Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ № 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кафедра теоретической механики

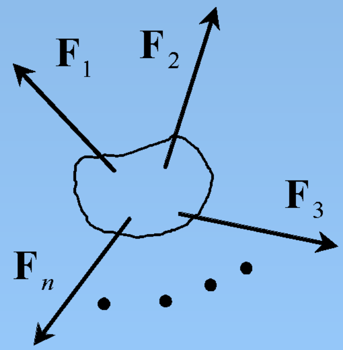
План лекции

Введение
Способы задания движения
Траектория
Скорость
Ускорение
Частные случаи движения
Заключение

Введение

Мы изучили первый раздел курса ТМ - статику.

Основной результат:



$$ТЕЛО, СИЛЫ: \ (\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_1) \Rightarrow$$

$$(\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_1) \approx 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

Если уравнения равновесия не выполнены, то тело будет двигаться! Каким образом?

Ответ на этот вопрос будет дан в третьей части курса – в динамике.

Вторая часть курса – кинематика, нужна для того, чтобы разобраться с самим движением.

Причины движения (т.е. СИЛЫ) нас в кинематике интересовать не будут!

Введение

Итак:

Кинематика изучает геометрические свойства движения тел (без учета действующих на них сил).

Основные ее задачи:

- **Научиться задавать движение тел**
- **По заданному движению тел определять их кинематические характеристики (траекторию, скорость, ускорение, ….)**

Замечание. **Есть еще и обратная задача - по заданным кинематическим характеристикам тела определять закон его движения.**

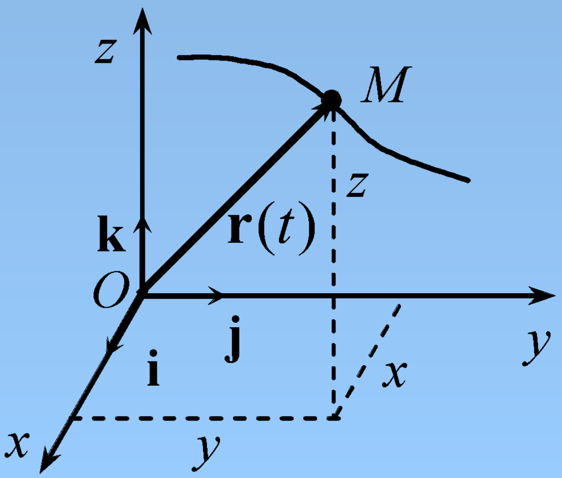
Решать эти задачи мы начнем с простейшего тела – точки.

Цель лекции:

Изучить кинематику точки.

Способы задания движения точки, траектория

1. В прямоугольной декартовой системе Oxyz



$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ – *координатный способ*

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – *векторный способ*

Траектория точки – геометрическое место положений, занимаемых ею при движении(или след, который она оставит, если ее покрасить; или еще: годограф ее радиус-вектора).

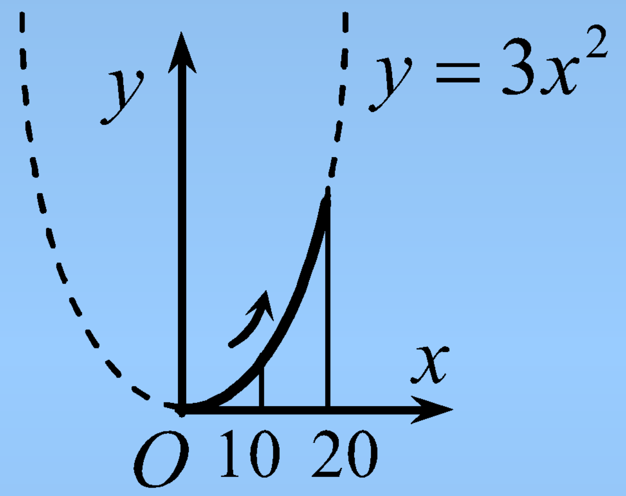
Замечание. Не путать с другим “определением”: траектория – это линия, по которой движется точка.

Траектория может быть лишь часть этой линии!!!

