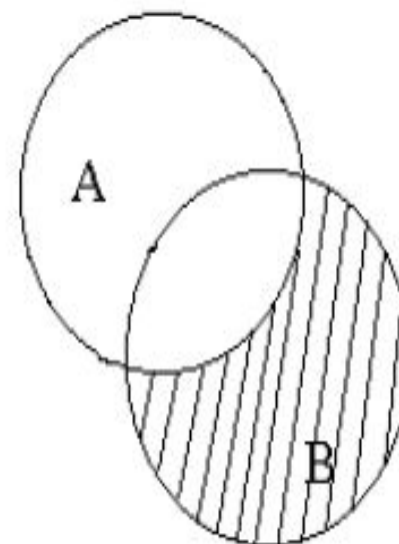


Рис.5 Разность множеств $B \setminus A$

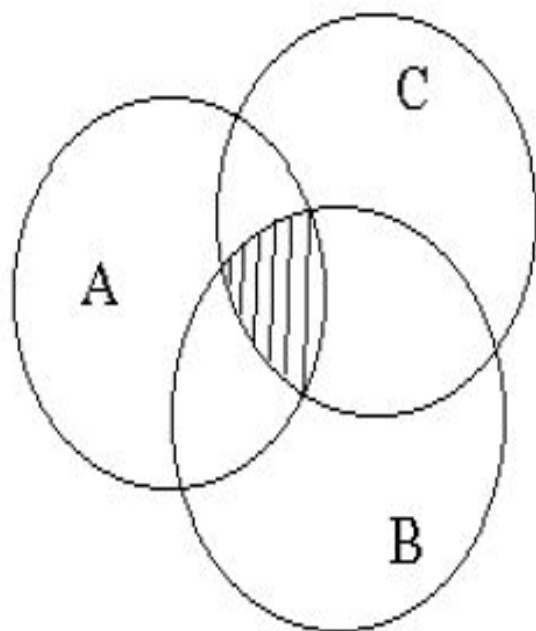


Рис.6 Пересечение трех множеств

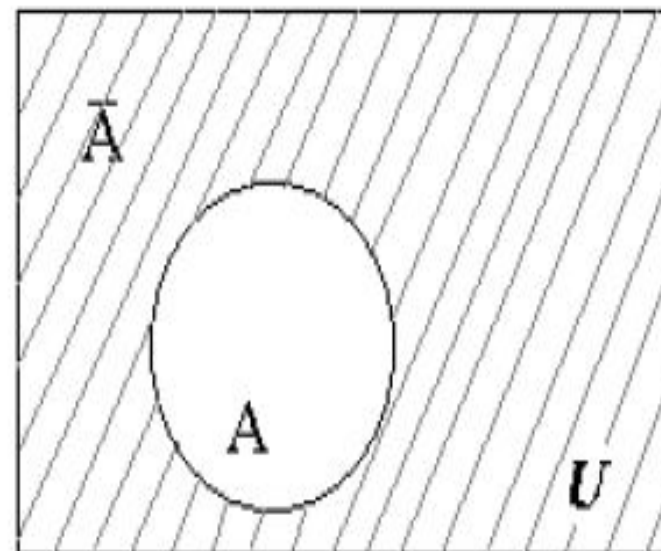


Рис.7 Дополнение множества
(множество *не-A*)

Законы алгебры множеств

1. Коммутативные законы

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Ассоциативные законы

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. Дистрибутивные законы

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Законы алгебры множеств

4. Свойства пустого и универсального множеств

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Законы алгебры множеств

5. Законы идемпотентности

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

6. Закон инволюции (двойного отрицания)

7. Закон противоречия

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

8. Закон исключенного третьего

$$A \cup \bar{A} = U$$

Законы алгебры множеств

9. Закон элиминации (поглощения)

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

10. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Примеры

- **Пример 1.** Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.
- Решение: $A = \{1, 3, 5\}$, $m(A) = 3$.

Пример 2

- Даны множества $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C=\{12, 13, 15, 16\}$, $D=\{0, 1, 20\}$.

Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.

- **Решение:**

Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.

Получим

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\},$$

$$C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\},$$

$$B \cap C = \{16\}, A \cap D = \emptyset, A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}, D \setminus B = \{0, 20\},$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\},$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset, B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}, A \cap C \setminus D = \{13, 15\}$$

Пример 3.

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- **Решение:** Пусть A – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию $m(A)=210$, $m(B)=180$, $m(A \cup B)=250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$.
- Из формулы (2) находим $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 210 + 180 - 250 = 140$.

Пример 4.