Определение траектории

Пример. ***Точка двигалась в плоскости Oxy в течение 10 секунд. Определить ее траекторию, если***

$$x(t) = 2t; \quad y(t) = 12t^2$$



Решение. Заданные уравнения определяют траекторию в параметрическом виде. Для получения явного вида y=y(x) исключим параметр t. Получим:

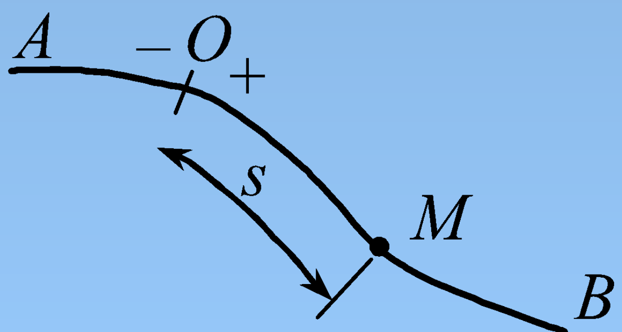
$$t = x/2 \Rightarrow y = 3x^2. \quad t \in [0,10] \Rightarrow x \in [0,20]$$

Ответ:

Траектория – часть параболы $y = 3x^2, x \in [0,20]$

Способы задания движения точки (продолжение)

1. В естественной системе координат



Пусть линия АВ, по которой движется точка, известна. Тогда положение точки М на линии можно определить введя естественную координату s.

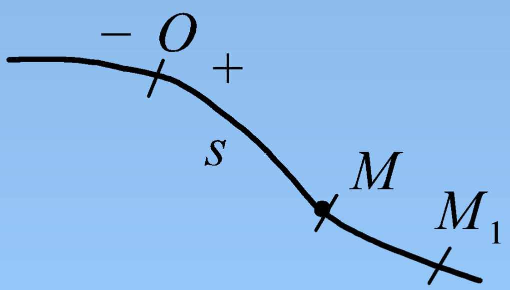
$$s = \overset{\frown}{OM}; \quad s = s(t)$$

Такой способ задания называется естественным. Система координат с криволинейной осью АВ называется естественной системой координат. Само уравнение s=s(t) называется законом движения точки вдоль траектории.

Замечание. Так и определяют движение поездов и автомобилей, вводя километраж на дорогах.

Способы задания движения точки (продолжение)

Вопрос. *Дуговая координата s и путь S, пройденный точкой одно и то же?*



Ответ. НЕТ, *например для автомобиля, двигавшегося по маршруту* $O \rightarrow M_1 \rightarrow M; \quad S = s_1 + (s_1 - s)$

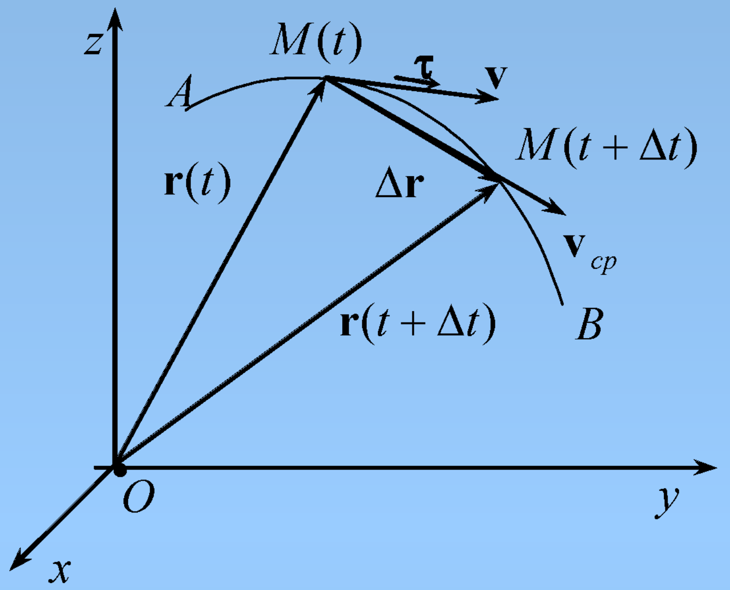
Замечание. **При решении задач механики используются и другие системы координат: полярная, цилиндрическая, сферическая….**

Скорость точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \quad \vec{v} = \lim \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad - \textit{скорость} \quad \textit{точки}$$



Скорость точки ***равна производной от ее радиуса-вектора по времени.***

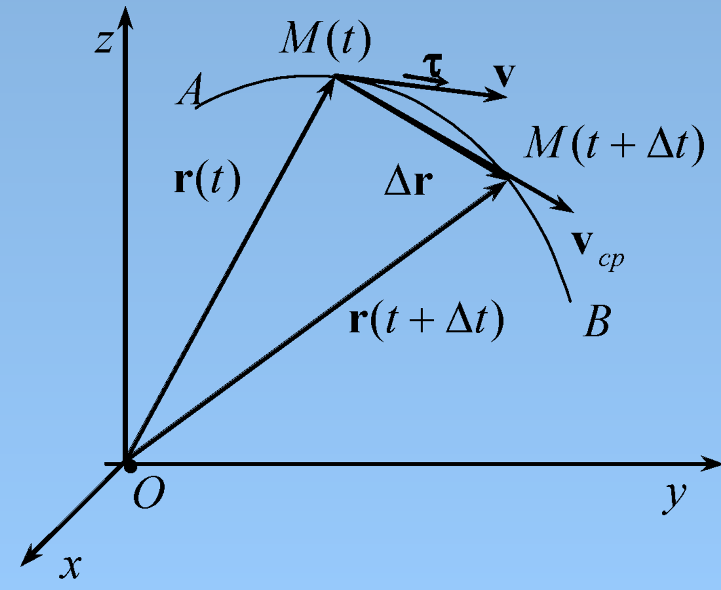
Направлена скорость ***– по касательной к траектории точки в сторону ее движения.***

Проекции скорости точки

В системе Oxyz:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}, \quad \mathrm{v}_y = \dot{y} \quad \mathrm{v}_z = \dot{z}$$



В естественной системе:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt};$$

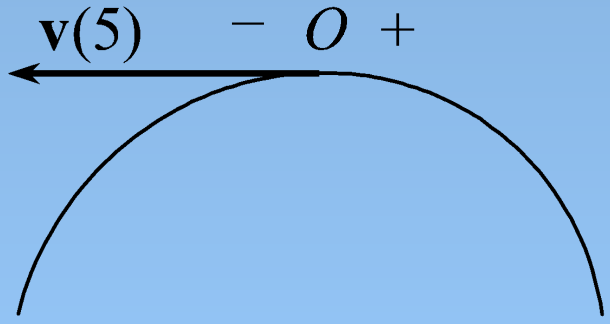
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{– единичный вектор касательной}$$

$$\mathrm{v}_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{– касательная скорость}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_\tau \vec{\tau}; \quad \mathrm{v}_\tau = \pm \mathrm{v}; \quad \mathrm{s(t)} = \mathrm{s(0)} \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Пример определения скорости

Пример. Точка движется по дуге окружности радиуса R=20см по закону s=20sin(πt). Определить величину и направление скорости для t=5с.



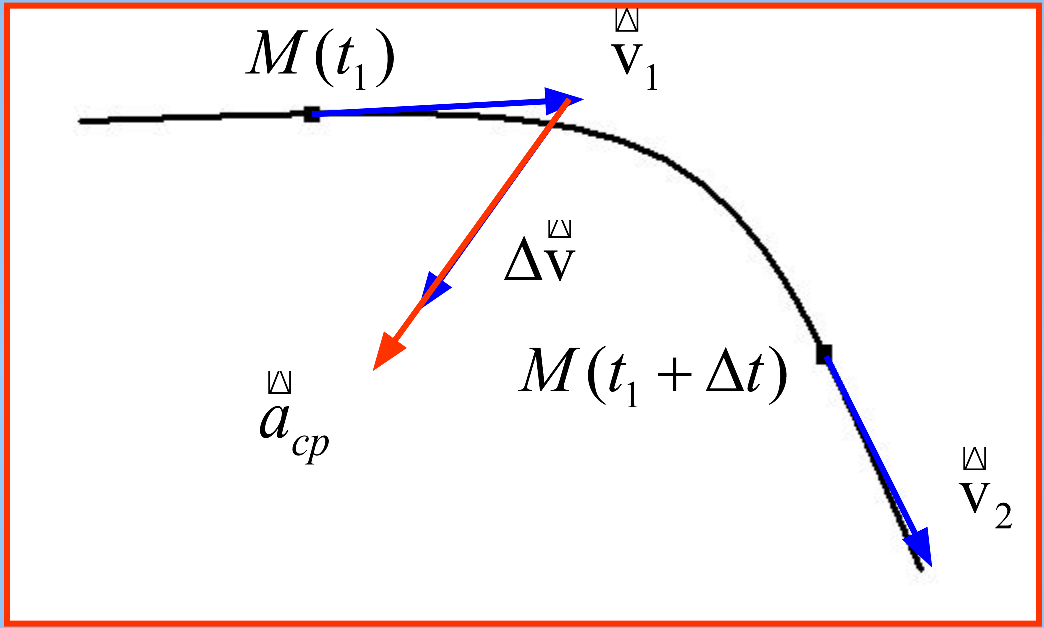
Решение.