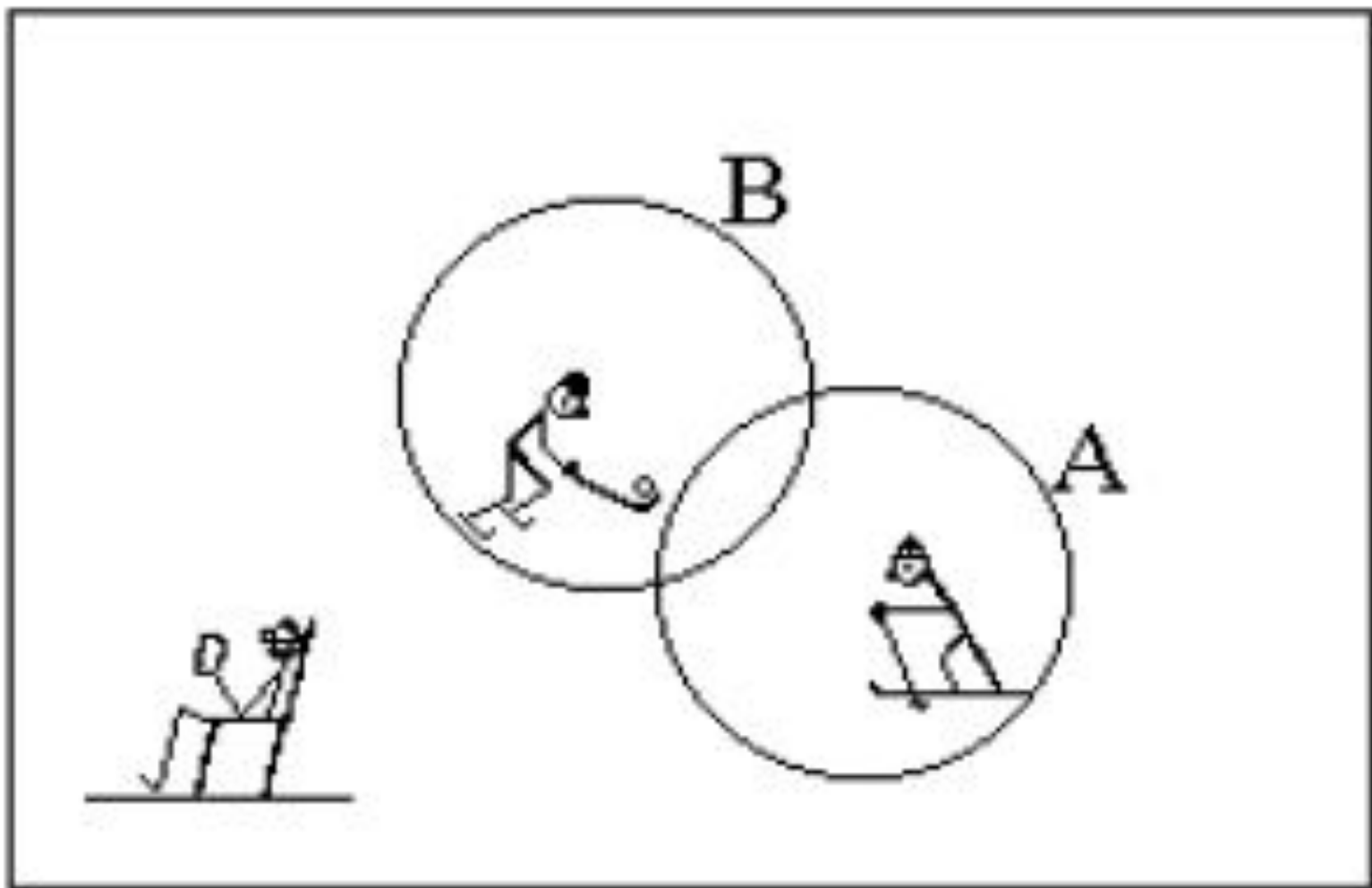
- В школе 1400 учеников.

Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках.

Не умеют кататься 60 учащихся.

Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?

- **Решение:** Множество учеников школы будем считать основным множеством U , A и B – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках .



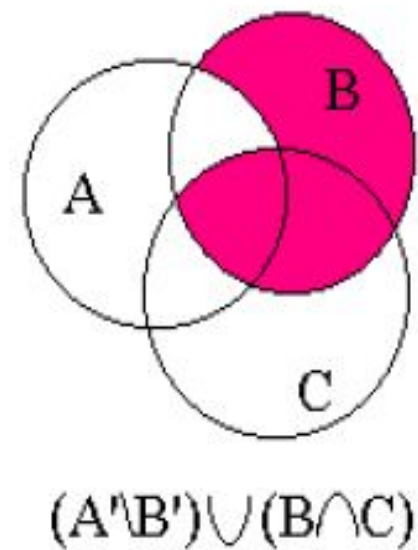
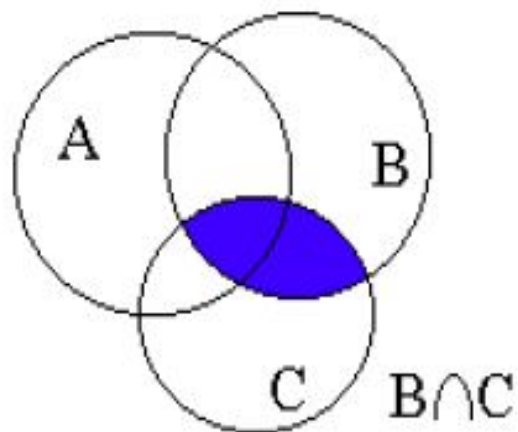
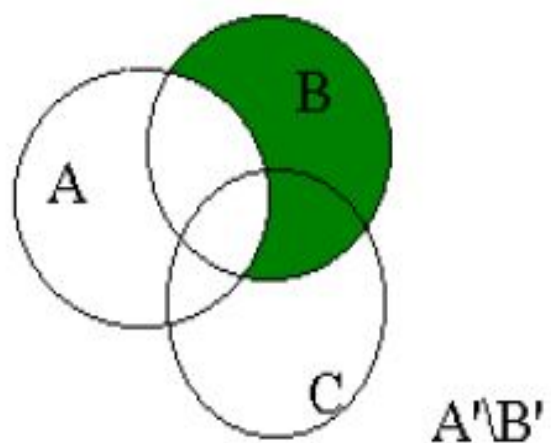
Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $A' \cap B' = (A \cup B)'$

$$m(A \cup B) = m(\mathbf{U}) - m(A \cup B)' = 1340.$$

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 862$$

Пример 5. Показать на кругах Эйлера множество $(A' \setminus B') \cup (B \cap C)$.

Решение:



Законы алгебры множеств

Пример.

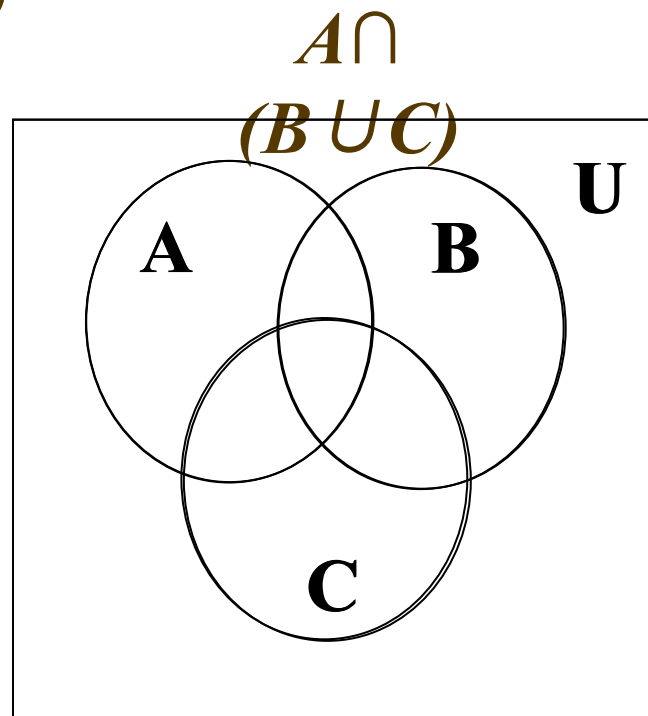
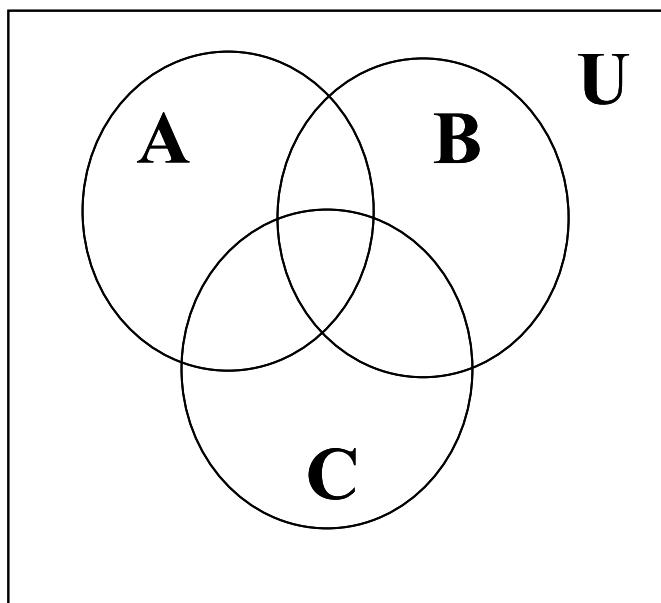
Доказать с помощью диаграмм Венна дистрибутивный закон.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Законы алгебры множеств

Продолжение примера.

$$B \cup C \cap A \quad (B \cup C) \cap A$$



Законы алгебры множеств

Продолжение примера.

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cap B)$$

$$(A \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