$$s(5) = 20\sin 5\pi = 0 \quad - \textit{точка в положении } O$$

$$v_\tau(t) = 20\pi\cos 5\pi = -20\pi \Rightarrow$$

$$v(5) = 20\pi \quad \textit{и направлено в сторону } "-"$$

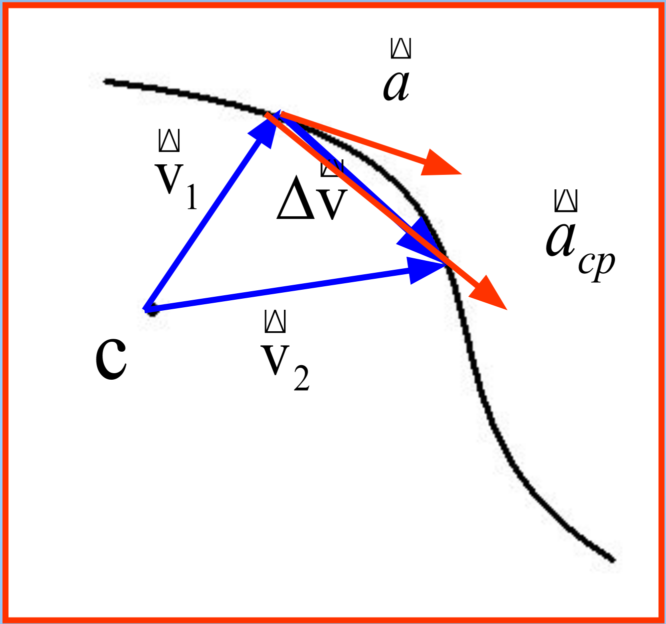
Ускорение точки



$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ - приращение вектора скорости за время Δt

$\vec{a}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ - среднее ускорение – изменение скорости в единицу времени

Ускорение точки



$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

ускорение в данный момент времени t

Ускорение точки — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения ее скорости и равная первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени

Проекции ускорения точки

1. В системе Oxyz

вектор скорости $\rightarrow$ $$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

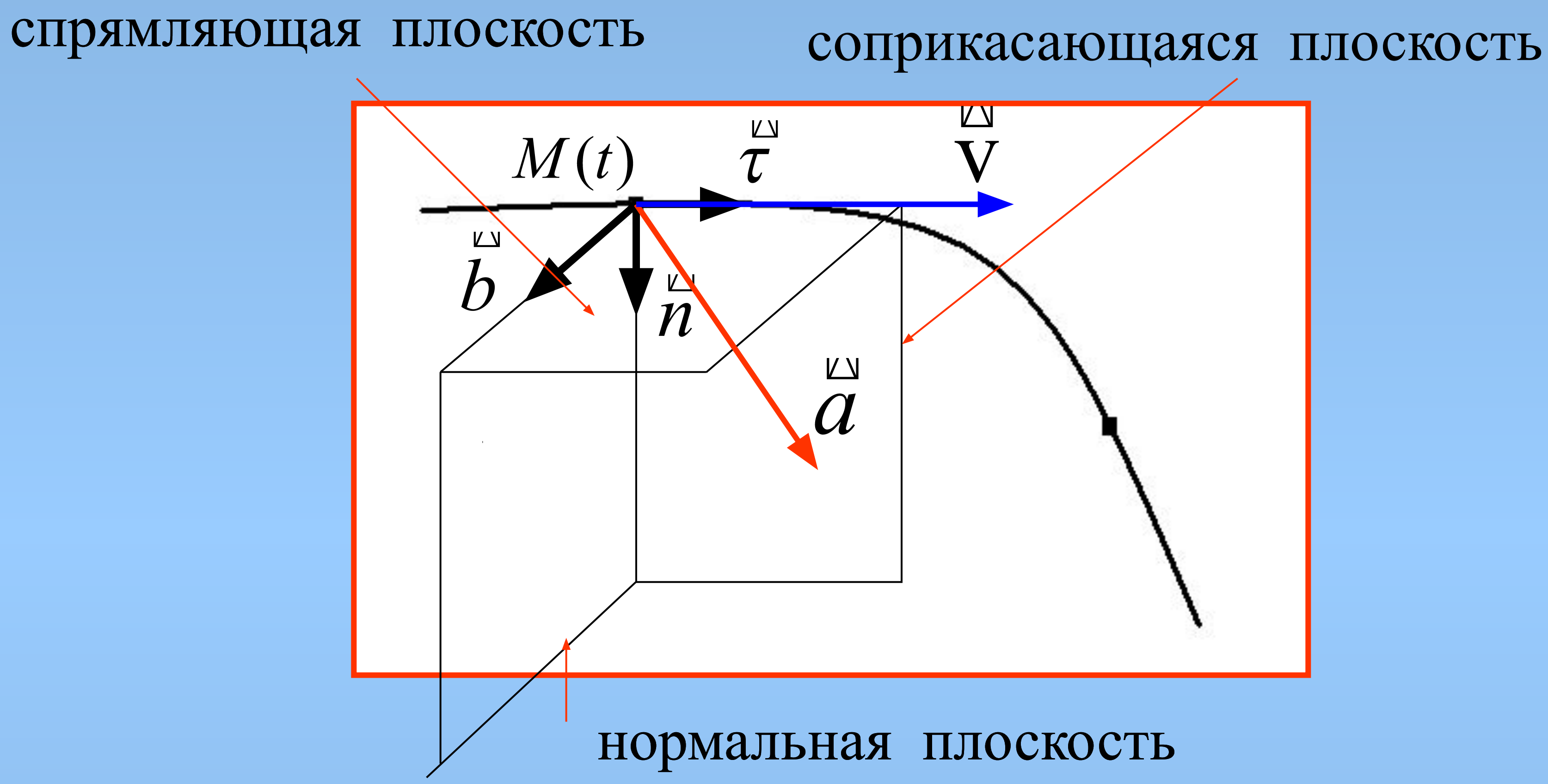
вектор ускорения $\rightarrow$ $$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k}$$

$$\boxed{a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}} \quad \boxed{a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}} \quad \boxed{a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}}$$

Проекции ускорения точки

2. В естественной системе координат.



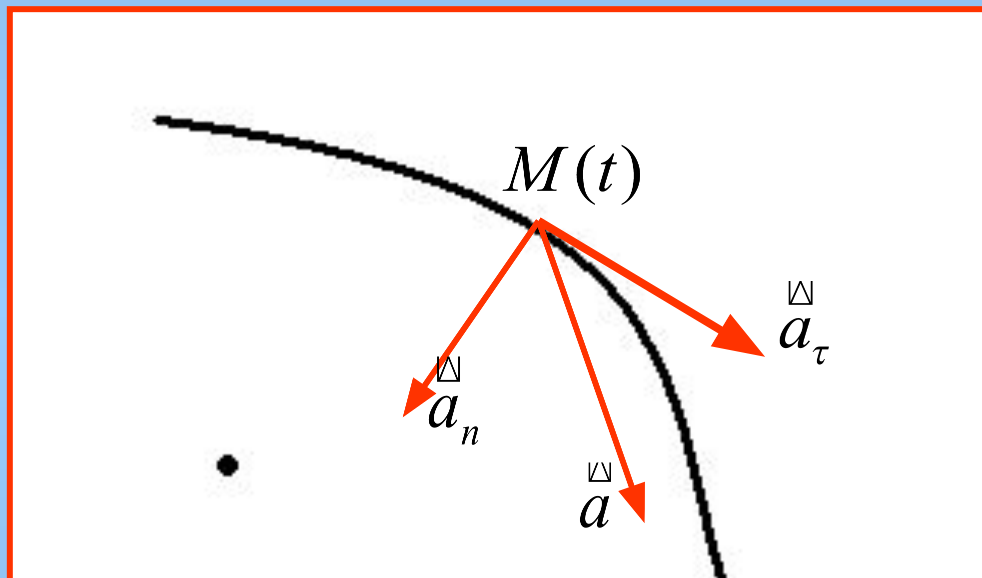
Соприкасающаяся плоскость – ближе всех приближена к траектории в данной точке.

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.

$$\vec{\mathbf{a}} = a_\tau \vec{\boldsymbol{\tau}} + a_n \vec{\mathbf{n}}; \quad a_b \equiv 0$$

Проекции ускорения в естественной системе

Получим выражения для a_τ , a_n

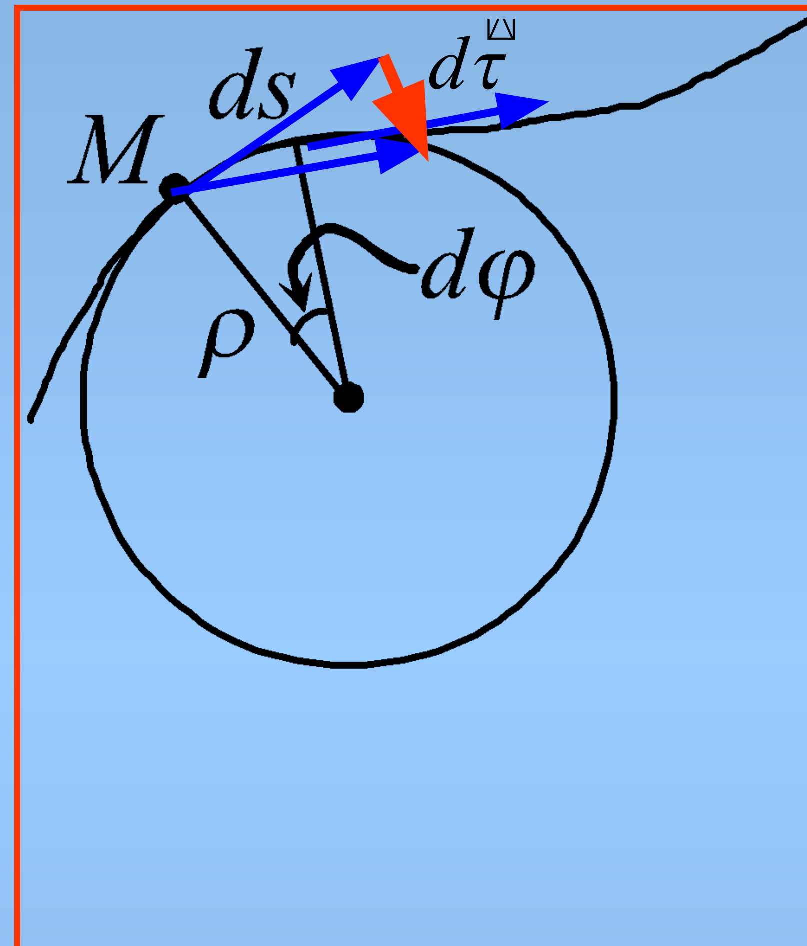


$$\vec a = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d(\dot s\vec\tau)}{dt} = \ddot s\vec\tau + \dot s\frac{d\vec\tau}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot s\vec\tau + \dot s^2\frac{d\vec\tau}{ds}$$

Проекции ускорение в естественной системе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} =$$

$$= \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\frac{1}{\rho} = \vec{n}\frac{1}{\rho};$$



ρ – радиус кривизны траектории. $\Rightarrow$

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

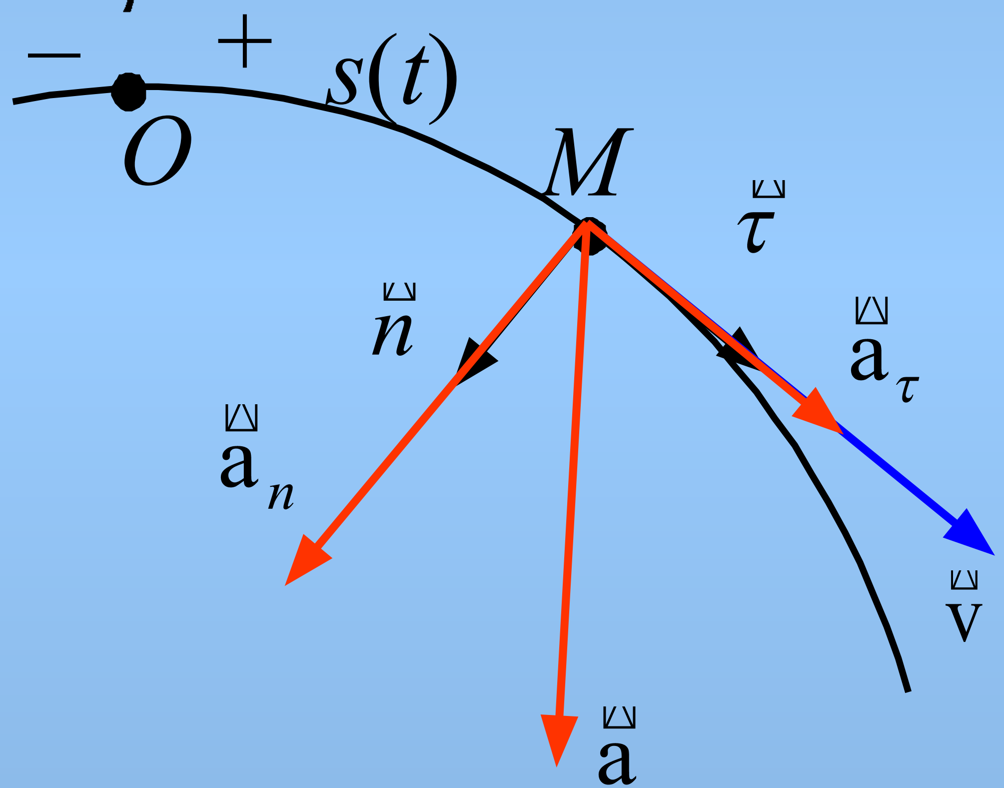
$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau$ – касательное ускорение

$a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{\rho}$ – нормальное ускорение

Проекции ускорения в естественной системе

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau - \textit{касательное} \quad \textit{ускорение}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} - \textit{нормальное} \quad \textit{ускорение}$$

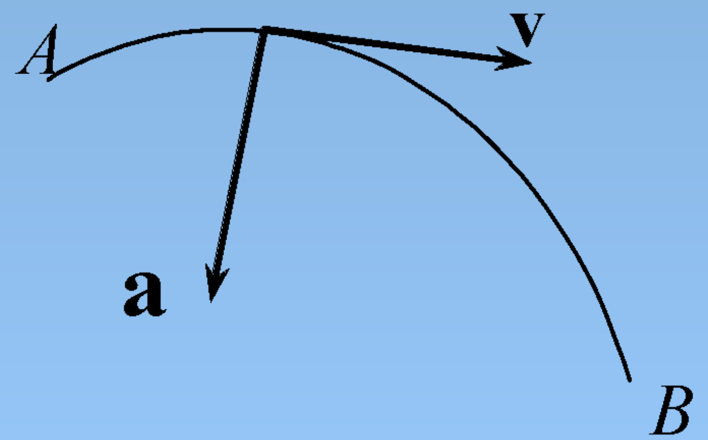


Механический смысл касательного и нормального ускорения

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau ; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

Касательное ускорение ответственно за изменение вектора скорости по модулю.
Нормальное ускорение ответственно за изменение скорости по направлению.

Пример.



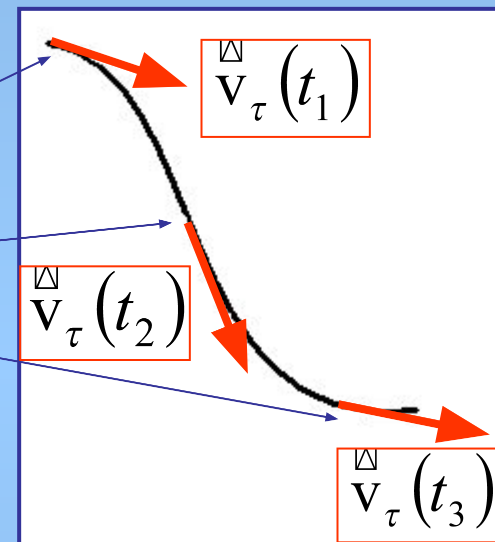
Преступник в пункте А сел в машину в 12-00 и поехал по дороге с начальной скоростью 100км/час. Пункт перехвата В находится в 50 км от пункта А. Известно, что он ехал все время так, что $\vec{v} \perp \vec{a}$

Помогите поймать преступника.

Равномерное движение

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = 0 \rightarrow \left|\vec{v}_\tau\right| = const$$

$$v_\tau(t_1) = v_\tau(t_2) = v_\tau(t_3)$$



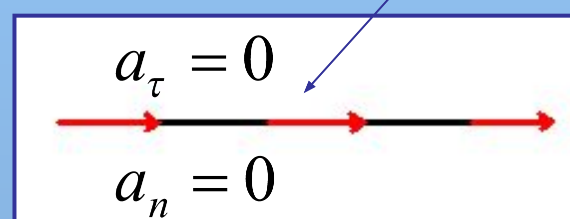
Уравнение движения и нач. условия:

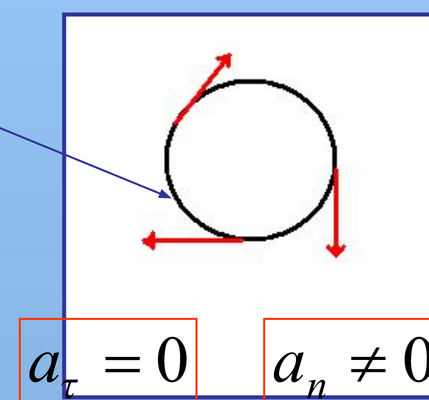
$$\dot{s} = v_{\tau 0} \qquad s(0) = s_0$$

Закон движения:

$$s = s_0 + v_{\tau 0} t$$

$$v_\tau = const$$



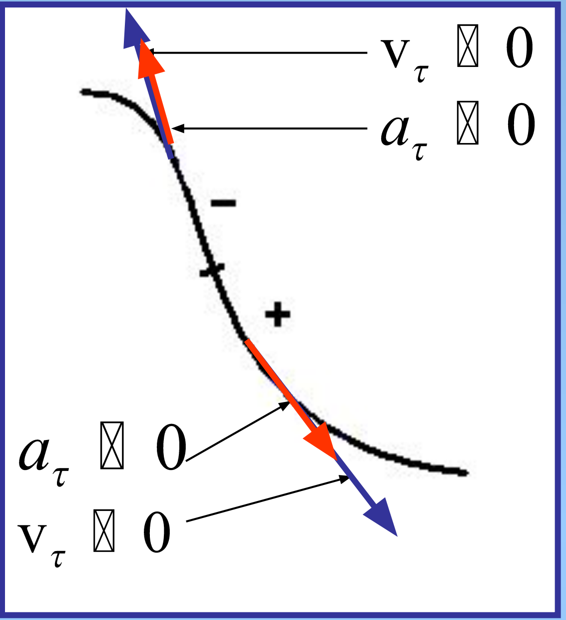


Простейшие движения точки

Если $\left|\vec{a}_\tau\right| \neq 0$

Ускоренное движения: $\vec{v}_\tau \cdot \vec{a}_\tau > 0$

Замедленное движения: $\vec{v}_\tau \cdot \vec{a}_\tau < 0$



Равнопеременное движение

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = const$$

Уравнение движения и нач. условия:

$$\ddot{s} = a_\tau \qquad v_\tau(0) = v_{\tau 0} \qquad s(0) = s_0$$

Закон движения:

$$s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_\tau t^2 / 2$$

Заключение

1. Определены основные задачи кинематики.
2. Рассмотрены способы задания движения точки.
3. Определена траектория точки.
4. Определена скорость и ускорение точки.
5. Определены проекции скорости и ускорения в прямоугольной декартовой и естественной системах координат
6. Выяснен механический смысл касательного и нормального ускорения.
7. Рассмотрены частные случаи движения точки.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется механическим движением точки?
2. Какой геометрией описывается пространство, в котором происходит движение тел?
3. Зависит ли расстояние между двумя точками пространства от выбора системы координат?
4. Что означает однородность пространства и времени?
5. Что изучает кинематика?
6. Сформулируйте задачи кинематики.
7. Какие способы задания движения материальной точки существуют?
8. Что такое траектория материальной точки?
9. Что такое скорость материальной точки?

Вопросы для самоконтроля

10. Как определяется единичный вектор, направленный вдоль касательной к траектории?
11. Что характеризует ускорение?
12. Ускорение это векторная величина или скалярная?
13. Что характеризует тангенциальное ускорение, чему оно равно и как направлено?
14. Что характеризует нормальное ускорение, чему оно равно и как направлено?
15. Что такое радиус кривизны траектории?
16. Какое движение точки называется равнопеременным?
17. Что называется ускорением точки?
18. Какое движение называется равномерным?

Тема следующей лекции

Простейшие движения твердого тела.